内容简介

本书由三大部分组成:一是近代随机过程论的基础,含点集拓扑、积分与测度、Banach 空间、Banach 代数及算子半群. 二是随机过程论的基本理论,含马尔可夫过程、鞅、平稳过程. 三是随机过程的应用,含更新过程的应用、各种马尔可夫过程的应用、平稳序列的应用、鞅的应用.

本书兼顾了各种人员的要求,满足了不同目的的读者需要. 基础好的理论研究工作者可重点参考第二部分——随机过程的基本理论;研究生主要参考第二部分并以第一部分做预备知识;应用研究工作者可重点参考第三部分——随机过程的应用,并以第一、第二部分做理论根据.

本书既可作为研究生的教学参考书,又可作为理论研究及应用研究的引导书.

前　　言

今年是许宝騄先生诞生九十周年。许先生是我国最早的一批院士之一,“是我国最早从事概率论、数理统计科学研究并达到世界先进水平的一位数学家”,对我国近代数学的发展,有过卓越的贡献,享誉国内外,堪称一代宗师。作为长期跟随许先生学习过的弟子之一,特撰此书,以示对先生之敬意。

随机过程论方面的书,无论是专著或教材,国内外已有不少,但随机过程的基础、理论、应用三者皆含的书却不多。本书集这三方面的内容,故名之曰《随机过程论——基础、理论、应用》。

本书分三部分:第一部分是基础,包含前三章。第一章是点集拓扑简介,这一章取材于许宝騄先生1964年在北京大学概率论讨论班上报告的内容。第二章是测度与积分摘要。测度与积分在随机过程的研究中,是不可须臾或缺的工具,因此择其要者集于第二章。第三章是随机过程研究中最常用的泛函分析的基本内容,诸如Banach空间、Banach代数、算子半群。第二部分,是本书的核心,概括了随机过程的基本理论,主要讲三种随机过程模型:马尔可夫过程、鞅过程、平稳过程。其中四章讲马尔可夫过程,鞅过程与平稳过程各占一章。这种比例分配是合乎这三类过程的内涵、历史长短、文献多寡的实际情况的。第二部分还有一章论述随机过程的基本概念,这是第四章。第十一章作为随机分析的一些引子,简单论述了随机微分方程式,特别是Ito积分。第三部分是第十二章,讲随机过程的应用。其讲法是用理论模型来带实际应用,讲明该理论如何与实际问题结合,间或举一二例以示范。在这一部分中,主要讲述了更新过程、分枝过程、生灭过程、宽平稳序列和鞅的应用。

随机过程论，即使从 A. A. Markov 于 1907 年发表的重要论文算起，也有近百年历史，其文献、成果浩如烟海。本书只不过是沧海一粟，如能对读者有所裨益，即不虚此笔墨了。

作者才智平平，书中谬误之处在所难免，敬请不吝指教。

作　者
2000 年 2 月 18 日
于珞珈山

目　　录

第一章　点集拓扑简介

本书的集合运算符号,取通用之表示法. 如 Ω 为任一集合, $\omega \in \Omega$ 表示 ω 属于 Ω,或 ω 是 Ω 之元素; $A \subset \Omega$ 表示 A 含于 Ω,或 A 是 Ω 之子集; $\{\omega\}$ 表示含 ω 的单点集; $\bigcup$ 与 $\bigcap$ 分别表示求并与求交运算; $A-B$ 与 $A\Delta B$ 分别表示 A 与 B 之差及 A 与 B 之对称差; $\varnothing$ 表示空集; $A^c \triangleq \Omega - A$ 表示 A 之补集. 有时简记 $A \cap B$ 为 AB.

$\mathbf{R}^d$ 恒表示 d 维欧氏空间, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$, $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$.

§1　拓扑空间中的开集、闭集、G_δ 集、F_σ 集、Borel 集与子空间

定义 1.1　设 Ω 为任一集合, $\mathscr{T}$ 为 Ω 的一个子集族(有时称子集族为集合系),如果 $\mathscr{T}$ 满足:

(C_1)　$\varnothing \in \mathscr{T}$, $\Omega \in \mathscr{T}$;

(C_2)　$A_\gamma \in \mathscr{T} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathscr{T}$ (Γ 是任一指标集);

(C_3)　$B_n \in \mathscr{T}$ $(1 \leqslant n \leqslant N,\ N$ 是任一正整数$) \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n \in \mathscr{T}$,

则称 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是一个**拓扑空间**, $\mathscr{T}$ 是 Ω 上的一个**拓扑**,当 $A \in \mathscr{T}$ 时,称 A 为**开集**; $\Omega - A$ 为**闭集**.

定义 1.2　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, $A \subset \Omega$,含于 A 的最大开集,即 $\bigcup\limits_{G \subset A, G \in \mathscr{T}} G$ 称为 A 的**开核**,记之为 A°.

命题 1.1　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, Ω 中的子集的开核具有下列性质:

(1)　$(A-A^{\circ})^{\circ}=\varnothing$;

(2)　$A\subset B\Longrightarrow A^{\circ}\subset B^{\circ}$;

(3)　$G\subset A,\ G\in\mathscr{T}\Longrightarrow G\subset A^{\circ}$;

(4)　$(A^{\circ})^{\circ}=A^{\circ}$;

(5)　$A\in\mathscr{T}\Longleftrightarrow A=A^{\circ}$;

(6)　$(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma})^{\circ}\supset\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma}^{\circ}$　(Γ 是任一指标集);

(7)　$(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma})^{\circ}\subset\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma}^{\circ}$　(Γ 是任一指标集);

(8)　$A^{\circ}B^{\circ}=(AB)^{\circ}$.

定义 1.3　设 x 是拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中任一点,含 x 的任何开集均称为 x 的**邻域**.

命题 1.2　设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的任一子集,则

(1)　A 为开集之充要条件是:A 中每一点 x 均有一个含于 A 的邻域;

(2)　$x\in A^{\circ}\Longleftrightarrow x$ 有一个含于 A° 之邻域.

证　(1)　必要性.若 A 为开集,则 $A=A^{\circ}$,故 A(即 A°)中每一点 x 均有含于 A 之邻域 A°.

充分性.只需证 $A\subset A^{\circ}$.事实上,任取 $x\in A$,由假设知:有开集 G 满足 $x\in G\subset A$.由 A° 之定义此 G 必含于 A°,从而 $x\in A^{\circ}$.充分性得证.

(2) 是显然的.

定义 1.4　设 A 为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$之子集,含 A 之最小闭集,即 $\bigcap\limits_{F\supset A,F闭}F$,称为 A 之**闭包**,记之为 $\bar{A}$.

命题 1.3　设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间,Ω 中的子集的闭集与闭包具有下列性质:

(1)　任意多个闭集之交是闭集;

(2) 有限多个闭集之并是闭集;

(3) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(4) $A \subset F$, F 是闭集 $\Longrightarrow \overline{A} \subset F$;

(5) $\overline{A}$ 是闭集;

(6) A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$;

(7) 对任一指标集 Γ,恒有

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma};$$

(8) $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$, $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$;

(9) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(10) 若 G 是开集,则对 Ω 的任何子集 A 有

$$\overline{(AG)} = \overline{(\overline{A}G)}.$$

证 (1)~(9)是显然的.只证(10).因为

$$\begin{aligned}(\overline{A}G)(\overline{(AG)})^c &= (\overline{A}G)((AG)^c)^\circ = (\overline{A}G)(A^c \cup G^c)^\circ \\ &= \overline{A}(G(A^c \cup G^c))^\circ = \overline{A}(GA^c)^\circ \\ &= \overline{A}G(A^c)^\circ = G\overline{A}(\overline{A})^c = \varnothing,\end{aligned}$$

故

$$\overline{A}G \subset \overline{(AG)},$$

从而$\overline{(\overline{A}G)} \subset \overline{(AG)}$,而$\overline{(AG)} \subset \overline{(\overline{A}G)}$是显然的,故(10)成立.

命题1.4 对拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中任一子集A,总有:$x \in \overline{A}$的充要条件是x的任一邻域与A有非空交集.

证 因为由命题1.3(8)知

$$\begin{aligned}x \in (\overline{A})^c &\Longleftrightarrow x \in (A^c)^\circ \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足}: x \in G \subset (A^c)^\circ = (\overline{A})^c \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G \text{ 满足}: x \in G \text{ 且 } G\overline{A} = \varnothing.\end{aligned}$$

此即命题1.4成立.

定义1.5 称拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的子集F是$\boldsymbol{F_\sigma}$**集**,如果F可表

示为有限或可数无穷个闭集之并;称 Ω 的子集 G 是 **G_δ 集**,如果 G 可表示为有限或可数无穷个开集之交.

显然任一闭集必为 F_σ 集,任一开集必为 G_δ 集.

定义 1.6 设 Ω 是任一集合(未必赋有拓扑),Σ 是 Ω 上的一个非空子集族.

(1) 称 Σ 是**半环**,如果

(a) $\varnothing \in \Sigma$;

(b) $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cap B \in \Sigma$;

(c) $A, B \in \Sigma,\ A \supset B \Longrightarrow A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i,\ C_i \in \Sigma,\ C_i \cap C_j = \varnothing\ (i \neq j)$.

(2) 称 Σ 是**环**,如果

$A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma,\ A \cap B \in \Sigma,\ A - B \in \Sigma$.

(3) 称 Σ 是**代数**,如果 Σ 是环,而且 $\Omega \in \Sigma$.

(4) 称 Σ 是 **σ 环**(或 **σ 代数**),如果 Σ 是环(或代数)且

$$\text{“}A_n \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma\text{”}.$$

(5) 称含 Σ 的最小 σ 代数为**由 Σ 产生的 σ 代数**,记之为 $\sigma(\Sigma)$. 仿之,可定义**由 Σ 产生的环**、**由 Σ 产生的代数**、**由 Σ 产生的 σ 环**.

(6) 若 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,由 $\mathscr{T}$ 产生的 σ 代数 $\sigma(\mathscr{T})$ 称为 **Borel σ 代数**,其中每个元素 $A \in \sigma(\mathscr{T})$ 皆称为 **Borel 集**. 有时记 $\sigma(\mathscr{T})$ 为 $\mathscr{B}(\Omega)$,而 $\mathscr{B}^1 \triangleq \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

命题 1.5 设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,则

(1) 任一 F_σ 集、任一 G_δ 集都是 Borel 集;

(2) 可数个 Borel 集之交或并皆为 Borel 集,两 Borel 集之差亦为 Borel 集.

定义 1.7 设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$,则 $(\Omega^*,\ \Omega^*\mathscr{T} \triangleq \{A\Omega^* : A \in \mathscr{T}\})$ 亦为拓扑空间,称之为**相对于 Ω^* 的子空间**.

$(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T})$ 的开集或闭集,称之为**开于 Ω^*** 或**闭于 Ω^***.

命题 1.6　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$.则有:

(1)　A 开于 Ω^* 的充要条件是:存在开集 G,使 $A = \Omega^* G$;

(2)　A 闭于 Ω^* 的充要条件是:$\Omega^* A^c$ 开于 Ω^*;

(3)　A 闭于 Ω^* 的充要条件是:存在闭集 F,使 $A = \Omega^* F$.

证　(1) 和(2) 显然成立.只证(3).事实上,

$$\begin{aligned} A \text{ 闭于 } \Omega^* &\Longleftrightarrow \Omega^* A^c \text{ 开于 } \Omega^* \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } \Omega^* A^c = \Omega^* G \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } \Omega^*(\Omega^* A^c)^c = \Omega^*(\Omega^* G)^c \\ &\Longleftrightarrow \text{存在开集 } G, \text{使 } A = \Omega^* G^c. \end{aligned}$$

在子空间 $(\Omega^*, \Omega^*\mathscr{T})$ 中,"取补集"、"取闭包"、"取开核" 分别记作:$(\cdot \mid \Omega^*)^c$,$\overline{(\cdot \mid \Omega^*)}$,$(\cdot \mid \Omega^*)^\circ$.显然,

$$(A \mid \Omega^*)^c = \Omega^* A^c.$$

命题 1.7　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 为拓扑空间,$\Omega^* \subset \Omega$,则有

(1)　$\overline{(A \mid \Omega^*)} = \Omega^* \overline{A}$;

(2)　$(A \mid \Omega^*)^\circ = \Omega^*((\Omega^*)^c \cup A)^\circ$.

证　(1)　$\overline{(A \mid \Omega^*)} = \bigcap\limits_{\substack{E \text{闭于}\Omega^* \\ E \supset A}} E = \bigcap\limits_{\substack{F \text{闭} \\ F \supset A}} \Omega^* F = \Omega^* \overline{A}$.

(2)　由命题 1.3 (8) 及本命题之(1) 知

$$\begin{aligned} (A \mid \Omega^*)^\circ &= \left(\overline{((A \mid \Omega^*)^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*\right)^c \\ &= \left(\overline{(\Omega^* A^c \mid \Omega^*)} \mid \Omega^*\right)^c \\ &= \left(\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)} \mid \Omega^*\right)^c \\ &= \Omega^*\left(\Omega^* \overline{(\Omega^* A^c)}\right)^c \\ &= \Omega^*((\Omega^* A^c)^c)^\circ \\ &= \Omega^*((\Omega^*)^c \cup A)^\circ. \end{aligned}$$

§2　稠密、无处稠密、纲

定义 2.1　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是拓扑空间,$A, B \subset \Omega$.称 **A 对 B 稠密**,

如果 $\overline{A}\supset B$.若 $B(\overline{A})^c$ 对 B 稠密,则称 **A 对B 无处稠密**.特别地,若 $B=\Omega$,则"对 B"二字略去.

显然,

$$
\begin{aligned}
A\text{ 对 }B\text{ 无处稠密} &\Longleftrightarrow B(\overline{A})^c\text{ 对 }B\text{ 稠密}\\
&\Longleftrightarrow \overline{(B(\overline{A})^c)}\supset B\\
&\Longleftrightarrow B(\overline{(B(\overline{A})^c)})^c=\varnothing\\
&\Longleftrightarrow B((B(\overline{A})^c)^c)^\circ=\varnothing\\
&\Longleftrightarrow B(B^c\cup\overline{A})^\circ=\varnothing.
\end{aligned}
$$

特别地,A 稠密的充要条件是$\overline{A}=(\overline{A})^\circ=\Omega$; A 无处稠密的充要条件是$(\overline{A})^\circ=\varnothing$.

定义 2.2 设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间,$A,B\subset\Omega$.若 A 可表示为可数个对 B 无处稠密集之并,则称 A 对于B 属于**第一纲集**,否则称 A 对于B 属于**第二纲集**.

特别地,若 $B=\Omega$,则"对于 B"三字略去.即是 A 属于第一纲集的充要条件是 A 可表示为可数个无处稠密集之并,否则称 A 为属于第二纲集.

如不特别声明,以下所言之集,皆为拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$之子集,而 F(或 F_n)与 G(或 G_n)分别表示 Ω 中之闭集与开集.

命题2.1 (1) 若 A 对B 稠密,$A_1\supset A$, $B_1\subset B$,则 A_1 对 B_1 稠密.

(2) A 对B 稠密之充要条件是A 对$\overline{B}$ 稠密.

(3) A 对 BG_0 稠密之充要条件是:

$$\varnothing\neq BG\subset BG_0\Longrightarrow AG\neq\varnothing.$$

证 (1)和(2)显然成立.只证(3).

必要性.设 A 对BG_0 稠密,即 $\overline{A}\supset BG_0$.若$\varnothing\neq BG\subset BG_0$,则由命题1.3 (10)有

$$\overline{(AG)}=\overline{(\overline{A}G)}\supset\overline{(BG_0G)}=\overline{(BG)}\neq\varnothing.$$

故 $AG \neq \varnothing$. 必要性证毕.

充分性. 设 $\overline{A}$ 不包含 BG_0，即 $(\overline{A})^c BG_0 \neq \varnothing$. 取 $G = (\overline{A})^c G_0$，即得 $BG \neq \varnothing$，$BG \subset BG_0$，但 $AG = \varnothing$. 充分性证毕.

命题 2.2 (1) A 对 B 稠密的充要条件是：

$$\text{“}BG \neq \varnothing \Longrightarrow AG \neq \varnothing\text{”}.$$

(2) A 为稠密集的充要条件是：

$$\text{“}G \neq \varnothing \Longrightarrow AG \neq \varnothing\text{”}.$$

(3) A 对 BG_0 稠密的充要条件是：AG_0 对 BG_0 稠密.

(4) 若 A 对 G_0 稠密，G_1 对 G_0 稠密，则 AG_1 对 G_0 稠密.

证 (1) 在命题 2.1 (3) 中置 $G_0 = \Omega$ 即得(1).

(2) 在(1)中取 $B = \Omega$ 即得(2).

(3) 充分性显然成立. 下证必要性. 设 $\overline{A} \supset BG_0$，则由命题 1.3 (10) 得

$$\overline{(AG_0)} = \overline{(\overline{A}G_0)} \supset \overline{(BG_0)} \supset BG_0,$$

故 AG_0 对 BG_0 稠密.

(4) 据假设 $\overline{A} \supset G_0$，$\overline{G_1} \supset G_0$，故由命题 1.3 (10) 及命题 2.2 (3) 得

$$\overline{(AG_1)} = \overline{(\overline{A}G_1)} \supset \overline{(G_0 G_1)} \supset G_0,$$

此即 AG_1 对 G_0 稠密. 命题 2.2 证毕.

系 2.1 有限个开稠密集之交亦为稠密集.

命题 2.3 A 对 B 无处稠密之充要条件为：“$GB \neq \varnothing \Longrightarrow \exists G_0 \subset G$，使 $G_0 B \neq \varnothing$，$G_0 A = \varnothing$”.

证 必要性. 设 A 对 B 无处稠密，即 $B(\overline{A})^c$ 对 B 稠密. 若 $GB \neq \varnothing$，则由命题 2.2 (1) 知：$GB(\overline{A})^c \neq \varnothing$. 取 $G_0 = G(\overline{A})^c$ 即为所求.

充分性. 设 A 不是对 B 无处稠密，则有 $B(B^c \cup \overline{A})^\circ \neq \varnothing$. 但条件成立，故存在 G_0 使 $G_0 \subset (B^c \cup \overline{A})^\circ$，$G_0 B \neq \varnothing$，$G_0 A =$

$\varnothing$. 所以

$$G_0 B \subset (B^c \cup \bar{A}) B = \bar{A} B.$$

因此

$$\begin{aligned} G_0 B \subset G_0 B \bar{A} B = B G_0 \bar{A} \subset B \, \overline{(G_0 \bar{A})} \\ = B \, \overline{(G_0 A)} = \varnothing. \end{aligned}$$

矛盾. 充分性得证.

命题 2.4 若 A 与 B 皆对 G 无处稠密, 则 $A \cup B$ 对 G 无处稠密.

证 据假设 $G(\bar{A})^c$ 和 $G(\bar{B})^c$ 皆对 G 稠密. 由命题 2.2 (4) 知 $G(\bar{A})^c(\bar{B})^c$ 对 G 稠密, 即 $G(\overline{(A \cup B)})^c$ 对 G 稠密, 亦即 $A \cup B$ 对 G 无处稠密.

命题 2.5 下列两条件等价:

(1) $G_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ 稠密 $\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 稠密;

(2) 非空开集均属于第二纲集.

证 设 (1) 不成立, 推证 (2) 也不成立. 设有 $G_n (n = 1, 2, \cdots)$ 稠密, 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 不稠密, 推证有非空开集 G_0 属于第一纲集. 事实上, 取

$$G_0 = (\overline{(\bigcap_{n \geqslant 1} G_n)})^c \neq \varnothing,$$

则

$$G_0 = G_0 (\bigcap_{n \geqslant 1} G_n)^c = \bigcup_{n \geqslant 1} G_0 G_n^c.$$

而由 G_n^c 是闭集和命题 1.3 (8) 和 G_n 稠密可得

$$(\overline{(G_n^c)})^\circ = (G_n^c)^\circ = (\overline{G_n})^c = \Omega^c = \varnothing,$$

此即 G_n^c 无处稠密, 更有 $G_0 G_n^c$ 无处稠密, 从而 G_0 是第一纲集.

其次证明: 若 (2) 不成立, 则 (1) 也不成立. 设有非空开集 G 属于第一纲集, 于是 $G = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$, A_n 无处稠密, 即 $(\overline{A_n})^\circ = \varnothing$. 令 G_n

$=(\overline{A_n})^c$,则$\overline{G_n}=\left((\overline{A_n})^\circ\right)^c=\Omega$,即 G_n 稠密.但是

$$\bigcap_{n\geqslant 1}G_n=\bigcap_{n\geqslant 1}(\overline{A_n})^c=(\bigcup_{n\geqslant 1}\overline{A_n})^c\subset G^c,$$

故

$$\overline{(\bigcap_{n\geqslant 1}G_n)}\subset G^c\neq\Omega,$$

即 $\bigcap_{n\geqslant 1}G_n$ 不稠密,即(1)不成立.命题2.5证毕.

§3　紧性与列紧性,第一与第二可数条件

定义3.1　设$(\Omega,\mathscr{T})$是拓扑空间.称Ω中的子集族Σ是Ω的一个**覆盖**,如果 $\bigcup_{A\in\Sigma}A\supset\Omega$;如果$\Sigma$中每一元素皆为$\Omega$中之开集,则称覆盖$\Sigma$是$\Omega$的一个**开覆盖**.

称$(\Omega,\mathscr{T})$是**紧的**,如果对Ω的任一开覆盖Σ,均有$\Sigma'\subset\Sigma$,Σ'仅含有限个元素且Σ'是Ω的一个开覆盖.称$(\Omega,\mathscr{T})$是**列紧的**,如果Ω的任一可数的开覆盖Σ,均有$\Sigma'\subset\Sigma$,Σ'仅含有限个元素且Σ'是Ω的一个开覆盖.称Σ'为Σ的**子覆盖**.

命题3.1　对拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$,总有:

(1)　$(\Omega,\mathscr{T})$是紧的 $\Longleftrightarrow\Omega$ 的任一开覆盖均有有限子覆盖 $\Longleftrightarrow$ 任何交为空集的闭集族均含交为空集的有限闭集族.

(2)　$(\Omega,\mathscr{T})$是列紧的 $\Longleftrightarrow\Omega$ 的任一可数的开覆盖均有有限的子覆盖 $\Longleftrightarrow$ 任何交为空集的可数的闭集族均含交为空集的有限闭集族 $\Longleftrightarrow$ 任何交为空集的单调下降的闭集列$\{F_n:n\geqslant 1\}$皆有一个$F_m=\varnothing\Longleftrightarrow$ 任何一个可数的闭集族中,若任何有限个之交非空,则全体之交亦非空 $\Longleftrightarrow$ 若$F_n\downarrow$,$F_n\neq\varnothing$,则$\bigcap_{n\geqslant 1}F_n\neq\varnothing$.

证　由紧性及列紧性之定义即得命题3.1.

定义3.2　称点列$\{x_n:n\geqslant 1\}$**收敛**于x,记作$x_n\to x$或$\lim_{n\to\infty}x_n=x$,如果对x的任一邻域$V(x)$,$\{x_n\}$中几乎一切项(即除去有限项以外)皆含于$V(x)$.称点x是集合A的**极限点**,如果

x 的任一邻域 $V(x)$ 皆含 A 中无穷多个点. A 的全体极限点记为 A'.

定义 3.3　给定两个命名:

条件(甲):凡点列 $\{x_n: n\geqslant 1\}$ 皆有收敛子列;

条件(乙):凡无穷集皆有极限点.

命题 3.2　$A'\subset\bar{A}$.

证　若 $x\overline{\in}\bar{A}$,即 $x\in$ 开集$(\Omega-\bar{A})$,所以存在 x 的一个邻域 $V(x)\subset\Omega-\bar{A}\subset\Omega-A$,此即 $x\overline{\in}A'$. 命题3.2得证.

定理 3.1　拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$列紧的充要条件是条件(乙)成立.

证　必要性. 任给无穷集 A,不妨令 $A=B\cup\{x_n: n\geqslant 1\}$. 令 $F_n=\overline{\{x_n,x_{n+1},\cdots\}}$　$(n\geqslant 1)$,则$\{F_n: n\geqslant 1\}$是单调下降闭集列. 由列紧性再用命题3.1知 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1}F_n\neq\varnothing$. 取 $x\in\bigcap\limits_{n\geqslant 1}F_n$,则 x 的任一邻域 $V(x)$ 均与$\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$有交$(n\geqslant 1)$,从而 x 的任一邻域 $V(x)$ 与$\{x_1,x_2,\cdots\}$有无穷多个交点,即 x 是 A 的极限点.

充分性. 任给单调下降的非空的闭集列$\{F_n: n\geqslant 1\}$,取 $x_n\in F_n$　$(n\geqslant 1)$.

(i)　若$\{x_1,x_2,\cdots\}$中只有有限个点相异,则其中必有某个 x_i 属于无穷多个 F_n, 再用 $\{F_n: n\geqslant 1\}$ 的单调下降性可知 $x_i\in\bigcap\limits_{n\geqslant 1}F_n$. 所以 Ω 是列紧的.

(ii)　若$\{x_1,x_2,\cdots\}$中有无穷多个点相异,不失普遍性,可设$\{x_1,x_2,\cdots\}$中任意两点皆不同. 记 $A_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$　$(n\geqslant 1)$. 由条件(乙),A_1 有一个极限点 x,而 A_1 与任一 A_n 只差有限个点,所以 x 也是任一 A_n 的极限点. 因此

$$x\in A_n'\subset\overline{A_n}\subset F_n\quad(n\geqslant 1).$$

所以 Ω 是列紧的.

命题 3.3　条件(甲)$\Longrightarrow$条件(乙).

证　任给一无穷集 A,从 A 中取一个项项相异的可数集 $\{x_n:n\geqslant 1\}$.若条件(甲)成立,则 $\{x_n:n\geqslant 1\}$ 中有子列 $x_{n_k}\to x$.易证 x 是 $\{x_n:n\geqslant 1\}$ 的一个极限点,更是 A 的一个极限点,即条件(乙)成立.

定义 3.4(单点紧化)　任给拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$,取 $x_*\overline{\in}\Omega$,令 $\Omega_*=\Omega\cup\{x_*\}$.在 Ω_* 中定义开集如下:

若 $A\subset\Omega$,则定义 A 为**开集**;

若 $x_*\in A$,则当且仅当 Ω_*-A 为有限集时定义 A 为**开集**.

显然这样定义的开集族构成了一个拓扑 $\mathscr{T}_*$.

命题 3.4　上述方法得到的拓扑空间$(\Omega_*,\mathscr{T}_*)$是紧的,满足条件(甲)而且不同的点有不交的邻域.

证　(1)　设 Σ 是 Ω_* 的一个开覆盖,则必有 $G\in\Sigma$, $x_*\in G$.但 Ω_*-G 是有限集,所以在 Σ 中必有 $G_1,\cdots,G_m$,使 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}G_k\supset\Omega_*-G$,此即 $\{G,G_1,\cdots,G_m\}$ 是 Ω_* 的一个覆盖,从而$(\Omega_*,\mathscr{T}_*)$是紧的.

(2)　任给一个点列 $\{x_n\}$.

(A)　若 $\{x_n\}$ 只有有限项相异,则有子序列 $\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k}\equiv x$,这时 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x.

(B)　若 $\{x_n\}$ 有无穷多项相异,记之为 $\{x_{n_k}\}$,这时 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_*.

总之,条件(甲)成立.

(3)　任取 $x,y\in\Omega_*$, $x\neq y$.

(A)　x 与 y 中有一个是 x_*,不妨设 $x_*=x\neq y$.则 $\{y\}$ 和 $\Omega_*-\{y\}$ 分别为 y 与 x_* 之邻域.

(B)　x 与 y 均属于 Ω,则 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 分别为 x 与 y 的不交邻域.

定义 3.5 设 Ω 是任一集合(不一定有拓扑),Σ 是 Ω 的一个子集族,以 Σ 的元素造一切并集,且将空集添入,得扩大的子集族 $S(\Sigma)$ (显然 $S(\Sigma)$ 对其中的并运算封闭),如 $S(\Sigma)$ 是 Ω 的一个拓扑,则称 Σ 是Ω 的**开基**,简称基,Σ 中之每一元素均称为**基开集**. 若 $x \in A \in \Sigma$,则称 A 为x 的一个**基邻域**.

命题 3.5 Σ 是 Ω 的开基的充要条件是下列的条件(B_1) 和(B_2) 成立,或(B_1) 和(B_2') 成立:

(B_1) $\Omega \in S(\Sigma)$;

(B_2) $A_1, A_2 \in \Sigma \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in S(\Sigma)$;

(B_2') $A_1, A_2 \in \Sigma$, $x \in A_1 \cap A_2 \Longrightarrow \exists A \in \Sigma$,使 $x \in A \subset A_1 \cap A_2$.

证明甚易,从略.

定义 3.6(可数性条件) 给定拓扑空间$(\Omega, \mathscr{T})$.

第一可数性条件(D_1): 如果对 Ω 中的任一点 x,均有一个可数的邻域系 $\mathscr{D}_x$,使得 x 的任一邻域$V(x)$,均存在一个 $G \in \mathscr{D}_x$,使 $V(x) \supset G$.

第二可数性条件(D_2): Ω 有可数基.

林氏条件(L): 对 Ω 的任何一个开集族Σ,均有一个可数的子集族 $\mathscr{D}$ 满足 $\bigcup\limits_{G \in \Sigma} G = \bigcup\limits_{G \in \mathscr{D}} G$.

命题 3.6 (L) 和列紧性 $\Longrightarrow$ 紧性.

定理 3.2 若(D_1) 成立,则条件(乙)$\Longrightarrow$ 条件(甲).

证 设(D_1)和条件(乙)成立. 推证条件(甲)成立. 任给点列 $\{x_n : n \geqslant 1\}$,不失普遍性可设它们项项相异. 由条件(乙)可知 $\{x_n\}$ 有极限点 x. 由(D_1) 确定的 x 的可数邻域系记为 $\mathscr{D}_x \triangleq \{D_1, D_2, \cdots\}$. 由 x 是$\{x_n\}$ 的极限点可知 $D_1, \cdots, D_n$ 中有 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点$(n \geqslant 1)$. 所以可取 $x_{k_1} \in D_1$, $\cdots$, $x_{k_n} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i$, $\cdots$,而且 $\{x_{k_n} : n \geqslant 1\}$ 中项项相异.

推证 $x_{k_n}\to x$. 任给 x 的一个邻域 $V(x)$，由(D_1)条件及 $\mathscr{D}_x$ 的取法知：有 $D_l\subset V(x)$. 所以当 $n\geqslant l$ 时，$x_{k_n}\in D_l\subset V(x)$，此即 $x_{k_n}\to x$. 定理 3.2 得证.

定理 3.3　$(\mathrm{D}_2)\Longrightarrow(\mathrm{D}_1)$ 及 (L).

证　先证 $(\mathrm{D}_2)\Longrightarrow(\mathrm{D}_1)$. 事实上，对任一点 x，取其全体基邻域为 $\mathscr{D}_x$，则 $\mathscr{D}_x$ 满足条件(D_1)中之要求.

再证 $(\mathrm{D}_2)\Longrightarrow(\mathrm{L})$. 由$(\mathrm{D}_2)$得知有可数基 Σ. 设 Γ 是任一开集族，令

$$\Sigma_1=\{A:\ A\in\Sigma\ 且存在\ G\in\Gamma,\ G\supset A\},$$

对每个 $n\geqslant 1$，取 $G_n\in\Gamma,\ G_n\supset A_n\in\Sigma_1$，则

$$\bigcup_{G\in\Gamma}G=\bigcup_{n\geqslant 1}G_n.$$

此即 (L) 成立.

定理3.4　设拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$满足(D_2)，则下列四条件等价：

(1)　$(\Omega,\mathscr{T})$ 是紧的；

(2)　$(\Omega,\mathscr{T})$ 是列紧的；

(3)　$(\Omega,\mathscr{T})$ 满足条件(甲)；

(4)　$(\Omega,\mathscr{T})$ 满足条件(乙).

证　由命题 3.3、命题 3.6 和定理 3.1 ~ 定理 3.3 立即可得定理 3.4.

上面我们定义了拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的紧性、列紧性、条件(甲)、条件(乙)、条件(L)及(D_1)、(D_2). 对于 Ω 中的子集A，如何定义相应的性质？一种是用子空间$(A,A\cap\mathscr{T})$具有某性质 π 来定义A具有性质 π；另一种是用原空间$(\Omega,\mathscr{T})$的语言并把 A 作为Ω 的子集来定义性质 π.

定义 3.7　设拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$是否具有性质 π 已有定义，$A\subset\Omega$. 称 **A 具有性质 π**，如果子空间$(A,A\cap\mathscr{T})$具有性质 π.

按此定义，我们可以说拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的子集 A 具有紧性

(列紧、(甲)、(乙)、(L)、(D_1)、(D_2)……),这种说法是有确切的含义的.

不过子集 A 的某些性质,不需用子空间$(A, A\cap\mathscr{T})$ 来描述,而直接用原空间$(\Omega,\mathscr{T})$ 的语言来定义(当然要求这两种定义是等价的).

例如:

(1) 紧性.称拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$ 中的子集 A 是紧的,如果 A 的任何一个开覆盖都有一个有限的子覆盖.

(2) 条件(甲).称 A 具有条件(甲),如果 A 中的任何一个点列$\{x_n\}$ 均有一个收敛于 A 中某点 x 的子列.

(3) 条件(乙).称 A 具有条件(乙),如果 A 的任何一个无穷子集,均有一个极限点 $x\in A$.

注意:(D_1),(D_2),(L) 无法用原空间的语言来描述其子集 A 是否具有这些性质.

定义 3.8 如果由拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$ 具有某性质 π 能推出其任一子空间$(A, A\cap\mathscr{T})$ 亦具有性质 π,则称此性质 π 具有"**遗传性**".

命题 3.7 (D_1),(D_2),(L) 有"遗传性",但是"紧性"、"列紧性"、"条件(甲)"和"条件(乙)"均无遗传性.

证 (D_1),(D_2),(L) 有"遗传性"是显然的."紧性"、"列紧性"、条件(甲)和条件(乙)无"遗传性"只需注意下面的反例:在 **R** 空间中这 4 条性质是等价的,$[a,b]$ 是紧的,但(a,b) 不是紧的.

命题 3.8 (1) 有限个紧集(列紧集、(甲)集)之并亦是紧集(列紧集、(甲)集);

(2) 有限集是紧集;

(3) 紧集(列紧集、(甲)集)之闭子集是紧集(列紧集、(甲)集);

(4) 无论多少个闭集之交,只要其中有一个是紧集(列紧

集、(甲)集),则所得之交集仍为紧集(列紧集、(甲)集).

证 只证(3).其他的均属显然.事实上,若 Ω 是紧的,F 是闭的,可推证 F 是紧的.设 Σ 是 F 的一个开覆盖,则 $\{\Omega - F\} \cup \Sigma$ 是 Ω 的一个开覆盖.而 Ω 是紧的,所以它有有限子覆盖 $\{\Omega - F\} \cup \Sigma_1$,其中 $\Sigma_1 \subset \Sigma$, Σ_1 有限.于是

$$F = F\Omega = F \cap \bigcup_{G \in \Sigma_1} G.$$

即 F 有有限子覆盖 Σ_1.

定义 3.9 称紧集之子集为**紧囿集**.称拓扑空间 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是**局部紧的**,如果 Ω 中每一点 x 均有一个紧囿的邻域(这等价于每一点 x 均有一个紧囿的基邻域).

命题 3.9 拓扑空间 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是局部紧的充要条件是:全体紧囿开集构成一个基.

证 充分性显然成立.只证必要性.设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是局部紧的.任取 Ω 中一点 x,必有 x 的一个紧囿邻域 V.再设 U 为 x 的任一邻域,必有紧囿开集 $W = UV$,使 $x \in W \subset U$.这说明全体紧囿开集构成一个基.

命题 3.10 在局部紧拓扑空间中,凡紧集皆含于一个紧囿开集中,从而对任一紧集 A,皆存在紧集列 $\{A_n\}$ 和开集列 $\{G_n\}$ 使

$$A \subset G_1 \subset A_1 \subset G_2 \subset A_2 \cdots.$$

证 设 A 是局部紧空间中任一紧集.则 A 中任一点 x 均有一个紧囿邻域 V_x,于是

$$A \subset \bigcup_{x \in A} V_x.$$

但 A 是紧的,所以有 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$,使

$$A \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} V_{x_i},$$

而上式右方是紧囿开集.

定义 3.10 称拓扑空间 $(\Omega, \mathscr{T})$ 中之子集 A 是**相对紧的**,如果 $\overline{A}$ 是紧集.

§4 分离性

定义 4.1 给定拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$.引进下列分离性条件:

(T_0) 任给Ω中的相异两点$x\neq y$,或者有不含y的x的邻域;或者有不含x的y的邻域.

(T_1) 任给Ω中的相异两点$x\neq y$, x有不含y之邻域,y有不含x之邻域.

(T_2) 任给Ω中的相异两点$x\neq y$, x和y各有一邻域,它们不交.

满足(T_i)的拓扑空间称为$(\mathbf{T}_i)$ **空间**$(i=0,1,2)$.显然(T_i)有"遗传性",且$(\mathrm{T}_2)\Longrightarrow(\mathrm{T}_1)\Longrightarrow(\mathrm{T}_0)$.

命题 4.1 $(\mathrm{T}_1)\Longleftrightarrow$ 凡单点集皆为闭集.

证 由命题 1.2 (1) 即得命题 4.1.

命题 4.2 设拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$满足(T_2),则

(1) 任一收敛序列$\{x_n\}$的极限唯一;

(2) "x为A的极限点$\Longleftrightarrow x$的任一邻域皆与$A-\{x\}$有非空交";

(3) $\bar{A}=A\cup A'$.

证 由(T_2)的定义及$\bar{A}$和A'之定义即得命题 4.2.

定理 4.1 设拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$满足(T_2), K_1与K_2是Ω的两个不交紧子集,则存在两个不交开集G_1和G_2,使

$$G_1\supset K_1,\ G_2\supset K_2.$$

证 (1) 先设$K_1=\{x\}$是单点集,$K_1\cap K_2=\varnothing$,即$x\notin K_2$.由(T_2),任取$y\in K_2$,有y之邻域V_y及x的某一邻域$V_{x,y}$,使$V_{x,y}\cap V_y=\varnothing$.由于$K_2$是紧集,故有$y_1,\cdots,y_n\in K_2$使$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}V_{y_i}\supset K_2$.令$U=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}V_{x,y_i}$, $V=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}V_{y_i}$,则$U$和$V$都是开集,$UV=$

$\varnothing$, $x \in U$, $K_2 \subset V$,此即定理 4.1 的结论成立.

(2)　取消 K_1 是单点集的假设.由(1),对 K_1 的每点 x,皆存在两个不交之开集 U_x 与 V_x,使 $x \in U_x$, $K_2 \subset V_x$. 因为 $K_1 \subset \bigcup_{x \in K_1} U_x$, K_1 是紧集,故 $K_1 \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} U_{x_i}$. 取 $U = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} U_{x_i}$, $V = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} V_{x_i}$,则 U 和 V 是两个不交开集,且 $U \supset K_1$, $V \supset K_2$. 定理 4.1 得证.

定理 4.2　若$(\Omega, \mathscr{T})$是具有可数基的(T_2)空间,则对任一紧集 K,均存在单调下降的包含 K 的开集列$\{G_n : n \geqslant 1\}$使

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}.$$

证　令 Σ 是$(\Omega, \mathscr{T})$的一个可数基,$\Sigma^* = \{G : G$ 可表示为 Σ 中之集合的有限并$\}$,则 $\Sigma^* = \{G_1^*, G_2^*, \cdots\}$ 亦为一个可数的开集族.

任取 $x \overline{\in} K$,由定理 4.1,存在两开集 G 与 H 使 $x \in H$, $K \subset G$, $HG = \varnothing$. 所以 $x \overline{\in} \overline{G}$. 由于 Σ 是基,故有 $G = \bigcup_{i \in \Gamma} G_{n_i} \supset K$, $G_{n_i} \in \Sigma$. 但 K 是紧集,所以存在 Γ 的一个有限子集 Γ_1 使

$$G \supset \bigcup_{i \in \Gamma_1} G_{n_i} \supset K.$$

这说明有 $G_l^* \in \Sigma^*$,使 $G \supset G_l^* \supset K$,从而 $x \overline{\in} \overline{G_l^*}$(因为 $x \overline{\in} \overline{G}$). 这说明 K 包含了某一个$\overline{G_l^*}$. 故

$$K \supset \bigcap_{G_l^* \supset K} G_l^*,$$

所以

$$K = \bigcap_{G_l^* \supset K} G_l^* = \bigcap_{G_l^* \supset K} \overline{G^*}.$$

令 $\Gamma^* = \{l : G_l^* \supset K\}$, $r_1 = \min\{l : l \in \Gamma^*\}$, $r_n = \min\{l > r_{n-1} : l \in \Gamma^*\}$, $G_1 = G_{r_1}^*$, $G_n = \bigcap_{s=1}^{n} G_s^*$, 则 $\{G_n : n \geqslant 1\}$ 即为所求. 定理 4.2 得证.

定理4.3 满足(T_2)的拓扑空间中的任一紧集必为闭集.

证 由定理4.2及单点集是紧集可知定理4.3成立.

定理4.4 满足(T_2)及(D_1)的拓扑空间中的任意一个列紧集必为闭集.

证 假设A为列紧集但不闭,故有$A\neq\overline{A}$.所以存在$x\in\overline{A}$,$x\notin A$,从而A中有点列$\{x_n\}$收敛于x.由于(D_1)成立,由A为列紧集推知A满足条件(甲).故$\{x_n\}$中有子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于$y\in A$.这说明$\{x_n\}$收敛到两个不同的极限x与y.由命题4.2(1),此为不可能.定理4.4得证.

定理4.5 满足(T_2)的拓扑空间中的子集A是紧囿的充要条件为$\overline{A}$是紧集(或A是相对紧集).

证 充分性是显然的.下证必要性.设$A\subset K$, K是紧集.由定理4.3知K是闭集,所以$\overline{A}\subset K$.再用命题3.8 (3) 知$\overline{A}$是紧集.必要性得证.

定理4.6 设$(\Omega,\mathscr{T})$为拓扑空间,$(A,A\cap\mathscr{T})$是其子空间,则$K\subset A$关于子空间紧的充要条件是K关于原拓扑空间紧.

证 必要性.设K关于子空间紧.任给$\Sigma\subset\mathscr{T}$, Σ是K的开覆盖,则$A\cap\Sigma$亦构成K的开覆盖(关于子空间).所以存在$\Sigma_1\subset\mathscr{T}$, Σ_1有限,$A\cap\Sigma_1$亦为K的开覆盖(关于子空间).显然Σ_1亦为K的开覆盖(关于原空间),此即K是原空间中之紧子集.

充分性.设K关于原空间是紧集.任给K的关于子空间的一个开覆盖$A\cap\Sigma$ ($\Sigma\subset\mathscr{T}$),则Σ亦为K的一个开覆盖(关于原空间),所以必存在有限的$\Sigma_1\subset\Sigma$, Σ_1亦为K的开覆盖(关于原空间),从而$A\cap\Sigma_1$是K的一个有限子覆盖(关于子空间),故K关于子空间是紧集.

附注4.1 按照定义3.7,若拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$是否具有性质π已有定义,$A\subset\Omega$,则A具有性质π定义为子空间$(A,A\cap\mathscr{T})$具有性质π.因此由定理4.6,我们有

命题4.3 对拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中的子集A而言,下列5种陈述等价:

(1) A是$(\Omega,\mathscr{T})$中的局部紧子集;

(2) $(A,A\cap\mathscr{T})$是局部紧空间;

(3) 任取$x\in A$,存在x的一个紧围邻域(关于子空间);

(4) 任取$x\in A$,存在子空间中的紧集K及x的开邻域$A\cap G$, $G\in\mathscr{T}$,使$x\in A\cap G\subset K\subset A$;

(5) 任取$x\in A$,存在原空间中之紧集$K\subset A$, $G\in\mathscr{T}$,使

$$x\in A\cap G\subset K\subset A.$$

证 由局部紧的定义及定理4.6即得命题4.3.

命题4.4 设拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$满足(T_2), $A\subset\Omega$.则A是局部紧的充要条件是:对任何$x\in A$,存在$G\in\mathscr{T}$, $x\in G$,使$A\cap\overline{(AG)}$是紧集.

证 由命题4.3中(1)与(3)等价及定理4.5即得命题4.4.

由命题4.4,我们可以看出"局部紧"没有"遗传性".例子如下:

例4.1 取$\Omega=[0,1]$, $\mathscr{T}$是通常的欧氏拓扑.令$A=[0,1]$中的无理数集.显然$(\Omega,\mathscr{T})$是满足(T_2)的紧(更是局部紧)空间.但$(A,A\cap\mathscr{T})$不是局部紧的.事实上,假设它是局部紧的,用命题4.4,对任意的$x\in A$,必存在开区间I,使$A\cap\overline{(AI)}$是紧集,$x\in I$.但是$\overline{(AI)}=\bar{I}$,故$A\cap\bar{I}$是紧集.此为不可能.所以A不是局部紧的.这说明"局部紧"没有"遗传性".

定理4.7 满足(T_2)的紧拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$的开集是局部紧的.

证 设$A\in\mathscr{T}$为开集,$x\in A$,则$\{x\}$与A^c是两个不交的紧集,从而由定理4.1得知存在2个不交的开集G_1和G_2使$x\in G_1$, $A^c\subset G_2$.所以由命题1.3 (10)有

$$\varnothing=G_1G_2=\overline{(G_1G_2)}=\overline{(\overline{G_1}G_2)}\supset\overline{G_1}A^c,$$

更有

$$\overline{G_1} \subset A.$$

又因为满足(T_2)的紧拓扑空间中的闭子集必为紧集,故$\overline{G_1}$是原空间之紧子集,再用定理4.6及$\overline{G_1} \subset A$可知$\overline{G_1}$也是子空间$(A, A \cap \mathscr{T})$的紧子集.这就证明了A中任一点x皆有一个紧囿邻域G_1,此即A是局部紧的.

定理4.8 设$(\Omega, \mathscr{T})$是局部紧的具有可数基的(T_2)空间,则Ω的任一闭子集F均可表示为可数个紧集之并,特别地,Ω可表示为可数个紧集之并.

证 因为Ω是局部紧的,所以由命题3.9知:全体紧囿开集$\Sigma_c \triangleq \{G(x): x \in \Gamma\}$构成$\Omega$的一组基.而$\Omega$又有可数基$\Sigma \triangleq \{G_1, G_2, \cdots\}$,所以$\Omega = \bigcup\limits_{x \in \Gamma} G(x) = \bigcup\limits_{x \in \Gamma} \bigcup\limits_{i \in D_x} G_i$,其中$D_x \subset \{1, 2, \cdots\}$.注意:$i \in D_x$时$G_i$是紧囿的(因为$G_i \subset G_x$,$G_x$是紧囿的),记

$$\bigcup_{x \in \Gamma} \bigcup_{i \in D_x} G_i = \{G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots\},$$

则Ω可表示为可数个紧囿开集之并,更可表示为可数个紧集之并:

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n, \quad K_n \text{ 是紧集}.$$

又因为(T_2)空间中之紧集必闭且紧集之闭子集亦紧,所以FK_n是紧集且

$$F = F\Omega = \bigcup_{n \geq 1} FK_n.$$

定理4.8得证.

下面讨论另一种方式的单点紧化.

给定拓扑空间$(\Omega, \mathscr{T})$,任给一符号$x^* \overline{\in} \Omega$,令$\mathscr{F}$为$(\Omega, \mathscr{T})$的全体闭紧集,$\Omega^* = \Omega \cup \{x^*\}$,$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \{K^c \cup \{x^*\}: K \in \mathscr{F}, K^c = \Omega - K\}$,则$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$是紧拓扑空间.

证 由定义即知$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$是拓扑空间.下证$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$是紧

的.设

$$\Sigma_1 = \{G_x : x \in \Gamma_1\},$$

$$\Sigma_2 = \{K_y^c \cup \{x^*\} : y \in \Gamma_2\},$$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是 Ω^* 的一个开覆盖.

显然 Σ_2 不空(否则 $x^* \overline{\in} \Omega^*$),任取 Σ_2 中一个元素 $K_{y_0}^c \cup \{x^*\}$.

由于

$$\begin{aligned}\Omega^* &= \Big(\bigcup_{x\in\Gamma_1} G_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{y\in\Gamma_2\\ y\neq y_0}} (K_y^c \cup \{x^*\})\Big) \cup (K_{y_0}^c \cup \{x^*\}) \\ &= \Big(\bigcup_{x\in\Gamma_1} G_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{y\in\Gamma_2\\ y\neq y_0}} K_y^c\Big) \cup (K_{y_0}^c \cup \{x^*\}),\end{aligned}$$

所以

$$\Omega = \Big(\bigcup_{x\in\Gamma_1} G_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{y\in\Gamma_2} K_y^c\Big),$$

从而

$$K_{y_0} = K_{y_0}\Omega \subset \Big(\bigcup_{x\in\Gamma_1} G_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{y\in\Gamma_2-\{y_0\}} K_y^c\Big).$$

但是,K_{y_0} 是 Ω 的闭紧子集,所以

$$\Big(\bigcup_{x\in\Gamma_1} G_x\Big) \cup \Big(\bigcup_{y\in\Gamma_2-\{y_0\}} K_y^c\Big)$$

中有 K_{y_0} 的一个有限子覆盖 Σ_3. 于是 $\Sigma_3 \cup \{K_{y_0}^c \cup \{x^*\}\}$ 是 Ω^* 的一个有限子覆盖,所以$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$ 是紧的.

定理 4.9　设$(\Omega,\mathscr{T})$ 是(T_2) 空间. 则上述单点紧化空间$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 仍为(T_2) 空间的充要条件是:$(\Omega,\mathscr{T})$ 是局部紧的.

证　必要性. 因为 Ω 是$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 的开集,由定理 4.7 知$(\Omega,\mathscr{T})$ 是局部紧的.

充分性. 假设$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 不是(T_2) 空间,则必存在 $x \in \Omega$ 与 x^* 不能隔离(因为 Ω 中的任意两点 x 与 y 均能隔离). 但对任何 $x \in \Omega$, 均存在开集 G 与紧集 K (K 亦闭,因为$(\Omega,\mathscr{T})$ 是(T_2) 空间)使 $x \in G \subset K$. 又 $x^* \in K^c \cup \{x^*\}$, G 与 $K^c \cup \{x^*\}$ 是$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 中 2 个不交的开集,此即 x 与 x^* 能隔离,矛盾. 充分性得证.

§5 映 射

定义 5.1 设 $(\Omega,\mathscr{T})$, $(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 是 2 个拓扑空间, $f: \Omega \mapsto \Omega^*$. 称 **$f$ 在点 $x\in\Omega$ 上连续**,如果对 $f(x)$ 的任一邻域 G^*,均存在 x 的一个邻域 G,使 $f(G)\subset G^*$.

此处及以后, $f(G)$ 恒表示 f 在集合 G 上的像集 $\{f(x): x\in G\}$, $f^{-1}(G^*)\triangleq\{x: f(x)\in G^*\}$ 表示 G^* 的逆像集.

注意:定义5.1中的邻域 G 与 G^* (1个或2个)可改为基邻域.定义出的连续性是等价的.

如果 f 在 Ω 中每一点 x 均连续,则称 **f 在 Ω 上连续**,简称 **f 连续**.

定理 5.1 f 在 x 连续的必要条件是:

$$x_n\to x \Longrightarrow f(x_n)\to f(x). \tag{5.1}$$

特别地,若 $(\Omega,\mathscr{T})$ 还满足 (D_1),则(5.1)还是 f 在 x 连续的充分条件.

证 必要性.任给 $f(x)$ 的一个邻域 G^*,由于 f 在 x 连续,所以必存在 x 的一个邻域 G,使 $f(G)\subset G^*$.又因为 $x_n\to x$,所以 G 必包含 $\{x_n\}$ 中几乎一切项,从而 G^* 必包含 $\{f(x_n)\}$ 中的几乎一切项,此即 $f(x_n)\to f(x)$.

充分性.设 $(\Omega,\mathscr{T})$ 满足 (D_1) 且(5.1)成立.假设 f 在 x 不连续,则存在 $f(x)$ 的一个邻域 G^*,使 x 的任一邻域 G,均不能满足 $f(G)\subset G^*$.又因为 (D_1) 成立,故可令 $\mathscr{D}_x=\{U_1,U_2,\cdots\}$ 为 (D_1) 定义中之 x 的可数邻域系.由于 $\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ 是 x 的邻域,故存在 $x_n\in\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ 使 $f(x_n)\overline{\in} G^*$ $(n=1,2,\cdots)$.所以 $f(x_n)\not\to f(x)$.由 $\mathscr{D}_x=\{U_1,U_2,\cdots\}$ 的定义可知对 x 的任一邻域 $G(x)$,均存在 $U_{n_0}\subset G(x)$.所以 $x_n\in\bigcap_{i=1}^{n}U_i\subset U_{n_0}\subset G(x)$ (当 $n\geqslant n_0$ 时),

此即 $x_n \to x$. 于是(5.1)不成立，矛盾，充分性得证.

定理 5.2　设 $(\Omega,\mathscr{T})$ 和 $(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 皆为拓扑空间，$f: \Omega \mapsto \Omega^*$. 则下列陈述等价：

(1)　f 在 Ω 上连续；

(2)　$f^{-1}(\mathscr{T}^*) \subset \mathscr{T}$；

(3)　$f^{-1}(\mathscr{F}^*) \subset \mathscr{F}$，其中 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中闭集族，$\mathscr{F}^*$ 是 Ω^* 中闭集族；

(4)　$f(\overline{A}) \subset \overline{(f(A))}$　$(\forall A \subset \Omega)$；

(5)　$f^{-1}(\overline{A^*}) \supset \overline{(f^{-1}(A^*))}$　$(\forall A^* \subset \Omega^*)$.

证　(1)$\Longrightarrow$(2). 设 f 在 Ω 上连续，任取开集 $G^* \in \mathscr{T}^*$，推证 $f^{-1}(G^*) \in \mathscr{T}$. 任取 $x \in f^{-1}(G^*)$，则由 $f(x) \in G^*$ 及 f 在 x 连续可知存在 Ω 中之开集 G 使 $x \in G$ 且 $f(G) \subset G^*$，因而 $G \subset f^{-1}(G^*)$，所以 $f^{-1}(G^*)$ 是开集. 故(1)$\Longrightarrow$(2).

(2)$\Longrightarrow$(3). 任取 Ω^* 中之闭集 F，由(2)成立可知 $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c) \in \mathscr{T}$，此即 $f^{-1}(F)$ 是 Ω 中之闭集. (2)$\Longrightarrow$(3)得证.

(3)$\Longrightarrow$(4). 任取 $A \subset \Omega$. 令 $A^* = f(A)$. 由(3)成立可知 $f^{-1}(\overline{A^*})$ 是 Ω 中之闭集且 $A \subset f^{-1}(A^*) \subset f^{-1}(\overline{A^*})$，所以 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{A^*})$，从而 $f(\overline{A}) \subset \overline{A^*} = \overline{f(A)}$. (3)$\Longrightarrow$(4)得证.

(4)$\Longrightarrow$(5). 设(4)成立. 令 $\overline{A^*} = F^*$，$H = f^{-1}(F^*)$. 推证 H 是闭集. 事实上，由(4)有

$$f(\overline{H}) \subset \overline{f(H)},$$

所以

$$\overline{H} \subset f^{-1}(\overline{f(H)}) \subset f^{-1}(\overline{F^*}) = f^{-1}(F^*) = H.$$

此即 H 是闭集. 又

$$f^{-1}(\overline{A^*}) = H \supset f^{-1}(A^*),$$

所以(5)成立.

(5)$\Longrightarrow$(1). 设(5)成立. 取 $A^* = F^*$ 是闭集，则由(5)有 $f^{-1}(F^*) \supset \overline{(f^{-1}(F^*))}$，此即 $f^{-1}(F^*)$ 是闭集，从而对任何开集 G^*，$f^{-1}(G^*)$ 是开集.

任取 $x \in \Omega$ 及 $f(x)$ 的任一邻域 G^*. 由上述论证知 $f^{-1}(G^*)$ 是 x 的一个邻域且 $f(f^{-1}(G^*)) \subset G^*$, 此即 f 在 x 连续. (5)$\Longrightarrow$(1) 得证.

定理 5.3 设$(\Omega,\mathscr{T})$为任一拓扑空间,$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$为(T_2)空间,$f:\Omega \mapsto \Omega^*$, $g:\Omega \mapsto \Omega^*$, f 和 g 都连续,则 $\{x \in \Omega: f(x) = g(x)\}$ 是闭集.

证 令 $H = \{x \in \Omega: f(x) \neq g(x)\}$. 任给 $x_0 \in H$,由于 $f(x_0) \neq g(x_0)$, $(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$是(T_2)空间,所以必有不交的开集 G_1^* 和 G_2^* 使 $f(x_0) \in G_1^*$, $g(x_0) \in G_2^*$. 再令 $G = f^{-1}(G_1^*) g^{-1}(G_2^*)$, 则 G 是 x_0 的一个邻域,而且满足:

$$x \in G \Longrightarrow f(x) \in G_1^*,\ g(x) \in G_2^* \Longrightarrow f(x) \neq g(x) \Longrightarrow x \in H.$$

所以 H 是开集. 定理 5.3 得证.

系 5.1 在定理5.3的条件下,若 f 和 g 在 A 上相等,则 f 和 g 在 $\overline{A}$ 上相等.

系 5.2 在定理5.3的条件下,任一连续映射由它在任一稠密集上的值所唯一决定.

命题 5.1 设$(\Omega,\mathscr{T})$和$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$为拓扑空间,$f:\Omega \mapsto \Omega^*$, f 连续.

(1) 若 A 在 Ω 中稠密,则 $f(A)$ 在 Ω^* 中稠密.

(2) 若 Ω 是紧的(或列紧,或满足(甲),或满足(L)),则 $f(\Omega)$ 亦然.

(3) 若 Ω 是紧的且$(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$是(T_2)空间,则对任何闭集 F, $f(F)$ 是闭紧集. 进一步,若 f 是一对一的映射,则 $f^{-1}: f(\Omega) \mapsto \Omega$ 是连续的.(即 f 是拓扑映射.)

证明甚易,留给读者自证.

定义 5.2 称拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$是**正规空间**,如果对任何两个不交的闭集 F_1 与 F_2,均存在两个不交的开集 G_1 与 G_2,使

$$G_1 \supset F_1, \quad G_2 \supset F_2.$$

命题 5.2 紧的(T_2)空间$(\Omega, \mathscr{T})$是正规空间.

证明甚易,从略.

定理 5.4(Urysohn) 设 F_1 与 F_2 是正规空间$(\Omega, \mathscr{T})$中的 2 个不交闭集,则存在由 Ω 到 $\mathbf{R}$(实空间)的连续映射 f,满足:$0 \leqslant f \leqslant 1$ 且

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in F_1, \\ 1, & \text{当 } x \in F_2. \end{cases}$$

通常称 f 为 F_1 与 F_2 的**隔离函数**.

证 令 $Q = \left\{ \dfrac{k}{2^n} : 0 \leqslant k \leqslant 2^n,\ n \geqslant 1 \right\}$. 推证任取 $r \in Q$,存在开集 $U(r) \subset \Omega$ 使

(1) $F_1 \subset U(r)$, $U(r) \cap F_2 = \varnothing$;

(2) $r < r' \Longrightarrow \overline{U(r)} \subset U(r')$.

令 $U(1) = \Omega - F_2$, $U(0)$ 是满足下列条件之开集:

$$F_1 \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset \Omega - F_2$$

(由 Ω 是正规空间,$U(0)$ 必存在).取

$$D_0 = \{U(0), U(1)\} \quad (U(0), U(1) \text{ 是满足(1)和(2)的}).$$

令

$$D_m = \left\{ U\left(\frac{k}{2^m}\right) : U\left(\frac{k}{2^m}\right) \text{满足(1)和(2)},\ k = 0, 1, \cdots, 2^m \right\}.$$

设 D_{m-1} 已定义,归纳地定义 D_m,我们只需对 k 是奇数来定义 $U\left(\dfrac{k}{2^m}\right)$即可(因为 $k = 2i$ 为偶数时,$U\left(\dfrac{2i}{2^m}\right) = U\left(\dfrac{i}{2^{m-1}}\right)$在 D_{m-1} 中已定义了).设 k 为奇数,则由 D_{m-1} 的定义及 $U(r)$ 满足(2)可知:

$$\overline{U((k-1)/2^m)} \subset U((k+1)/2^m).$$

因此我们定义 $U\left(\frac{k}{2^m}\right)$为满足下列条件之开集：

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^m}\right)} \subset U\left(\frac{k}{2^m}\right) \subset \overline{U\left(\frac{k}{2^m}\right)} \subset U\left(\frac{k+1}{2^m}\right).$$

则 D_m 中之开集已全部定义. 记

$$D = \bigcup_{m \geqslant 0} D_m .$$

定义

$$f(x) \triangleq \inf\{r \in Q : x \in U(r)\}, \quad \inf \varnothing \triangleq 1.$$

显然 $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(x) = 1\ (x \in F_2)$, $f(x) = 0\ (x \in F_1)$. 最后证明 f 是连续映射. 任取 $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) = r_0$. 任取 $\varepsilon > 0$, 令 $I = (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$. 如果 $r_0 \neq 0$ 或 1, 取 $s, t \in Q$ 使

$$r_0 - \varepsilon < s < r_0 < t < r_0 + \varepsilon,$$

则 $U \triangleq U(t) - \overline{U(s)}$ 是 x_0 的一个邻域且 $f(U) \subset I$ (因为"$x \in U(t) \Longrightarrow f(x) \leqslant t$", 而"$x \overline{\in} \overline{U(s)} \Longrightarrow f(x) \geqslant s$"). 故 f 在 x_0 连续. 如果 $r_0 = 0$ 或 1, 易证 f 在 x_0 亦连续. 定理证毕.

定理 5.5 若$(\Omega, \mathscr{T})$是局部紧的(T_2)空间, 则对其中任一紧集 K 与闭集 F, 只要 $KF = \varnothing$, F 与 K 就有隔离函数.

证 考虑$(\Omega, \mathscr{T})$的单点紧化空间$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$, $x^* \in \Omega^* - \Omega$. 显然 K 与 $F \cup \{x^*\}$ 是紧的(T_2)空间$(\Omega^*, \mathscr{T}^*)$中的不交闭集, 由命题 5.2 及定理 5.4 得知 K 与$\{x^*\} \cup F$ 有隔离函数 f^*. 取 f 为 f^* 在 Ω 上的局限, 则 f 是 K 与 F 的隔离函数.

定理 5.6 设$(\Omega, \mathscr{T})$是局部紧的(T_2)空间, K 是紧集, G 是开集, 且 $K \subset G$, 则存在一个紧的 G_δ 型集 K_0 及开集 G_0 使

$$K \subset G_0 \subset K_0 \subset G.$$

证 取紧囿集 $G_1 \supset K$(于是 $K \subset G_1 G$), 故 $K \cap (GG_1)^c = \varnothing$, 而 K 是紧集, $(GG_1)^c$ 是闭集, 故由定理 5.5 得知 K 与$(GG_1)^c$ 有一隔离函数 f, 使 $f = 0$ (在 K 上), $f = 1$ (在$(GG_1)^c$ 上). 令

$$G_0 = \left\{x : f(x) < \frac{1}{2}\right\}, \quad K_0 = \left\{x : f(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

则 $K \subset G_0 \subset K_0 \subset GG_1 \subset G$. 显然 G_0 是开集,K_0 是闭集,且 $K_0 \subset G_1$, G_1 是紧囿集,所以 K_0 是紧集. 又

$$K_0 = \bigcap_{n \geqslant 1}\left\{x : f(x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right\},$$

因此,K_0 是 G_δ 型集.

系 5.3　在定理 5.6 的条件下,若存在紧集列 $\{K_n\}$ 单调上升到开集 G,则存在另一单调上升紧集列 $\{\widetilde{K}_n\}$,使 $\widetilde{K}_n \subset \widetilde{K}_{n+1}^{\circ}$, $\widetilde{K}_n \uparrow G$.

证　因为 $K_1 \subset G$,所以由定理 5.6 得知存在开集 G_0 及紧集 K_0 使 $K_1 \subset G_0 \subset K_0 \subset G$. 取 $\widetilde{K}_1 = K_1$, $\widetilde{K}_2 = K_0$,则 $\widetilde{K}_2^{\circ} \supset K_0 \supset K_1 = \widetilde{K}_1$. 用归纳法可证系 5.3.

系 5.4　设 $(\Omega, \mathscr{T})$ 是局部紧的具有可数基的 (T_2) 空间,则存在紧集列 $\{K_n\}$ 使

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n, \; K_n \subset K_{n+1}^{\circ} \quad (n \geqslant 1).$$

证　显然,存在紧集列 $\{K_n^*\}$ 使 $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n^*$,再用系 5.3 即可得系 5.4.

§6　度 量 空 间

定义 6.1　设 Ω 为任一集合,如果存在一个由 $\Omega \times \Omega$ 到 $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 的映射 $\rho(\cdot, \cdot)$ 满足:

(1)　$\rho(x, y) = \rho(y, x) \; (\forall x, y \in \Omega)$;

(2)　$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \; (\forall x, y, z \in \Omega)$;

(3)　$\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

则称 (Ω, ρ) 为**度量空间**(或**距离空间**),称 ρ 为 Ω 上的一个**度量**(或**距离**).

对任何 $x \in \Omega$, $A, B \subset \Omega$, $\varepsilon > 0$,定义:

$\rho(x, A) \triangleq \inf\{\rho(x, y): y \in A\}$ 为 x 至 A 的距离;

$\rho(A, B) \triangleq \inf\{\rho(x, y): x \in A, y \in B\}$ 为 A 与 B 之间的距离;

$\operatorname{diam}(A) \triangleq \sup\{\rho(x, y): x \in A, y \in A\}$ 为 A 的**直径**,直径有限的集合称为**有界集**;

$B(x, \varepsilon) \triangleq \{y: \rho(x, y) < \varepsilon\}$ 为以 x 为中心、以 ε 为半径之**开球**;

$\bar{B}(x, \varepsilon) \triangleq \{y: \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ 为以 x 为中心、以 ε 为半径之**闭球**;

$B(A, \varepsilon) \triangleq \{x: \rho(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$;

$\bar{B}(A, \varepsilon) \triangleq \{x: \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\} = \bigcup_{x \in A} \bar{B}(x, \varepsilon)$.

命题 6.1 对度量空间 (Ω, ρ) 中的任何 $x, y, u, v \in \Omega$, $A, B \subset \Omega$,总有

(1) $|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leqslant \rho(x, u) + \rho(y, v)$;

(2) $\rho(A, B) \leqslant \rho(x, A) + \rho(x, B)$;

(3) $|\rho(x, A) - \rho(y, B)| \leqslant \rho(x, y)$.

证明甚易,从略.

命题 6.2 对任一度量空间 (Ω, ρ) 而言, $\Sigma \triangleq \{B(x, \varepsilon): \varepsilon > 0, x \in \Omega\}$ 构成一个开基.

证明甚易,从略.

注 6.1 由此开基 Σ 产生的拓扑 $S(\Sigma)$ 称为由度量 ρ 产生的度量拓扑. 自此以下至本节末,均在此拓扑下讨论问题($S(\Sigma)$ 的定义见定义 3.5).

定理 6.1 对任一度量空间 (Ω, ρ) 而言,恒有:

(1) $B(x, \varepsilon), B(A, \varepsilon)$ 是开集;

(2) $(\Omega, \mathscr{T} = S(\Sigma))$ 满足(T_2) 和(D_1);

(3) $\rho(\bar{A}, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, B) = \rho(A, \bar{B})$;

(4)　$B(\bar{A},\varepsilon)=B(A,\varepsilon)$;

(5)　$x\in\bar{A}\Longleftrightarrow\rho(x,A)=0$;

(6)　$\varepsilon_n\downarrow 0\Longrightarrow\bigcap_{n\geq 1}B(A,\varepsilon_n)=\bar{A}$;

(7)　$\rho(x,A)$ 是 x 的连续函数;

(8)　$\bar{B}(x,\varepsilon),\bar{B}(A,\varepsilon)$ 是闭集;

(9)　$\bar{B}(\bar{A},\varepsilon)=\bar{B}(A,\varepsilon)$;

(10)　$0<r<s\Longrightarrow\bar{B}(A,r)\subset\bar{B}(A,s)$;

(11)　$\varepsilon_n\downarrow 0\Longrightarrow\bigcap_{n\geq 1}\bar{B}(A,\varepsilon_n)=\bar{A}$;

(12)　$\bar{B}(A,\varepsilon)\supset\overline{(B(A,\varepsilon))}\supset\bigcup_{x\in A}\overline{(B(x,\varepsilon))}$;

(注意 $\bar{B}(A,\varepsilon)\subset\overline{(B(A,\varepsilon))}$ 一般不成立,反例如下:取 $\rho(x,y)=0$ 或 1 由 $x=y$ 和 $x\neq y$ 而定,则 $\bar{B}(x,1)=\Omega$,但 $\overline{(B(x,1))}=\overline{\{x\}}=\{x\}$.)

(13)　若 ρ 满足:“$a>0,\ b>0,\ a+b>\rho(x,y)\Longrightarrow B(x,a)\cap B(y,b)\neq\varnothing$”,则 $\bar{B}(A,\varepsilon)=\overline{(B(A,\varepsilon))}$;

(14)　$\mathrm{diam}(\bar{A})=\mathrm{diam}(A)$.

证明甚易,从略.

定理 6.2　任一度量空间 (Ω,ρ) 都是正规空间.

证　设闭集 F_1 与 F_2 不交. 令 $G_1=\{x:\rho(x,F_1)-\rho(x,F_2)<0\}$, $G_2=\{x:\rho(x,F_1)-\rho(x,F_2)>0\}$,则 $G_i\supset F_i$,且 $G_1G_2=\varnothing$. 定理证毕.

注意:$f(x)=\rho(x,F_1)/(\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2))$ 是 F_1 与 F_2 的隔离函数.

定理 6.3　对任何度量空间 (Ω,ρ) 而言,下列 5 种陈述等价:

(1)　可分性,即具有可数的稠子集;

(2)　(D_2);

(3)　(L) 条件;

(4)　任给 $\varepsilon>0$,存在可数集 D,使 $\Omega=\bigcup_{x\in D}B(x,\varepsilon)$;

(5)　任给 $\varepsilon>0$, 存在集列 $\{M_n\}$, 满足: $\mathrm{diam}(M_n)<\varepsilon$

$(\forall n \geqslant 1)$, $\bigcup_{n\geqslant 1} M_n = \Omega$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 D 为 Ω 的可数稠子集, 推证 $\Sigma \triangleq \left\{B\left(y,\frac{1}{n}\right): y \in D,\ n \geqslant 1\right\}$是基.任给 $\varepsilon > 0$ 及 $x \in \Omega$,取正整数 $N > \frac{2}{\varepsilon}$,再取 $y \in D$,使 $\rho(x,y) < \frac{1}{N}$,于是 $x \in B\left(y,\frac{1}{N}\right) \subset B(x,\varepsilon)$.故 Σ 是(Ω,ρ) 的可数基.

(2)$\Longrightarrow$(3).前面已证过.

(3)$\Longrightarrow$(4).设(3) 成立.从 $\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} B(x,\varepsilon)$ 及(3) 即得(4).

(4)$\Longrightarrow$(5).设(4) 成立.任给 $\varepsilon > 0$,由(4) 得知存在可数集 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 使

$$\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

取 $M_n = B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$即为所求.

(5)$\Longrightarrow$(1).由(5) 可知:对于每一个正整数 m,存在集列 $\{M_n^{(m)}: n = 1,2,\cdots\}$ 满足:

$$\operatorname{diam}(M_n^{(m)}) < \frac{1}{m},\ \Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} M_n^{(m)} \quad (m \geqslant 1).$$

现从每个 $M_n^{(m)}$ 中任取一点$x_n^{(m)}$,推证$\{x_n^{(m)}: m = 1,2,\cdots;\ n = 1, 2,\cdots\}$ 为 Ω 的可数稠子集.事实上,任给 $x \in \Omega$ 及$\varepsilon > 0$,取正整数 $m_0 > \frac{1}{\varepsilon}$,由于 $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} M_n^{(m_0)}$,故存在 n_0,使 $x \in M_{n_0}^{(m_0)}$.于是

$$\rho\left(x, x_{n_0}^{(m_0)}\right) \leqslant \operatorname{diam}\left(M_{n_0}^{(m_0)}\right) < \frac{1}{m_0} < \varepsilon.$$

故$\{x_n^{(m)}: m = 1,2,\cdots;\ n = 1,2,\cdots\}$ 是 Ω 的一个可数稠子集.

定义6.2 称度量空间(Ω,ρ)中的点列$\{x_n\}$是**Cauchy列**,如果 $\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$.称$(\Omega,\rho)$是**完备的**,如果其中任一 Cauchy 列均有极限.

定义 6.3　称度量空间(Ω,ρ)是**全囿的**,如果对任给 $\varepsilon>0$,存在有限个集合 $M_1,\cdots,M_n$,使 $\mathrm{diam}(M_i)<\varepsilon\ (i=1,\cdots,n)$,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}M_i=\Omega$.称$\{M_1,\cdots,M_n\}$为 Ω 的一个 **ε-网**.

注意:全囿性 $\Longrightarrow$ 可分性.

定理 6.4　对任一度量空间(Ω,ρ)而言,下列三条件等价:

(1)　全囿性;

(2)　凡点列皆有 Cauchy 子列;

(3)　任给 $\varepsilon>0$,存在有限集 J,使 $\Omega=\bigcup\limits_{x\in J}B(x,\varepsilon)$.

证　(1)$\Longrightarrow$(2). 设(1)成立. 任给正整数 m,存在$\frac{1}{m}$-网$\{M_1^{(m)},\cdots,M_{n_m}^{(m)}\}$. 给定点列$\{x_n\}$,$\{M_1^{(1)},\cdots,M_{n_1}^{(1)}\}$中至少有一个集合含有$\{x_n\}$中无穷多项,记此集合为 A_1. 又$\{A_1M_1^{(2)},\cdots,A_1M_{n_2}^{(2)}\}$中至少有一个集合含有$\{x_n\}$中无穷多项,记此集合为 A_2. 如此继续下去,得一列集合$\{A_n:n=1,2,\cdots\}$满足:$A_1\supset A_2\supset\cdots$,$\mathrm{diam}(A_n)<\frac{1}{n}$,$A_n$ 包含$\{x_n\}$中无穷多项. 于是有 $x_{m_n}\in A_n(n=1,2,\cdots)$,当 $m_n\leqslant m_k$ 时有 $\rho\left(x_{m_n},x_{m_k}\right)\leqslant\frac{1}{k}$. 故$\{x_{m_n}:n\geqslant 1\}$是一个 Cauchy 子列.

(2)$\Longrightarrow$(3). 设(3)不成立. 则存在一个 $\varepsilon_0>0$,使得对任何有限集 J,都不能满足 $\bigcup\limits_{x\in J}B(x,\varepsilon_0)=\Omega$. 于是$\{x_n\}$中至少有两项不在同一个 $B(x,\varepsilon_0)$ 中,不妨令它们为 x_1 和 x_2. 于是 $\rho(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$. 由于 $B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)\neq\Omega$,故有 $x_3\in\Omega$ 满足 $x_3\overline{\in}B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)$,即 $\rho(x_1,x_3)\geqslant\varepsilon_0$,$\rho(x_2,x_3)\geqslant\varepsilon_0$. 仿此下去,存在$\{x_n\}$使 $\rho(x_n,x_{n+1})\geqslant\varepsilon_0$. 于是$\{x_n\}$无 Cauchy 子列. 故(2)不成立.

(3)$\Longrightarrow$(1). 设(3)成立,则任给 $\varepsilon>0$,存在$\{x_1,\cdots,x_n\}$,使

$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) = \Omega$. 取 $M_i = B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则 $\{M_1, \cdots, M_n\}$ 是一个 ϵ-网. 即(1) 成立.

定理 6.5 对任何度量空间(Ω, ρ),下列 3 个条件等价:

(1) 列紧;

(2) 全囿及完备性;

(3) 紧的.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 由于度量空间恒满足(D_1) 知列紧性蕴含(甲)(即每一点列均有收敛子列),故列紧性蕴含了:"每一点列皆有 Cauchy 子列". 再用定理 6.4 知列紧性蕴含了全囿性. 推证列紧性蕴含了完备性. 事实上,任给点列$\{x_n\}$,由列紧性得知$\{x_n\}$有收敛子列. 若$\{x_n\}$是 Cauchy 列,则$\{x_n\}$必收敛,完备性成立.

(2)$\Longrightarrow$(1). 任给点列$\{x_n\}$. 由全囿性知: 有 Cauchy 子列$\{x_{n_k}\}$. 再用完备性知$\{x_{n_k}\}$收敛. 所以(甲) 成立. 而度量空间恒满足(D_1),故由(甲) 和(D_1) 又可得列紧性.

(1)$\Longrightarrow$(3). 设列紧性成立,则全囿性亦成立,从而用定理 6.3 及定义 6.3 后之注可知(L) 条件成立. 而由命题 3.6 知(L) 和列紧性蕴含了紧性.

(3)$\Longrightarrow$(1) 是显然的.

注意:全囿性在欧氏空间中就是有界性.

定理 6.6 对任何度量空间(Ω, ρ),下列条件等价:

(1) 完备性;

(2) 任意非空的单调降的直径趋于 0 的闭集列$\{F_n\}$恒有非空交 $\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \varnothing$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设(1) 成立, 任取 $x_n \in F_n (n \geq 1)$, 由于$\{F_n\}$单调降且直径趋于 0 得知$\{x_n\}$是 Cauchy 列. 由完备性知 $x_n \to x$. 易证 $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$,此即(2) 成立.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设(Ω, ρ) 不完备,则存在一个不收敛的 Cauchy

列$\{x_n\}$.不失普遍性可设$\{x_n\}$项项相异.令$F_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ $(n \geqslant 1)$,由于F_n无收敛子列,所以F_n是闭集.显然F_n非空,单调降,且$\operatorname{diam}(F_n) \to 0$,但$\bigcap_{n\geqslant 1} F_n = \varnothing$,此即(2)不成立.

定理6.7　设(Ω, ρ)是完备度量空间,$G_n (n = 1, 2, \cdots)$为稠密开集,则$\bigcap_{n\geqslant 1} G_n$是稠密集(再用命题2.5知完备度量空间中之非空开集是第二纲集).

证　给定稠密开集列$\{G_n\}$,任取非空开集G,推证$G(\bigcap_{n\geqslant 1} G_n) \neq \varnothing$.(首先注意下述事实:任给$\varepsilon > 0$及非空开集$G$,均存在$\delta < \varepsilon$,及开球$B(x, \delta)$使$\overline{(B(x, \delta))} \subset G$.)

因为G_1稠密,所以$GG_1 \neq \varnothing$,故存在开球U_1,使$\overline{U_1} \subset GG_1$,$\operatorname{diam}(U_1) < 1$.又因为$G_2$稠密,所以$U_1 G_2 \neq \varnothing$,从而存在开球$U_2$使$\overline{U_2} \subset U_1 G_2 \subset GG_1 G_2$, $\operatorname{diam}(U_2) < \frac{1}{2}$.依此往下做,存在开球列$\{U_n\}$满足:

$$\overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \cdots,\ \operatorname{diam}(U_n^c) < \frac{1}{n},\ \overline{U_n} \subset GG_1 \cdots G_n.$$

因此,由定理6.6得知:

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{U_n} \neq \varnothing.$$

故

$$G \bigcap_{n\geqslant 1} G_n \neq \varnothing,$$

所以由命题2.2知$\bigcap_{n\geqslant 1} G_n$是稠密集.

定理6.8　设(Ω, ρ)是紧度量空间,(Ω^*, ρ^*)为度量空间,$f: \Omega \mapsto \Omega^*$,且$f$连续,则$f$一致连续,即

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\rho(x, y) \leqslant \varepsilon} \rho^*(f(x), f(y)) = 0.$$

证　与数学分析中(当Ω与Ω^*均为欧氏空间,ρ与ρ^*均为欧氏度量)的证法一样.在此从略.

定理6.9　设$(\Omega, \mathscr{T})$是拓扑空间,(Ω^*, ρ^*)是度量空间,f_n:

$\Omega \mapsto \Omega^*$，且 f_n 连续，若 $f_n(x) \to f(x)$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立，即

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \rho^*(f_n(x), f(x)) = 0,$$

则 f 连续.

证 任给 $x_0 \in \Omega$ 及 $\varepsilon > 0$，可取 n_0 使

$$\sup_{x\in\Omega} \rho^*(f_{n_0}(x) - f(x)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

且存在开集 $G \ni x_0$，使

$$\text{“}y \in G \Longrightarrow \rho^*(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}\text{”}.$$

于是

$$y \in G \Longrightarrow \rho^*(f(y), f(x_0)) \leqslant \rho^*(f(y), f_{n_0}(y)) + \rho^*(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x_0)) + \rho^*(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon.$$

此即 f 连续.

定义6.4 设 A 为度量空间 (Ω,ρ) 中一个子集. 称 A 是**全囿的**，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $M_1,\cdots,M_n$ 满足 $\mathrm{diam}(M_n) < \varepsilon$，$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = A$. 称 A 是**完备的**，如果对 A 中任一 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 均收敛于 A 中一点 x.

定理6.10 设 (Ω,ρ) 是一度量空间，$A \subset \Omega$. 把 ρ 局限到 $A \times A$ 上去得 ρ_A. 若 ρ 产生之拓扑空间为 $(\Omega, \mathscr{T})$，则 ρ_A 产生之拓扑空间为 $(A, A \cap \mathscr{T})$. 全囿性有“遗传性”，而“完备性”无遗传性.

证明甚易，从略.

定理6.11 对任何度量空间而言，完备集是闭集，任何完备度量空间中的闭子集是完备集.

证明甚易，从略.

定理6.12 设 ρ 及 ρ_1 是 Ω 上的2个度量. 下列两条件中之任一个都是 ρ 及 ρ_1 产生相同的拓扑的充要条件：

(1) 任给 $\varepsilon > 0$ 及 $x \in \Omega$，均存在 $\eta > 0$ 使 $B_\rho(x,\eta) \subset$

$B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$, $B_{\rho_1}(x,\eta)\subset B_\rho(x,\varepsilon)$,其中 $B_\rho(x,\eta)$ 表示由 ρ 产生之开球.

(2) $\rho(x_n,x)\to 0 \Longleftrightarrow \rho_1(x_n,x)\to 0$.

证 上述两条件中之任一个都是使恒等映射($f(x)\equiv x$, $f:(\Omega,\mathscr{T})\mapsto(\Omega,\mathscr{T}_1)$, $\mathscr{T}$与 $\mathscr{T}_1$ 分别为由 ρ 及ρ_1 所产生的拓扑)为拓扑映射的充要条件.

定理 6.13(可度量化) 任何局部紧的具有可数基的(T_2)空间($\Omega,\mathscr{T}$)均可度量化,即是:可以在 Ω 上引进度量ρ,使 ρ 产生的拓扑就是 $\mathscr{T}$.

证明参见[35].

作为这一节的结束,我们介绍一个重要的度量空间——Hausdorff 度量空间.

设(E,ρ)是完备可分度量空间,$\mathscr{K}(E)$ 是 E 的非空紧子集全体.对任何

$$f:E\to E,$$

定义 f 的 Lipschitz 系数为

$$\mathrm{Lip}(f)\triangleq\sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}}\frac{\rho(f(x),f(y))}{\rho(x,y)}.$$

对任何 $A,B\subset E$, $\varepsilon>0$,定义 A 的"ε 加边集"A_ε 为

$$A_\varepsilon\triangleq\{x\in E:\rho(x,A)<\varepsilon\}.$$

显然 $A\subset A_\varepsilon$.定义

$$\eta(A,B)\triangleq\sup\{\rho(x,A),\rho(y,B):x\in B,\ y\in A\}.$$

命题 6.3 对上面定义的 $\mathrm{Lip}(\cdot)$,A_ε 和 η 来说,只要$\{A,B,A_i,B_i,\bigcup_i A_i,\bigcup_i B_i\}\subset\mathscr{K}(E)$,就有

(1) η 是 $\mathscr{K}(E)$ 上的一个度量;

(2) $\eta(A,B)<\varepsilon$ 当且仅当 $A\subset B_\varepsilon$ 且 $B\subset A_\varepsilon$;

(3) $\eta(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset B_\varepsilon$ 且 $B\subset A_\varepsilon\}$;

(4) $\eta(f(A),f(B))\leqslant\mathrm{Lip}(f)\eta(A,B)$;

(5) $\eta(\bigcup_{i\in\Gamma}A_i, \bigcup_{i\in\Gamma}B_i)\leqslant \sup_{i\in\Gamma}\eta(A_i,B_i)$，其中 Γ 是任一指标集.

证 (1)和(2)是显然的(由定义即可验证).(3)可由(2)立即推得.(4)可由定义立即推得.下面证明(5).事实上，若$\sup_{i\in\Gamma}\eta(A_i, B_i)=\infty$，则(5)显然成立.若$\sup_{i\in\Gamma}\eta(A_i,B_i)=M<\infty$，则对任何$\delta>0$，任何 $i\in\Gamma$，由(3)知

$$A_i\subset(B_i)_{M+\delta},\quad B_i\subset(A_i)_{M+\delta}.$$

故

$$\bigcup_{i\in\Gamma}A_i\subset(\bigcup_{i\in\Gamma}B_i)_{M+\delta},\quad \bigcup_{i\in\Gamma}B_i\subset(\bigcup_{i\in\Gamma}A_i)_{M+\delta},$$

从而

$$\eta(\bigcup_{i\in\Gamma}A_i, \bigcup_{i\in\Gamma}B_i)\leqslant M+\delta.$$

由 $\delta>0$ 可任意小可知(5)成立.

定义 6.5 上面定义的 η 称为 $\mathscr{K}(E)$ 上的 **Hausdorff 度量**，$(\mathscr{K}(E),\eta)$ 称为 **Hausdorff 度量空间**.

定理 6.14 设(E,ρ)是完备可分度量空间，η 如定义 6.5 所定义，则$(\mathscr{K}(E),\eta)$也是完备可分度量空间.

证明参见[19] 2.10.21.

§7 乘积拓扑空间

定义 7.1 设 Σ 为集合Ω 的一个子集族.令

$$S(\Sigma)=\{A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i: A_i\in\Sigma,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant1\}.$$

若 $S(\Sigma)$ 是 Ω 的开基，则称 Σ 是Ω 的一个**次开基**.

例如一维欧氏空间 $\mathbf{R}$ 的全体开半线$\{(-\infty,x): x\in\mathbf{R}\}$是 $\mathbf{R}$ 的一个次开基.

定义 7.2 给定一族拓扑空间$(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ $(\lambda\in\Gamma$, Γ是任一指

标集),令 $\Omega = \bigtimes_{\lambda\in\Gamma}\Omega_\lambda$ 为其笛卡尔积,以 $x(\cdot)$ 表示 Ω 中之点.称 $\{x(\cdot)\in\Omega: x(\lambda_i)\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 Ω 中之(n 维)**柱集**($A_i\subset\Omega_{\lambda_i}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1$).特别地,一维柱集称为**条集**.当 A_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为开集时,相应的柱集 $\{x(\cdot)\in\Omega: x(\lambda_i)\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 称为**开柱集**.仿之可定义**开条集**.

显然全体开柱集构成 Ω 的一个开基;全体开条集构成 Ω 的一个次开基.

定义7.3 在定义7.2的条件下,设 $\mathscr{T}$ 是以全体开柱集为开基所产生之拓扑,或者等价地,$\mathscr{T}$ 是以全体开条集为次开基所产生之拓扑,设 $\Omega = \bigtimes_{\lambda\in\Gamma}\Omega_\lambda$,则定义**积拓扑空间**

$$\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda) = (\Omega,\mathscr{T}).$$

定理7.1 对积拓扑空间 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 而言,

(1) $x_n(\cdot)\to x(\cdot) \Longleftrightarrow$ 对每一个 $\lambda\in\Gamma$,都有 $x_n(\lambda)\to x(\lambda)$;

(2) 若 f 是由拓扑空间 $(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$ 到 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 的映射,$g(y,\cdot) = f(y)$ $(y\in\Omega^*)$,则 f 连续的充要条件是:对每个 $\lambda\in\Gamma$, $g(\cdot,\lambda)$ 是连续映射;

(3) 令 $p_\beta: \bigtimes_{\lambda\in\Gamma}\Omega_\lambda \mapsto \Omega_\beta$ 是投影算子(或称坐标映射),$p_\beta(x(\cdot)) = x(\beta)$,则 p_β 连续.

证 用积拓扑空间之定义立即可证(1).再注意:f 连续之充要条件是次基开集之逆像是开集,则易证(2)和(3).

定理7.2 令 π 为性质(T_0)或(T_1)或(T_2)或紧性,则积拓扑空间 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 具有性质 π 的充要条件是:对每个 $\lambda\in\Gamma$, $(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 具有性质 π.

为省篇幅,证明略去.

定理 7.3 若积拓扑空间 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 是局部紧的,则对每个 $\lambda\in\Gamma$, $(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 是局部紧的. 当 Γ 为有限集时,逆命题亦成立.

证明甚易,从略.

定理 7.4 令 $\mathscr{B}$ 为积拓扑空间 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 的全体 Borel 集构成的 σ 代数, $\mathscr{B}_\lambda$ 为 $(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 的全体 Borel 集构成的 σ 代数,再令

$$\mathscr{K}\triangleq\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}\mathscr{B}_\lambda\triangleq\sigma(\{\{x(\cdot):x(\lambda)\in A\}:A\in\sigma(\mathscr{T}_\lambda)\},\ \lambda\in\Gamma)$$

是全体 Borel 条集(即是 $\{\{x(\cdot):x(\lambda)\in A\}:A\in\sigma(\mathscr{T}_\lambda),\ \lambda\in\Gamma\}$) 所产生的 σ 代数,则

$$\mathscr{K}\subset\mathscr{B},$$

此处 $\sigma(\Sigma)$ 表示由集合族 Σ 所产生的 σ 代数(其定义见定义 1.6).

证明甚易,从略.

定理 7.5 令 π 为 (D_1) 或 (D_2),则积拓扑空间 $\bigtimes_{\lambda\in\Gamma}(\Omega_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)$ 具有性质 π 的充要条件是:除去至多可数个因子空间以外,其余所有的因子空间都是不足道的拓扑空间(不足道空间即是其拓扑 $\mathscr{T}$ 由全空间与空集所构成,亦即其拓扑是最粗的拓扑),而且被除去的这可数个因子空间均具有性质 π.

为省篇幅,证明略去.

下面转去讨论指标集 Γ 是可数的,而且每个因子空间都是度量空间. 这里只罗列其结论,证明从略.

设 (Ω_n,ρ_n) 是度量空间, $\mathscr{T}_n$ 是由度量 ρ_n 所产生的拓扑(不失普遍性,可令 $\rho_n\leqslant 1$), $n=1,2,\cdots$. $\Omega=\bigtimes_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. 任取 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)$ $(x_n,y_n\in\Omega_n)$,令

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho_n(x_n,y_n),$$

则易证 ρ 是 Ω 上一个度量，而且 ρ 所产生的拓扑就是乘积拓扑，即是全体 ρ-开球组成 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 的一个开基.

事实上，任取一点 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in\Omega$ 及 x 的一个基开集 $V(x)$，必有 $V(x)=G_1\times\cdots\times G_n\times\bigtimes_{i=n+1}^{\infty}\Omega_i$，其中 $G_i\in\mathscr{T}_i$，$x_i\in G_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$. 又由于 $(\Omega_i,\mathscr{T}_i)$ 是度量空间，所以 x_i 的邻域 G_i 必含一个包含 x_i 的 ρ_i- 开球，记之为 $B_{\rho_i}(x_i,\varepsilon_i)$. 不失普遍性可设 $G_i=B_{\rho_i}(x_i,\varepsilon_i)$. 而（取 $\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\varepsilon_i\}$）

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_m(y_m,x_m)}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Longrightarrow\frac{\rho_i(y_i,x_i)}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2^n}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

$$\Longrightarrow\rho_i(y_i,x_i)<\varepsilon_i\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

$$\Longrightarrow(y_1,y_2,\cdots)\in G_1\times\cdots\times G_n\times\bigtimes_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j=V(x),$$

即是 ρ-开球 $B_\rho\left(x,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\subset V(x)$. 故全体 ρ-开球构成 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 的一个开基.

定理7.6　设 (Ω_n,ρ_n) 是度量空间，$\mathscr{T}_n$ 是 ρ_n 产生的拓扑，$n=1,2,\cdots$.

(1)　若 $(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 是完备的 $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 也是完备的.

(2)　若 $(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 是可分的 $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n,\mathscr{T}_n)$ 也是可分的.

(3)　设 $\mathscr{K}$ 是定理 7.4 中所定义的全体 Borel 条集所产生的

σ 代数，则积拓扑空间 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n, \mathscr{T}_n)$ 的开球均含于 $\mathscr{K}$. 特别地，若每一个因子空间 $(\Omega_n, \mathscr{T}_n)$ 均可分，则 $\mathscr{K} = \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{B}$ 为定理 7.4 中所定义的积拓扑空间 $\bigtimes_{n=1}^{\infty}(\Omega_n, \mathscr{T}_n)$ 的全体 Borel 集所构成的 σ 代数. 即是，若记 Ω_n 中全体 Borel 集构成的 σ 代数为 $\mathscr{B}(\Omega_n)$，则有

$$\bigtimes_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}(\Omega_n) = \mathscr{B}\left(\bigtimes_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right).$$

第二章　测度与积分摘要

§1　集合系与单调系定理

定义 1.1　设 Ω 为任一集合. $\mathfrak{M}$ 是 Ω 中的一族子集,称之为 Ω 上的一个**集合系**.

(1)　称集合系 $\mathfrak{M}$ 是 ***Π* 系**,如果

$$\{A_1,\cdots,A_n\}\subset\mathfrak{M}\Longrightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\mathfrak{M}.$$

(2)　称集合系 $\mathfrak{M}$ 是 ***d* 系**,如果

(ⅰ)　$\Omega\in\mathfrak{M}$;

(ⅱ)　$A,B\in\mathfrak{M},\ A\subset B\Longrightarrow B-A\in\mathfrak{M}$;

(ⅲ)　$A_n\in\mathfrak{M},\ A_n\subset A_{n+1}(n\geqslant 1)\Longrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{M}$.

(3)　含 $\mathfrak{M}$ 的最小 d 系(或 σ 代数)称为**由 $\mathfrak{M}$ 产生的 *d* 系(或 σ 代数)**,记之为 $d(\mathfrak{M})$(或 $\sigma(\mathfrak{M})$).

注意:$d(\mathfrak{M})$(或 $\sigma(\mathfrak{M})$)是唯一存在的.

定理 1.1　集合系 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数的充要条件是:$\mathfrak{M}$ 既是 Π 系又是 d 系.

证　必要性是显然的. 下证充分性. 显然,由 $\mathfrak{M}$ 既是 Π 系又是 d 系推知 $\mathfrak{M}$ 是代数. 下面证明 $\mathfrak{M}$ 对可数并运算封闭. 事实上,由 $\mathfrak{M}$ 既是 Π 系又是 d 系推知

$$A\in\mathfrak{M}\Longrightarrow A^{c}\triangleq\Omega-A\in\mathfrak{M}.\qquad(1.1)$$

由(1.1)式及 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系推出

$$\{A_1,\cdots,A_n\}\subset \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c)^c \in \mathfrak{M}. \quad (1.2)$$

由(1.2)式及 d 系的第(ⅲ)条性质得

$$A_n \in \mathfrak{M}\ (n=1,2,\cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in \mathfrak{M}.$$

定理证毕.

定理 1.2 设 $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的 Π 系,则 $d(\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{M})$.

证 由于 $\sigma(\mathfrak{M})$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的一个 d 系,所以 $\sigma(\mathfrak{M})\supset d(\mathfrak{M})$. 因此,为证定理,只需证明 $d(\mathfrak{M})$ 是 σ 代数. 用定理 1.1,又只需证明 $d(\mathfrak{M})$ 是一个 Π 系即可. 事实上,令

$$\mathscr{D}_1 = \{B: B\in d(\mathfrak{M}),\ (B\cap A)\in d(\mathfrak{M}) \text{ 对一切 } A\in\mathfrak{M} \text{ 成立}\},$$

推证 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$ (此即 $d(\mathfrak{M})$ 对有限交运算封闭). 事实上,由于 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系,所以 $\mathscr{D}_1\supset\mathfrak{M}$. 若能证明 $\mathscr{D}_1$ 是一个 d 系,则 $\mathscr{D}_1\supset d(\mathfrak{M})$,从而 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$.

(ⅰ) 显然 $\Omega\in\mathscr{D}_1$.

(ⅱ) 设 $B_1,B_2\in\mathscr{D}_1$, $B_1\subset B_2$,则对任何 $A\in\mathfrak{M}$,由 $\mathscr{D}_1$ 的定义有 $B_i\cap A\in d(\mathfrak{M})$ $(i=1,2)$. 显然 $B_1\cap A\subset B_2\cap A$,所以由 d 系的性质(ⅱ)有

$$(B_2-B_1)\cap A = ((B_2\cap A)-(B_1\cap A))\in d(\mathfrak{M}),$$

此即 $B_2-B_1\in\mathscr{D}_1$.

(ⅲ) 设 $B_n\subset B_{n+1}$, $B_n\in\mathscr{D}_1$ $(n\geqslant 1)$,则对任何 $A\in\mathfrak{M}$,有 $(B_n\cap A)\in d(\mathfrak{M})$, $(B_n\cap A)\subset(B_{n+1}\cap A)$,所以由 d 系的性质(ⅲ)有

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)\cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)\in d(\mathfrak{M}),$$

此即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}_1.$$

这就证明了 $\mathscr{D}_1$ 是 d 系. 所以 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$.

其次,再令

$$\mathscr{D}_2 = \{B: B \in d(\mathfrak{M}),\ (B \cap A) \in d(\mathfrak{M}) \text{ 对一切 } A \in d(\mathfrak{M}) \text{ 成立}\}.$$

推证 $\mathscr{D}_2 = d(\mathfrak{M})$(于是 $d(\mathfrak{M})$ 是 Π 系).事实上,由 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$ 知 $\mathscr{D}_2 \supset \mathfrak{M}$,仿 $\mathscr{D}_1$,可证 $\mathscr{D}_2$ 也是 d 系,所以 $\mathscr{D}_2 = d(\mathfrak{M})$.定理证毕.

定义 1.2　设 Ω 是任一集合,$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数,f: $\Omega \mapsto \mathbf{R}$,称 f 是 $\mathscr{F}$ **可测函数**,如果对 $\mathbf{R}$ 中任一 Borel 集 A,都有 $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$.特别地,若 f 可表示为 $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}$,$c_i$ 为实数,$\{A_i\}$ 为两两不交的 $\mathscr{F}$ 中的集合系,则称 f 是 $\mathscr{F}$ **简单函数**.易证:任何非负 $\mathscr{F}$ 可测函数 f 均可表示为一列 $\mathscr{F}$ 简单函数 $\{f_n\}$ 的极限 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$,$\{f_n\}$ 单增.

下面我们介绍一条类似定理 1.2 的函数形式的单调类定理.

定理 1.3　设 Ω 为任一集合,$\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的一个 Π 系,$\mathscr{H}$ 是满足下列条件的定义在 Ω 上的实值函数所构成的向量空间:

(1)　$1 \in \mathscr{H}$, $\mathbf{1}_A \in \mathscr{H}\,(A \in \mathfrak{M})$,其中 $\mathbf{1}_A$ 表示集合 A 上的示性函数;

(2)　"$f_n \in \mathscr{H}$, $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}\,(n \geqslant 1)$,$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ 是实值函数(相应地,有界实值函数)$\Longrightarrow f \in \mathscr{H}$",

则 $\mathscr{H}$ 包含了所有的定义在 Ω 上的实值(相应地,有界实值)$\sigma(\mathfrak{M})$ 可测函数.

证　令 $\mathscr{D} = \{A: A \subset \Omega,\ \mathbf{1}_A \in \mathscr{H}\}$,由定理的假设(1)得知 $\Omega \in \mathscr{D}$, $\mathfrak{M} \subset \mathscr{D}$.由于 $\mathscr{H}$ 是向量空间,故由 $A_1, A_2 \in \mathscr{D}$, $A_1 \subset A_2$ 可推出:$\mathbf{1}_{A_2 - A_1} = \mathbf{1}_{A_2} - \mathbf{1}_{A_1} \in \mathscr{H}$,亦即 $A_2 - A_1 \in \mathscr{D}$.又由(2)可知:

$$\begin{aligned} &A_n \in \mathscr{D},\ A_n \subset A_{n+1}\,(\forall\, n \geqslant 1) \\ &\Longrightarrow \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sup_{n \geqslant 1} \mathbf{1}_{A_n} \in \mathscr{H} \\ &\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}. \end{aligned}$$

总之,$\mathscr{D}$ 是 Ω 上的包含 $\mathfrak{M}$ 的 d 系.因此,由定理 1.2 得知

$$\mathscr{D} \supset d(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}).$$

任取 $\sigma(\mathfrak{M})$ 可测函数 f,令 $f^+ = f \vee 0$ 和 $f^- = (-f) \vee 0$ 分别为 f 的正部与负部,则 f^+ 和 f^- 是非负的 $\sigma(\mathfrak{M})$ 可测的实值函数. f^+ 可表示为非负的单调上升的简单函数列

$$\left\{ f_n^+ = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}} : n \geqslant 1 \right\}$$

的极限($a_i^{(n)} \in \mathbf{R},\ A_i^{(n)} \in \sigma(\mathfrak{M}),\ A_i^{(n)} A_j^{(n)} = \varnothing,\ i \neq j$).由 $f_n^+ \in \mathscr{H}$ 及(2)可知 $f^+ \in \mathscr{H}$.仿之可证 $f^- \in \mathscr{H}$.于是 $f \in \mathscr{H}$.定理证毕.

命题 1.1 设 Ω_1 和 Ω_2 为任意两个集合,$\mathfrak{M}$ 是 Ω_2 上的一个集合系,$f: \Omega_1 \mapsto \Omega_2$,则

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})) = f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})). \tag{1.3}$$

证 显然 $f^{-1}(\mathfrak{M}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))$. 若注意 $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$, $f^{-1}(\bigcap_n A_n) = \bigcap_n f^{-1}(A_n)$, $f^{-1}(A_1 - A_2) = f^{-1}(A_1) - f^{-1}(A_2)$, $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$,则可知对 Ω_2 上任一 σ 代数 $\mathscr{E}$, $f^{-1}(\mathscr{E})$ 是 Ω_1 上一个 σ 代数,从而 $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))$ 是 Ω_1 上一个 σ 代数.所以

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})). \tag{1.4}$$

再令

$$\mathscr{F} = \{A : A \in \sigma(\mathfrak{M}),\ f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{M}))\},$$

则 $\mathscr{F} \supset \mathfrak{M}$,且 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数,所以 $\mathscr{F} \supset \sigma(\mathfrak{M})$,即是

$$f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})). \tag{1.5}$$

由(1.4)和(1.5)即得(1.3).命题得证.

命题 1.2 设 Ω 为任一集合,Γ 是任一指标集,$(E_i, \mathscr{E}_i)$ 为可测空间,$f_i: \Omega \mapsto E_i$, $\mathscr{F}_i$ 是 E_i 上的集合系,$\sigma(\mathscr{F}_i) = \mathscr{E}_i (i \in \Gamma)$,令

$$\mathscr{F} = \{B : B = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i),\ A_i \in \mathscr{F}_i,\ I \text{ 为 } \Gamma \text{ 的有限子集}\},$$

$$\sigma(f_i, i \in \Gamma) = \sigma(\bigcup_{i \in \Gamma} f_i^{-1}(\mathscr{E}_i)),$$

则

(1)　$\mathscr{F}_i$ 是 Π 系 $(i \in \Gamma) \Longrightarrow \mathscr{F}$ 是 Π 系；

(2)　$\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(f_i, i \in \Gamma)$.

证　由 Π 系的定义知(1)成立.下证(2).对每个 $i \in \Gamma$,由命题 1.1 有

$$\sigma(\mathscr{F}) \supset \sigma(f_i^{-1}(\mathscr{F}_i)) = f_i^{-1}(\sigma(\mathscr{F}_i)) = f_i^{-1}(\mathscr{E}_i),$$

从而

$$\sigma(\mathscr{F}) \supset \sigma(\bigcup_{i \in \Gamma} f_i^{-1}(\mathscr{E}_i)) = \sigma(f_i, i \in \Gamma). \tag{1.6}$$

而 $\sigma(f_i, i \in \Gamma) \supset \mathscr{F}$ 是显然的,所以

$$\sigma(f_i, i \in \Gamma) \supset \sigma(\mathscr{F}). \tag{1.7}$$

由(1.6)和(1.7)知(2)成立.

定理 1.4　设 $\Omega, \Gamma, I, \mathscr{F}_i, \mathscr{F}, f_i$ 如命题 1.2 中所定义,$\mathscr{F}_i$ 是 Π 系.若 $\mathscr{H}$ 是定义在 Ω 上的一些实值函数所构成的向量空间,且满足:

(1)　$1 \in \mathscr{H}$;

(2)　$h_n \in \mathscr{H}$, $0 \leqslant h_n \leqslant h_{n+1} (n \geqslant 1)$, $h = \sup\limits_{n \geqslant 1} h_n$ 有限(相应地,有界)$\Longrightarrow h \in \mathscr{H}$;

(3)　$\mathscr{H}^* \triangleq \{f: f = \prod\limits_{i \in I} (\mathbf{1}_{A_i} \circ f_i),\ A_i \in \mathscr{F}_i,\ I$ 是 Γ 的有限子集$\} \subset \mathscr{H}$,

则 $\mathscr{H}$ 包含了一切 $\sigma(f_i, i \in \Gamma)$ 可测的实值(有界)函数.

证　注意:

$$\prod_{i \in I} (\mathbf{1}_{A_i} \circ f_i) = \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{f_i^{-1}(A_i)} = \mathbf{1}_{\{\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i)\}}, \tag{1.8}$$

则可知

$$\mathscr{H}^* = \{\mathbf{1}_A : A \in \mathscr{F}\}.$$

由(3)得 $\{\mathbf{1}_A : A \in \mathscr{F}\} \subset \mathscr{H}$.再注意 $\mathscr{F}$ 是 Π 系,则由定理 1.3 即得定理 1.4.

注意:以后,我们称定理 1.2 ~ 1.4 皆为"单调系定理".定理 1.2 是集合形式的单调系定理,定理 1.3、1.4 是函数形式的"单调

系定理”.

命题1.3 设$\mathfrak{M}$为$\mathbf{R}$中一切开区间(或一切闭区间;或一切左闭右开区间;或一切左开右闭区间;或一切$(-\infty,x)$;或一切(x,∞);或一切$(-\infty,x]$;或一切$[x,\infty)$;或一切开集;或一切闭集),则由$\mathfrak{M}$产生的σ代数就是$\mathbf{R}$中的一切Borel集,即是

$$\sigma(\mathfrak{M}) = \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

因此,若$(\Omega,\mathscr{F})$是任一可测空间,$f:\Omega\mapsto\mathbf{R}$,则$f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbf{R}))\subset\mathscr{F}$的充要条件是$f^{-1}(\mathfrak{M})\subset\mathscr{F}$.

把上述$\mathfrak{M}$换成$\mathfrak{M}_D$,$\mathfrak{M}_D$是把$\mathfrak{M}$中之区间端点由一切实数限制为一切有理数而得到的子集合系,则上述一切结论仍然成立.

证 用$\sigma(\mathfrak{M})$与$\mathscr{B}(\mathbf{R})$的定义,直接验证即可证明命题1.3.

§2 测度的概念与性质

定义 2.1 设Ω为任一集合,$\mathscr{F}$是Ω上的一个集合系,τ:$\mathscr{F}\mapsto[0,\infty]$.称$\tau$**是$\mathscr{F}$上的一个预测度**,如果$\varnothing\in\mathscr{F}$且$\tau(\varnothing)=0$.称$\mathscr{F}$上的预测度$\tau$**是$\mathscr{F}$上的测度**,如果$\tau$还满足:

(1) $A_1,A_2\in\mathscr{F},\ A_1\subset A_2\Longrightarrow\tau(A_1)\leqslant\tau(A_2)$;

(2) $\{A_i\}\subset\mathscr{F},\ \bigcup\limits_i A_i\in\mathscr{F}\Longrightarrow\tau(\bigcup\limits_i A_i)\leqslant\sum\limits_i\tau(A_i)$.

若$\mathscr{F}$是Ω的全体子集,则称$\mathscr{F}$上的预测度(测度)为**Ω上的预测度(测度)**.

特别地,若τ是$\mathscr{F}$上的一个测度,而且满足:

(3) $\{A_i\}$是$\mathscr{F}$中两两不交的集合列且$\bigcup\limits_i A_i\in\mathscr{F}\Longrightarrow$

$$\tau(\bigcup_i A_i) = \sum_i\tau(A_i),$$

则称τ**是$\mathscr{F}$上的可数可加的测度**.

称可数可加的测度τ是**概率测度**,如果$\tau(\Omega)=1$.

注意:有的著作把定义2.1中的测度称为外测度,而把可数可

加的测度称为测度.

定理 2.1　设$\mathscr{F}$是 Ω 上的一个集合系,τ 是 $\mathscr{F}$上的一个预测度,对任何 $A \subset \Omega$,定义

$$\mu(A) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{F} \\ \bigcup_i C_i \supset A}} \sum_i \tau(C_i), \tag{2.1}$$

则 μ 是Ω 上的一个测度.有时称 μ 是**预测度τ按模式(Ⅰ)所产生的测度**.(若(1.1)右端不存在 $C_i \in \mathscr{F}$, $\bigcup_i C_i \supset A$,这时按惯例定义 $\inf \varnothing = \infty$.)

如果ν是Ω上任一测度,η是Ω上的预测度,且$\nu(A) = \eta(A)$ $(\forall A \subset \Omega)$,则 ν 是由η按模式(Ⅰ)所产生的测度.

证明甚易,从略.

系 2.1　由测度(当然也是预测度)再按模式(Ⅰ)产生的测度还是它自己.

定义 2.2　设μ是Ω上的测度,称Ω中的子集A是**μ可测的**,如果对任何 $A_1 \subset A$, $A_2 \subset \Omega - A$,总有

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

全体 μ 可测集用$\sigma(\mu)$表示.

定理 2.2　设μ是Ω上的测度,则$\sigma(\mu)$是σ-代数,而且μ在$\sigma(\mu)$上的局限$\mu|_{\sigma(\mu)}$是可数可加的测度.

证明甚易,从略.

定理 2.3　设μ是Ω上的测度,$F \subset \Omega$, $\{A_n\} \subset \sigma(\mu)$,则

(1)　$\{A_n\}$ 单增 $\Longrightarrow \mu(F \cap (\bigcup_n A_n)) = \sup_n \mu(FA_n)$;

(2)　$\{A_n\}$ 单降且存在 n_0 使 $\mu(FA_{n_0}) < \infty \Longrightarrow$

$$\mu(F \cap (\bigcap_n A_n)) = \inf_n \mu(FA_n).$$

证明甚易,从略.

系 2.2　设$\mathscr{F}$是 Ω 上的σ代数,μ 是 $\mathscr{F}$上的可数可加测度,$\{A_n\} \subset \mathscr{F}$,则

(1) $\{A_n\}$ 单增 $\Longrightarrow \mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$;

(2) $\{A_n\}$ 单降,且存在 n_0 使 $\mu(A_{n_0}) < \infty \Longrightarrow$

$$\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

定义 2.3 称 Ω 上的测度 μ **是正则的**,如果对任何 $B \subset \Omega$,存在 $A \supset B$, $A \in \sigma(\mu)$,使 $\mu(A) = \mu(B)$.

定理 2.4 设 μ 是 Ω 上的正则测度,则

(1) $\{A_n\}$ 单增,$A_n \subset \Omega\ (n \geqslant 1) \Longrightarrow$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n);$$

(2) $M \in \sigma(\mu)$, $\mu(M) < \infty \Longrightarrow \forall B \subset M$, $B \in \sigma(\mu)$ 的充要条件是 $\mu(M) = \mu(B) + \mu(M - B)$.

证 (1) 因为 μ 是正则的,所以对任何 $n \geqslant 1$,可取 $B_n \supset A_n$, $B_n \in \sigma(\mu)$,使 $\mu(A_n) = \mu(B_n)$. 令 $C_n = \bigcap_{k\geqslant n} B_k$,则由 $\{A_n\}$ 单增可知:$A_n \subset C_n \subset B_n (n \geqslant 1)$. 所以

$$\mu(A_n) \leqslant \mu(C_n) \leqslant \mu(B_n) = \mu(A_n)\ (n \geqslant 1).$$

再注意 $\{C_n\}$ 单增且 $\{C_n\} \subset \sigma(\mu)$ 并应用定理 2.3 (1) 得知

$$\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n) = \sup_{n\geqslant 1}\mu(C_n) = \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} C_n) \geqslant \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n).$$

而 $\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n) \leqslant \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n)$ 是显然的. (1) 证毕.

(2) 设 $B \subset M$, $B \in \sigma(\mu)$,则 B 与 M 不交且皆属于 $\sigma(\mu)$,故 $\mu(M) = \mu(B) + \mu(M - B)$.

$\forall B \subset M$,若 $\mu(M) = \mu(B) + \mu(M - B)$,令 $C = M - B$,则由 μ 是正则测度知:存在 $B^*, C^* \in \sigma(\mu)$ 使

$$B \subset B^* \subset M, \quad \mu(B) = \mu(B^*);$$
$$C \subset C^* \subset M, \quad \mu(C) = \mu(C^*).$$

由 $B^*, C^* \in \sigma(\mu)$ 知

$$\mu(B^* - C^*) + \mu(B^* \cap C^*) + \mu(C^* - B^*)$$
$$= \mu(B^* \cup C^*) \geqslant \mu(B \cup C) = \mu(M). \qquad (2.2)$$

仿之可证:

$$\mu(B^*-C^*)+2\mu(B^*\cap C^*)+\mu(C^*-B^*)$$
$$=\mu(B^*)+\mu(C^*)=\mu(B)+\mu(C)$$
$$=\mu(M)<\infty, \tag{2.3}$$

比较(2.2)及(2.3)即得

$$\mu(B^*\cap C^*)=0. \tag{2.4}$$

令 $D=B^*-B$,则

$$D=B^*\cap(M-B)=B^*\cap C\subset B^*\cap C^*. \tag{2.5}$$

由(2.4)、(2.5)得 $\mu(D)=0$,从而 $D\in\sigma(\mu)$.再注意 $B^*\in\sigma(\mu)$ 及 $D=B^*-B$ 得 $B\in\sigma(\mu)$.(2) 证毕.

定理 2.5　若 $\{\mu_n:n\in\Gamma\}$ 是一族测度,Γ 是任一指标集,则 $\mu=\sup\limits_{n\in\Gamma}\mu_n$ 也是测度.

证　由测度之定义立即可得本定理.

定义 2.4　设 μ 是 E 上一个测度,$\mathscr{E}$ 是 E 的一个子集系.称 μ 是 **$\mathscr{E}$-正则的**,如果对任何 $B\subset E$,存在 $B^*\in\mathscr{E}$,使 $B\subset B^*$ 且 $\mu(B)=\mu(B^*)$.

记 $\mathscr{E}_\sigma=\{B:B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\}$,

$\mathscr{E}_\delta=\{B:B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\}$,　$\mathscr{E}_{\sigma,\delta}=(\mathscr{E}_\sigma)_\delta$.

显然定义 2.4 是定义 2.3 的推广.定义 2.3 中的正则测度,即定义 2.4 中的 $\sigma(\mu)$-正则测度.

定理 2.6　设 τ 是定义在 E 的子集系 $\mathscr{E}$ 上的预测度,$E\in\mathscr{E}$,μ 是由 τ 按模式(Ⅰ)所产生的测度,则 μ 是 $\mathscr{E}_{\sigma,\delta}$-正则的.

证　$\forall B\subset E$,

(1)　若 $\mu(B)=\infty$,则有

$$E\in\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_{\sigma,\delta},\ E\supset B,\ \mu(E)=\mu(B)=\infty.$$

(2)　若 $\mu(B)<\infty$,取

$$D=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i^{(j)},$$

其中 $C_i^{(j)} \in \mathscr{E}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^{(j)} \supset B$, $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(j)}) < \mu(B) + \frac{1}{j}$,则有

$$D \supset B,\ D \in \mathscr{E}_{\sigma,\delta},\ \mu(D) = \mu(B).$$

定理证毕.

§3 度量空间中的测度

在这一节中,恒设(Ω,ρ)是度量空间. 对任意 $x,y \in \Omega$, $A,B \subset \Omega$,仍如第一章 §6 一样,恒令 $\rho(x,y)$ 表示 x 与 y 之距离, $\rho(x,A)$ 表示点 x 到集合 A 之距离, $\rho(A,B)$ 表示两集合 A 与 B 之间的距离, $\operatorname{diam}(A)$ 表示集合 A 之直径,空集 $\varnothing$ 的直径 $\operatorname{diam}(\varnothing)$ 定义为 0,有时记 $\operatorname{diam}(A)$ 为 $\operatorname{diam} A$.

定义 3.1 设(Ω,ρ)是度量空间,$\mathscr{F}$是 Ω 上的一个子集系,τ 是 $\mathscr{F}$上的一个预测度,令

$$\mu(B) = \sup_{\varepsilon>0} \mu_\varepsilon(B) \quad (\forall B \subset \Omega), \tag{3.1}$$

其中

$$\mu_\varepsilon(B) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i):\ C_i \in \mathscr{F},\ \bigcup_i C_i \supset B,\ \operatorname{diam} C_i \leqslant \varepsilon \right\}, \tag{3.2}$$

易证 μ_ε 是Ω 上的测度,由定理 2.5 知 μ 亦为Ω 上的测度. 我们称 μ 是**由 τ 按模式(Ⅱ)产生的测度**.

显然,当 ε 下降时,μ_ε 上升,故

$$\mu(B) = \sup_{\varepsilon>0} \mu_\varepsilon(B) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon(B). \tag{3.3}$$

定义 3.2 设(Ω,ρ)是度量空间,$A,B \subset \Omega$. 称 A 与 B 是**一对隔离集**,如果 $\rho(A,B) > 0$. 称 Ω 上的测度 μ 是一个**隔离测度**,如果对任何一对隔离集 A 与 B,都有

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

定理 3.1 度量空间(Ω,ρ)上的由预测度 τ 按模式(Ⅱ)产生

的测度 μ 都是隔离测度.

证明参见[50] p.7.

定理3.2　设 μ 是度量空间 (Ω,ρ) 上的隔离测度, $\mathscr{B}(\Omega)$ 是 Ω 上的全体 Borel 集所构成的 σ 代数,则 $\mathscr{B}(\Omega)\subset\sigma(\mu)$.

证明参见[50] p.9.

定理3.3　设 τ 是定义在度量空间 (Ω,ρ) 上的一个子集系 $\mathscr{E}$ 上的预测度, $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{F}$ 分别表示 Ω 上的全体开集与全体闭集, $\mathscr{E}\subset\mathscr{G}$. 令 μ 是由预测度 τ 按模式(Ⅱ)产生的测度,则 μ 是正则的,而且也是 $\mathscr{G}_\delta$ 正则的. $\mathscr{B}(\Omega)\subset\sigma(\mu)$,且 $\forall B\in\sigma(\mu)$,当 $\mu(B)<\infty$ 时,必存在 $C\subset B$, $C\in\mathscr{F}_\sigma$, $\mu(B)=\mu(C)$,此处 $\mathscr{G}_\delta$ 与 $\mathscr{F}_\sigma$ 分别表示一切 G_δ 集与一切 F_σ 集(定义见第一章定义 1.5).

证明参见[50] p.9.

下面我们简单介绍一些有关 Lebesgue-Stieltjes 测度的基本结果.

给定 d 维欧氏空间 $\mathbf{R}^d$,其中的点用 $x=(x_1,\cdots,x_d)$, $y=(y_1,\cdots,y_d)$, $a=(a_1,\cdots,a_d)$, $b=(b_1,\cdots,b_d)$, $\cdots$ 表示.记

$$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}^d:\ a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,d\}$$

为 $\mathbf{R}^d$ 中半开半闭 d 维区间(d 维矩形),

$$\mathscr{I}_d=\{(a,b]:\ a,b\in\mathbf{R}^d,\ a\leqslant b\}$$

为 $\mathbf{R}^d$ 中半开半闭 d 维区间全体,此处 $a\leqslant b$ 意即 $a_i\leqslant b_i$, $i=1,\cdots,d$. $a<b$, $a\geqslant b$, $a>b$ 的定义仿前, $[a,b)$, (a,b), $[a,b]$ 的定义仿 $(a,b]$.

定义 3.3　设 $F:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$. 称 F 是 $(\mathbf{L}\text{-}\mathbf{S})_d$ 函数,如果

(1)　$F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每一个变量皆右连续;

(2)　$\forall(a,b]\in\mathscr{I}_d$,均有

$$\begin{aligned}\mu_F((a,b])\equiv F(b_1,\cdots,b_d)-[&F(a_1,b_2,\cdots,b_d)+\cdots\\&+F(b_1,\cdots,b_{d-1},a_d)]+[F(a_1,a_2,b_3,\cdots,b_d)\\&+\cdots+F(b_1,\cdots,b_{d-2},a_{d-1},a_d)]-\cdots\end{aligned}$$

$$+(-1)^d F(a_1,\cdots,a_d)\geqslant 0.$$

显然,$F(x_1,\cdots,x_d)=x_1\cdots x_d$ 是$(\text{L-S})_d$ 函数,这个特殊的$(\text{L-S})_d$ 函数称为 $\mathbf{L}_d$ **函数**(d 维 Lebesgue 函数).

定理3.4 设 F 是$(\text{L-S})_d$ 函数,$\mathscr{I}_d$ 定义如前,$\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$ 是由半环 $\mathscr{I}_d$ 所产生的σ代数. $\forall (a,b]\in\mathscr{I}_d$,定义 $\mu_F((a,b])$ 如定义3.3中(2)式所示(注意:$\varnothing\in\mathscr{I}_d$,且(2)中定义 $\mu_F(\varnothing)=0$),则 μ_F 是 $\mathscr{I}_d$ 上的可数可加测度,从而 μ_F 可唯一扩张到 $\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$ 上去,仍是一个可数可加测度,仍记为 μ_F.

证明参见[27] p.6.

称此 μ_F 为**$(\text{L-S})_d$ 函数F所产生的(按模式(Ⅲ))L-S可数可加测度**.特别地,当 $F(x_1,\cdots,x_d)\equiv x_1\cdots x_d$ 时,称 μ_F 为**由F产生的(按模式(Ⅲ))L 可数可加测度**.

定理3.5 设 F 是$(\text{L-S})_d$ 函数,μ_F 是定义3.3(2)式中 $\mathscr{I}_d$ 上的可数可加测度(更是预测度),λ_F 和 γ_F 分别为由 μ_F 按模式(Ⅰ)和(Ⅱ)产生的($\mathbf{R}^d$ 中一切子集上)测度,则 $\lambda_F\equiv\gamma_F$.

证 显然,$\forall B\subset\mathbf{R}^d$,总有 $\lambda_F(B)\leqslant\gamma_F(B)$.为证本定理,只需证

$$\lambda_F(B)\geqslant\gamma_F(B).\tag{3.4}$$

不失普遍性可设 $\lambda_F(B)<\infty$.任给 $\varepsilon>0$,由 λ_F 的定义及$\lambda_F(B)<\infty$ 可以取$\{C_i\}\subset\mathscr{I}_d$,使

$$B\subset\bigcup_i C_i,\quad \sum_i\mu_F(C_i)<\lambda_F(B)+\varepsilon.\tag{3.5}$$

显然,对任给 $\delta>0$,任取 i,必存在

$$\{C_{i,j}:j=1,2,\cdots,K_i\}\subset\mathscr{I}_d,\quad C_{i,j}\cap C_{i,k}=\varnothing\ (j\neq k),$$

$$\operatorname{diam} C_{i,j}\leqslant\delta,\quad \bigcup_{j=1}^{K_i}C_{i,j}=C_i,\quad \mu_F(C_i)=\sum_{j=1}^{K_i}\mu_F(C_{i,j}).$$

于是由(3.5)知

$$\bigcup_i \bigcup_{j=1}^{K_i} C_{i,j} \supset B, \quad \operatorname{diam} C_{i,j} \leqslant \delta,$$

$$\sum_i \sum_{j=1}^{K_i} \mu_F(C_{i,j}) < \lambda_F(B) + \varepsilon,$$

更有(由 $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ 可任意小)

$$\gamma_F(B) \leqslant \lambda_F(B).$$

定义3.4 设F是$(\text{L-S})_d$函数.称定理3.5中的$\lambda_F(\equiv \gamma_F)$是**由 F 产生的$(\text{L-S})_d$ 测度**.特别地,当 $F(x_1,\cdots,x_d) = x_1\cdots x_d$ 时,称 λ_F 为 **d 维 Lebesgue 测度**,记之为 $\mathscr{L}_d$. $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1$.

定理 3.6 设 F 是$(\text{L-S})_d$ 函数,$\lambda_F(\gamma_F)$ 是 F 按模式(Ⅰ)((Ⅱ))产生的测度,μ_F 是F 按模式(Ⅲ)产生的$\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$上的可数可加测度,则 $\forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$,总有

$$\lambda_F(B) = \gamma_F(B) = \mu_F(B). \tag{3.6}$$

证 注意定理 3.5,为证定理 3.6,只需证

$$\lambda_F(B) = \mu_F(B), \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{I}_d). \tag{3.7}$$

但是由定理2.2知$\sigma(\lambda_F)$是σ代数,$\lambda_F\big|_{\sigma(\lambda_F)}$是可数可加测度,因此为证(3.7),只需证

(1) $\lambda_F(B) = \mu_F(B)$, $\forall B \in \mathscr{I}_d$; (3.8)

(2) $\mathscr{I}_d \subset \sigma(\lambda_F)$.

先证(1). $\forall B \in \mathscr{I}_d$, $B_n \in \mathscr{I}_d$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset B,$$

由于 μ_F 是 $\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$ 上的可数可加测度,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(B_n) \geqslant \mu_F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geqslant \mu_F(B).$$

因此,$\lambda_F(B) \geqslant \mu_F(B)$. 而 $\lambda_F(B) \leqslant \mu_F(B)$ 显然成立,所以

$$\lambda_F(B) = \mu_F(B) \quad (\forall B \in \mathscr{I}_d).$$

再证(2). $\forall A \in \mathscr{I}_d$, $B_1 \subset A$, $B_2 \subset A^c$ (A^c表示A之补集), 必有

$$A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \{A_k : k \geqslant 0\} \subset \mathscr{I}_d,$$

$\{A_k\}$ 两两不交,其中 $A_0 = A$.

$\forall \{C_n : n \geqslant 1\} \subset \mathscr{I}_d$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset B_1 \cup B_2$,必有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_F(C_n \cap A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(C_n A_k) \\ &\geqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2)\end{aligned}$$

(因为 $C_n A_k \in \mathscr{I}_d$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, $\{C_n A_k : k \geqslant 0\}$ 两两不交, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n A_0 \supset B_1$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_n A_k \supset B_2$). 所以

$$\lambda_F(B_1 \cup B_2) \geqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2).$$

而 $\lambda_F(B_1 \cup B_2) \leqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2)$ 是显然的,故

$$\lambda_F(B_1 \cup B_2) = \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2).$$

这就证明了 $A \in \sigma(\lambda_F)$. 定理证毕.

定义 3.5 设 F 是$(\text{L-S})_d$ 函数,则称定理 3.6 中的 $\mu_F(= \lambda_F|_{\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)} = \gamma_F|_{\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)})$ 为**由 F 产生的$(\text{L-S})_d$ 可数可加测度**. 当 $F(x_1, \cdots, x_d) = x_1 \cdots x_d$ 时,由 F 产生的$(\text{L-S})_d$ 可数可加测度称为 **d 维可数可加 Lebesgue 测度**.

注意:定义 3.4 中所定义的 d 维 Lebesgue 测度 $\mathscr{L}_d$ 即通常的 $\mathbf{R}^d$ 中的 Lebesgue 外测度(定义在 $\mathbf{R}^d$ 中一切子集上),而定义 3.5 中的 d 维可数可加 Lebesgue 测度即是 $\mathscr{L}_d$ 在 $\mathbf{R}^d$ 中一切 Borel 集合上的局限.

下面介绍一下 Hausdorff 测度.

本节中,Φ 恒表示满足下列条件的函数 φ 所成的类:

(1) $\varphi:(0,\delta)\to(0,\infty)\quad(\delta>0)$;

(2) φ 是单增、右连续的,且 $\varphi(0+)=0$.

再记

$$\Phi_0=\left\{\varphi\in\Phi:\exists K\text{ 使}\frac{\varphi(2s)}{\varphi(s)}\leqslant K,\forall 0<s<\frac{\delta}{2}\right\},$$

即 Φ_0 是 Φ 中的"限制增长"的子函数类.

本节恒设(E,ρ)是一距离空间,ρ 是 E 上的一个距离,$\mathscr{G}$ 是由 ρ 决定的距离拓扑,$\mathscr{F}$ 表示 E 中全体闭集,$\mathscr{G}_\delta$,$\mathscr{F}_\sigma$ 的意义如前. Φ 中的函数 φ 皆称为测度函数,并经常补充定义 $\varphi(0)=0$.

定义 3.6 任取 $\varphi\in\Phi$, $B\subset E$,定义

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}m(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf\Big\{&\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\operatorname{diam}G_i):G_i\in\mathscr{G},\\&\operatorname{diam}G_i\leqslant\varepsilon,\ \bigcup_{i=1}^{\infty}G_i\supset B\Big\},\end{aligned}\tag{3.9}$$

称 $\varphi\text{-}m(B)$ 是集合 B 关于测度函数 φ 的 **Hausdorff 测度**,特别地称 $s^{\alpha}\text{-}m(B)$ 为 B 的 **α 维 Hausdorff 测度**$(\alpha>0)$. 称 $\mathscr{G}$ 为**覆盖基**.

注意:$\tau^{\varphi}(G)\equiv\varphi(\operatorname{diam}G)\ (G\in\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{G}$ 上的预测度,而 (3.9) 中定义的 $\varphi\text{-}m(B)$ 正是由预测度 τ^{φ} 按模式(Ⅱ)产生的测度,所以 $\varphi\text{-}m$ 确是一个测度. 利用定理 3.3 可知:

定理 3.7 Hausdorff 测度 $\varphi\text{-}m$ 是正则的、$\mathscr{G}_\delta$ 正则的隔离测度,E 中的全体 Borel 集 $\sigma(\mathscr{G})\subset\sigma(\varphi\text{-}m)$,而且对任一个具有有限 Hausdorff 测度的集合 B, $\varphi\text{-}m(B)<\infty$,均有 $C\in\mathscr{F}_\sigma$ 使 $B\supset C$,且

$$\varphi\text{-}m(B)=\varphi\text{-}m(C).$$

关于 Hausdorff 测度,具有各种等价定义,下面的定理即回答了此论断.

定理 3.8 任取 $\varphi \in \Phi$, $B \subset E$,对任一 $\varepsilon > 0$,令

$$\mu_\varepsilon^\varphi(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \varphi(\operatorname{diam} G_i): G_i \in \mathscr{G},\ \operatorname{diam} G_i \leqslant \varepsilon,\ \bigcup_{i=1}^\infty G_i \supset B\right\};$$

$$\gamma_\varepsilon^\varphi(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \varphi(\operatorname{diam} F_i): F_i \in \mathscr{F},\ \operatorname{diam} F_i \leqslant \varepsilon,\ \bigcup_{i=1}^\infty F_i \supset B\right\};$$

$$\sigma_\varepsilon^\varphi(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \varphi(\operatorname{diam} B_i): B_i \subset E,\ \operatorname{diam} B_i \leqslant \varepsilon,\ \bigcup_{i=1}^\infty B_i \supset B\right\};$$

$$\tau_\varepsilon^\varphi(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \varphi(\operatorname{diam} B_i): B_i \subset E,\ \operatorname{diam} B_i \leqslant \varepsilon,\ \bigcup_{i=1}^\infty B_i = B\right\},$$

则对任何 $\beta > \varepsilon$,有

$$\mu_\beta^\varphi(B) \leqslant \gamma_\varepsilon^\varphi(B) = \sigma_\varepsilon^\varphi(B) = \tau_\varepsilon^\varphi(B) \leqslant \mu_\varepsilon^\varphi(B), \tag{3.10}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}m(B) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_\varepsilon^\varphi(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma_\varepsilon^\varphi(B) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma_\varepsilon^\varphi(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_\varepsilon^\varphi(B).\end{aligned} \tag{3.11}$$

证明请见[50] p.14.

定义 3.7 设 $\mathscr{E}$ 是 E 的子集系,$B \subset E$.称 $\{B_i\}$ 是 B 的**覆盖**,若 $\bigcup_i B_i \supset B$;称 B 的覆盖 $\{B_i\}$ 为 $\mathscr{E}$ **覆盖**,若 $B_i \in \mathscr{E}$;称 B 的 $\mathscr{E}$ 覆盖 $\{B_i\}$ 为 $\mathscr{E}_\eta$ **覆盖**,若 $\forall\, i$, $\operatorname{diam} B_i \leqslant \eta$;称 E 的子集系 $\mathscr{E}$ 是 E 的一个**覆盖基**,若 $\forall\, \eta > 0$, $\forall\, A \subset E$,都存在 A 的一个 $\mathscr{E}_\eta$ 覆盖.

定理 3.8 说明:无论取 $\mathscr{G}$ 或 $\mathscr{F}$,或者 E 的一切子集 $\mathscr{H}$ 作覆盖基,定义出的 Hausdorff 测度皆一样.

定义 3.8 $\forall\, B \subset E$,称 $\dim B \triangleq \inf\{\alpha \geqslant 0: s^\alpha\text{-}m(B) = 0\}$ 为 B 的 **Hausdorff 维数**.

易证:

$$\begin{aligned}\dim B &= \inf\{\alpha \geqslant 0: s^\alpha\text{-}m(B) < \infty\} \\ &= \sup\{\alpha \geqslant 0: s^\alpha\text{-}m(B) = \infty\} \\ &= \sup\{\alpha \geqslant 0: s^\alpha\text{-}m(B) > 0\}.\end{aligned}$$

§4 实值函数的 Lebesgue 积分

定义 4.1 设 Ω 是任一集合,$\mathscr{F}$ 是 Ω 上一个 σ 代数,则称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一个**可测空间**.若在 $\mathscr{F}$ 上还定义了一个可数可加的测度 μ,则称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是一个**测度空间**;特别地,若 μ 是一个概率测度,即 μ 是一个满足 $\mu(\Omega)=1$ 的可数可加测度,则称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为**概率空间**.

定义 4.2 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$ 是可测空间 $(i=1,2)$,$f:\Omega_1\mapsto\Omega_2$.称 f **关于 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 可测**(记作 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$),如果任取 $A\in\mathscr{F}_2$,均有 $f^{-1}(A)\in\mathscr{F}_1$.特别地,若 $\Omega_2=[-\infty,\infty]$,$\mathscr{F}_2$ 是 Ω_2 中的一切 Borel 集(即是由一切闭区间 $[a,b]$ 产生的 σ 代数,其中 a 为实数或 $-\infty$,b 为实数或 ∞),则简记 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$ 为 $f\in\mathscr{F}_1$.若 $f\in\mathscr{F}_1$ 且 $f\geqslant 0$,则记 $f\in\mathscr{F}_1^+$,$f\in\mathrm{r}\mathscr{F}_1$ 表示 $f\in\mathscr{F}_1$ 且 f 取实值,$f\in\mathrm{b}\mathscr{F}_1$ 表示 $f\in\mathscr{F}_1$ 且 f 是有界实值函数.

定义 4.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间.

(1) 若 $f=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{A_i}$ 为 $\mathscr{F}$ 简单函数,即 c_i 为实数,$\{A_i\}$ 两两不交,$A_i\in\mathscr{F}$,则定义 f 在 Ω 上关于 μ 的积分为

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(A_i).$$

(2) 若 $f\in\mathrm{r}\mathscr{F}^+$,则定义

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_\Omega g\mathrm{d}\mu:\ 0\leqslant g\leqslant f,\ g\text{ 为 }\mathscr{F}\text{ 简单函数}\right\}.$$

(3) 若 $f\in\mathrm{r}\mathscr{F}$,且 $\int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu$ 至多只有一个为 ∞ 时,则定义

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu-\int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

当$\int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu$与$\int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu$皆为$\infty$时,则称$f$在$\Omega$上对$\mu$之积分无意义.当$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty$时,称$f$为**Lebesgue可积**.

对任何$A \in \mathscr{F}$,定义f在集合A上关于μ的积分为

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A f \mathrm{d}\mu.$$

注意:定义4.3中定义的$\mathscr{F}$简单函数的积分是唯一的,即当f表示成两个不同的$\mathscr{F}$简单函数时,它们定义出的积分是一样的.定义4.3中所定义的积分称为实值函数f的**Lebesgue积分**.

实值函数的Lebesgue积分的性质:

(1) 设$f_i \in \mathrm{r}\mathscr{F}$, f_i可积,c_i为实数,则

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_\Omega f_i \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i f_i \mathrm{d}\mu;$$

(2) 设$f, g \in \mathrm{r}\mathscr{F}$, f, g皆可积,$f \geqslant g$,则$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \geqslant \int_\Omega g \mathrm{d}\mu$;

(3) 设$f_n \in \mathrm{r}\mathscr{F}$, g可积,$g \leqslant f_n \uparrow f$,则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\lim_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu;$$

(4) 设$f_n \in \mathrm{r}\mathscr{F}$, g和h皆可积,

(A) 若$f_n \geqslant g\ (\forall n)$,则

$$\int_\Omega (\varliminf_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu,$$

(B) 若$f_n \leqslant h\ (\forall n)$,则

$$\int_\Omega (\varlimsup_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu;$$

(5) 设$f_n \in \mathrm{r}\mathscr{F}$, g和h皆可积,$g \leqslant f_n \leqslant h (\forall n)$, $f_n \to f$,则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu;$$

(6)　设 f 非负可积，$\nu(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu\ (A\in\mathscr{F})$，则 ν 是 $\mathscr{F}$ 上的可数可加的测度.

(7)　设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i,\mu_i)$ 是测度空间，μ_i 是 σ 有限的（即是 $\Omega_i=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_i^{(n)},\ A_i^{(n)}\in\mathscr{F}_i,\ \mu_i(A_i^{(n)})<\infty$）定义

$$\mu(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2),\ A_i\in\mathscr{F}_i\ (i=1,2).$$

由于 $\{A_1\times A_2:A_1\in\mathscr{F}_1,\ A_2\in\mathscr{F}_2\}$ 是半环，而 μ_i 又是 σ 有限的，所以上面定义的 μ 可以唯一地扩张到

$$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\triangleq\sigma(\{A_1\times A_2:\ A_i\in\mathscr{F}_i,\ i=1,2\})$$

上去而成一个 σ 有限的可数可加测度，仍记为 μ. 如果 $f:\Omega_1\times\Omega_2\mapsto\mathbf{R}$，且 $f\in \mathrm{r}(\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)^+$，则

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f\mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1=\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}f\mathrm{d}\mu_1\right)\mathrm{d}\mu_2.$$

上述有关实值函数的 Lebesgue 积分的 7 条性质，在一般测度与积分的书上（例如[23]）均可查到，故其证明在此从略.

对于积分 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 的写法，根据不同的目的，有各种不同的写法. 例如，为了简单（在不会混淆的情况下），写作 $\langle f,\mu\rangle$，或 $\int f\mathrm{d}\mu$，或 $\int f$；为了突出积分变量，写作 $\int_\Omega f(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$，或 $\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$. 由于有前述性质 7 (Fubini 定理)，对于重积分 $\int_{\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n}f\mathrm{d}(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)$，亦有各种不同的写法，如

$$\left(\int_{\Omega_1}\mathrm{d}\mu_1\cdots\int_{\Omega_n}\mathrm{d}\mu_n\right)f.$$

以后对任何拓扑空间 $(\Omega^*,\mathscr{T}^*)$，常用 $\mathscr{B}(\Omega^*)$ 或 $\sigma(\mathscr{T}^*)$ 或 $\mathscr{B}(\mathscr{T}^*)$ 表示 $\mathscr{T}^*$ 产生的 σ 代数，即全体 Borel 集.

作为这一节的结束，最后我们列举几个积分不等式.

设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$f,g\in \mathrm{r}\mathscr{F}$.

(1) Hölder 不等式

设$\langle|f|^p,\mu\rangle<\infty$, $\langle|g|^q,\mu\rangle<\infty$, $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\langle|fg|,\mu\rangle\leqslant\langle|f|^p,\mu\rangle^{\frac{1}{p}}\cdot\langle|g|^q,\mu\rangle^{\frac{1}{q}}.$$

当$p=q=2$,此不等式即化为 Schwartz 不等式.

(2) Minkowski 不等式

设$r\geqslant1$, $\langle|f|^r,\mu\rangle<\infty$, $\langle|g|^r,\mu\rangle<\infty$,则

$$\langle|f+g|^r,\mu\rangle^{\frac{1}{r}}\leqslant\langle|f|^r,\mu\rangle^{\frac{1}{r}}+\langle|g|^r,\mu\rangle^{\frac{1}{r}}.$$

(3) Jessen 不等式

设$\varphi:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$是凸函数,$\langle|f|,\mu\rangle<\infty$, $\langle|\varphi(f)|,\mu\rangle<\infty$,则

$$\varphi(\langle f,\mu\rangle)\leqslant\langle\varphi(f),\mu\rangle.$$

§5 诸收敛性及其关系

定义 5.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,(E,ρ)是度量空间,$\{f,f_n,n\geqslant1\}\subset M(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)\triangleq\{g:g\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(E)\}$.

(1) 若存在集合$N\in\mathscr{F}$, $\mu(N)=0$,使

$$\rho(f_n(\omega),f(\omega))\to0\quad(\text{当 }\omega\in N^c),$$

则称$\{f_n\}$ **μ-[a.e.]收敛**于f,记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f,\ \mu\text{-[a.e.]},\quad\text{或 } f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f.$$

当不会混淆时,此处μ常常省去.这里及以后N^c仍如第一章一样表示N的补集$\Omega-N$.

(2) 若对任何$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{\omega:\rho(f_n(\omega),f(\omega))>\varepsilon\})=0,$$

则称$\{f_n\}$ **依测度μ收敛**于f,记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,\ [\mu],\quad 或\ f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

当可数可加的测度 μ 是概率测度时，"依测度 μ 收敛"简称为"**概率收敛**". 概率测度多用 P 表示.

(3)　令

$$L^r(\Omega,\mathscr{F},\mu;E) = \{f: f\in \mathscr{F}/\mathscr{B}(E),\ \langle \rho(f,0)^r,\mu\rangle < \infty\},$$

如果 $\{f,f_n,n\geqslant 1\}\subset L^r(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\langle \rho(f,f_n)^r,\mu\rangle = 0,$$

则称 $\{f_n\}$ **在 $L^r(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$ 中收敛**于 f，记作 $f_n \xrightarrow{L^r(\mu)} f$ 或者

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,\ [L^r(\mu)],$$

此处 $r\in(0,\infty)$. 在无混淆的情况下，$L^r(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$ 常简记为 $L^r(\mu)$ 或 $L^r(\Omega)$.

(4)　设 $\{f,f_n,n\geqslant 1\}\subset M(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$，若对任何 $\varepsilon>0$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{\rho(f_n,f)\geqslant\varepsilon\}) < \infty,$$

则称 $\{f_n\}$ **完全收敛**到 f，记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,\ [\mathrm{c.}],\quad 或\ f_n \xrightarrow{\mathrm{c}} f$$

命题5.1　设 $\{f,f_n,n\geqslant 1\}\subset M(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$，$\mu(\Omega)=1$，则

(1)　$$f_n \xrightarrow{\mathrm{c}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\mathrm{a.e.}} f$$

$$\Longleftrightarrow \mu\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{\rho(f_n,f) < \frac{1}{k}\right\}\right\}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f \Longrightarrow \{f_n\}\ 存在子列\ \{f_{k_n}\}\ 使\ f_{k_n} \xrightarrow{\mathrm{a.e.}} f.$$

(2)　若 $\{f,f_n,n\geqslant 1\}\subset L^r(\Omega,\mathscr{F},\mu;E)$，$f_n \xrightarrow{L^r(\mu)} f\ (r\in(0,\infty))$，则

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

证明甚易,从略.

定理 5.1(Egorov) 设$\{f_n\}$,f 和 μ 如命题 5.1 中所定义. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, [a.e.],则对任何 $\delta>0$,存在 $A_\delta\in\mathscr{F}$,使 $\mu(A_\delta^c)<\delta$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\omega\in A_\delta}\rho(f_n(\omega),f(\omega))=0,$$

即是$\{f_n\}$几乎一致收敛到 f.

证 由于$\{f_n\}$在 A 上一致收敛到 f 的充要条件是对任何正整数 m,存在正整数 $n(m)$,使

$$A\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\rho(f_{n(m)+k},f)<\frac{1}{m}\right\},$$

而今有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, [a.e.],所以由命题 5.1 知:任给 $\varepsilon>0$,恒有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\rho(f_{n+k},f)\geqslant\varepsilon\}\right)=0.$$

所以,对每个正整数 m,存在正整数 $n(m)$ 使

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\rho(f_{n(m)+k},f)\geqslant\frac{1}{m}\right\}\right)\leqslant\frac{\delta}{2^m}.$$

于是取 $A_\delta^c=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\rho(f_{n(m)+k},f)\geqslant\dfrac{1}{m}\right\}$ 即为所求.

定义 5.2 设(Ω,ρ)是度量空间,$\mathscr{F}$是由 ρ 决定的拓扑所产生的 σ 代数,即 Ω 上的 Borel 集全体. 令 $\mathscr{F}_b=\{A\in\mathscr{F}:\text{diam }A<\infty\}$, $\mathscr{F}_k=\{A\in\mathscr{F}:\overline{A}$ 为紧集,即 A 为相对紧集$\}$, $\mathscr{H}_b=\{f:\Omega\mapsto\mathbf{R}$,且 f 为有界连续函数$\}$, $\mathscr{H}_k=\{f:\Omega\mapsto\mathbf{R}$,且 $f\in\mathscr{H}_b$, $\{f\neq0\}$ 为相对紧集$\}$. $M_b=\{\mu:\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上的可数可加测度,且 $\mu(\Omega)<\infty\}$, $M_k=\{\mu:\mu$ 是$\mathscr{F}$上的可数可加测度,且 $\forall A\in\mathscr{F}_k$,有 $\mu(A)<\infty\}$. 显然,$\mathscr{F}_b\supset\mathscr{F}_k$, $\mathscr{H}_b\supset\mathscr{H}_k$, $M_b\subset M_k$.

(1) 设$\{\mu,\mu_n,n\geqslant1\}\subset M_b$,称$\{\mu_n\}$**弱收敛**于 μ,如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\mathrm{d}\mu_n=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\quad(\forall f\in\mathscr{H}_b),$$

记之为 $\mu_n\overset{\mathrm{w}}{\Longrightarrow}\mu$.

(2)　设$\{\mu,\mu_n,n\geqslant 1\}\subset M_{\mathrm{k}}$，称$\{\mu_n\}$淡(vague)**收敛**于$\mu$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu_n=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu\quad(\forall f\in\mathscr{H}_{\mathrm{k}}),$$

记之为$\mu_n\overset{\mathrm{v}}{\Longrightarrow}\mu$.

显然，$\mu_n\overset{\mathrm{w}}{\Longrightarrow}\mu$蕴含了$\mu_n\overset{\mathrm{v}}{\Longrightarrow}\mu$.

定理 5.2　设(Ω,ρ)是完备可分度量空间，则$\mu_n\overset{\mathrm{w}}{\Longrightarrow}\mu$与$\mu_n\overset{\mathrm{v}}{\Longrightarrow}\mu$等价的充要条件是$(\Omega,\rho)$是紧的.

证　由于(Ω,ρ)是完备可分度量空间，用第一章定理6.5与定理6.4可知：

(Ω,ρ)是紧的$\Longleftrightarrow(\Omega,\rho)$全囿$\Longleftrightarrow\mathrm{diam}\,\Omega<\infty$.

若$\mathrm{diam}\,\Omega<\infty$，显然弱收敛与淡收敛等价.

若$\mathrm{diam}\,\Omega=\infty$，则存在点列$\{x_n:n\geqslant 0\}$使$\rho(x_n,x_0)\to\infty$（当$n\to\infty$时）. 令

$$\mu_n(A)=\begin{cases}1, & 若\ x_n\in A,\\ 0, & 若\ x_n\,\overline{\in}\,A,\end{cases}\quad \mu(A)\equiv 0,$$

则对任何$f\in\mathscr{H}_{\mathrm{k}}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu_n=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu=0,$$

即$\mu_n\overset{\mathrm{v}}{\Longrightarrow}\mu$. 但是若取$f\equiv 1$，则$f\in\mathscr{H}_{\mathrm{b}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu_n=1\neq 0=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu,$$

此即$\{\mu_n\}$不弱收敛到μ. 定理证毕.

定理 5.3　设(Ω_1,ρ_1)和(Ω_2,ρ_2)皆为可分度量空间，$\mathscr{F}_i$是由ρ_i决定的拓扑所产生的σ代数，$M_{\mathrm{b}}^{(i)}=\{\mu:\mu$是$\mathscr{F}_i$上的可数可加测度，且$0<\mu(\Omega)<\infty\}$，$\{\mu_n^{(i)},\mu^{(i)}\}\subset M_{\mathrm{b}}^{(i)}$ $(i=1,2)$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n^{(i)}(\Omega_i)=\mu^{(i)}(\Omega_i)$，则

$$(\mu_n^{(1)}\times\mu_n^{(2)})\xrightarrow{w}(\mu^{(1)}\times\mu^{(2)})$$

的充要条件是 $\mu_n^{(i)}\xrightarrow{w}\mu^{(i)}$ $(i=1,2)$.

证明请参见[2] p.21 定理 3.2.

定理5.4 设(Ω,ρ)是度量空间,$\mathscr{F}$是由ρ决定的拓扑所产生的σ代数. $\{\mu,\mu_n,n\geqslant 1\}$是$\mathscr{F}$上的一族概率测度,则下列诸条件等价:

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f\mathrm{d}\mu_n=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 对一切有界的一致连续的实值函数f成立;

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$ ($\forall$ 闭集 F);

(4) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$ ($\forall$ 开集 G);

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$ (对μ的连续集A成立,所谓A是μ之连续集,就是$\mu(A^\circ)=\mu(A)=\mu(\bar{A})$,亦即对$A$之边界$\partial A\triangleq\bar{A}-A^\circ$,有$\mu(\partial A)=0$).

证 (1)$\Longrightarrow$(2)是显然的.

(2)$\Longrightarrow$(3). 任取闭集F及任一正整数m,可取有界的一致连续的实值函数f_m,使

$$f_m(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in F,\\ 0, & 若\ x\in\left\{y:\rho(y,F)\geqslant\dfrac{1}{m}\right\},\end{cases}$$

$$0\leqslant f_m\leqslant 1,\quad f_m\to\mathbf{1}_F.$$

事实上,令

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & 若\ t\leqslant 0,\\ 1-t, & 若\ 0<t<1,\\ 0, & 若\ t\geqslant 1,\end{cases}$$

$$f_m(x)=\varphi(m\rho(x,F)),$$

则$\{f_n:n\geqslant 1\}$即为所求.由于(2)成立,所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(F)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_\Omega f_m\mathrm{d}\mu_n=\int_\Omega f_m\mathrm{d}\mu.$$

再令$m\to\infty$并用积分的控制收敛定理可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(F)\leqslant\int_\Omega \mathbf{1}_F\mathrm{d}\mu=\mu(F).$$

此即(3)成立.

(3)$\Longleftrightarrow$(4).注意μ_n及μ都是概率测度即得(3)$\Longleftrightarrow$(4).

(4)$\Longrightarrow$(5).设(4)成立,则(3)亦成立.由(3)和(4)即得(5).

(5)$\Longrightarrow$(1).任取有界连续函数f,令$a<f<b$.由于$\mu(\Omega)=1$,对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N和实数$a_1,a_2,\cdots,a_N$,满足:

(i) $a=a_0<a_1<\cdots<a_N=b$;

(ii) $a_j-a_{j-1}<\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,N$;

(iii) $\mu(\{x:f(x)=a_i\})=0,\ i=1,\cdots,N$.

令$A_i=\{x:a_{i-1}\leqslant f(x)<a_i\},\ i=1,\cdots,N$,则$\{A_i:1\leqslant i\leqslant N\}$是一族两两不交的$\mu$的连续集,$\bigcup_{i=1}A_i=\Omega$.再令

$$f^*=\sum_{i=1}^N a_{i-1}\mathbf{1}_{A_i},$$

则$|f-f^*|\leqslant\varepsilon$,于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega f\mathrm{d}\mu_n-\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right|\\&\leqslant\left|\int_\Omega(f-f^*)\mathrm{d}\mu_n\right|+\left|\int_\Omega f^*\mathrm{d}\mu_n-\int_\Omega f^*\mathrm{d}\mu\right|+\left|\int_\Omega(f^*-f)\mathrm{d}\mu\right|\\&\leqslant\varepsilon(\mu_n(\Omega)+\mu(\Omega))+\sum_{i=1}^N|a_{i-1}|\,|\mu_n(A_i)-\mu(A_i)|.\end{aligned}$$

由Ω和A_i都是μ的连续集,在上式中先令$n\to\infty$后令$\varepsilon\to 0$,由(5)即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f\mathrm{d}\mu_n = \int_{\Omega} f\mathrm{d}\mu.$$

定理证毕.

§6 赋号测度的 Hahn 分解与 Lebesgue 分解

定义 6.1 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间,$\varphi:\mathscr{F}\mapsto[-\infty,\infty]$. 若$\varphi(\varnothing)=0$且$\varphi$满足可数可加性,则称$\varphi$是一个**赋号测度**.易知赋号测度$\varphi$必满足:

(1) 不可能存在$A,B\in\mathscr{F}$, $A\neq B$,使$\varphi(A)=\infty$而$\varphi(B)=-\infty$,

(2) 若$A\in\mathscr{F}$, $\varphi(A)\in(-\infty,\infty)$, $B\subset A$,则$\varphi(B)\in(-\infty,\infty)$.

定理 6.1(Hahn 分解) 设φ是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的赋号测度,则存在$M,N\in\mathscr{F}$, $M\cup N=\Omega$, $M\cap N=\varnothing$,满足:

(a) $\varphi(A\cap M)=\sup\limits_{B\in A\cap\mathscr{F}}\varphi(B)\ (\forall A\in\mathscr{F})$;

(b) $\varphi(A\cap N)=\inf\limits_{B\in A\cap\mathscr{F}}\varphi(B)\ (\forall A\in\mathscr{F})$;

(c) 若令$\varphi^+(C)=\varphi(C\cap M)$, $\varphi^-(C)=\varphi(C\cap N)$, $|\varphi|(C)=\varphi^+(C)+\varphi^-(C)$,则$\varphi^+,\varphi^-,|\varphi|$都是$\mathscr{F}$上的可数可加的测度,且$\varphi^+(\Omega)$和$\varphi^-(\Omega)$中必至少有一个为有限数,$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$.

称(M,N)为φ的一组**Hahn 分解**,称$\varphi^+,\varphi^-,|\varphi|$分别为$\varphi$的**上、下、全变差**.

定义 6.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$\varphi:\mathscr{F}\mapsto[-\infty,\infty]$. 若$\mu(A)=0\Longrightarrow\varphi(A)=0$,则称$\boldsymbol{\varphi}$**对**$\boldsymbol{\mu}$**绝对连续**,记作$\varphi\ll\mu$.若存在$N\in\mathscr{F}$, $\mu(N)=0$,使得对一切$A\in\mathscr{F}$,都有$\varphi(A\cap(\Omega-N))=0$,则称$\boldsymbol{\varphi}$**对**$\boldsymbol{\mu}$**奇异**,记作$\varphi\perp\mu$.

定理 6.2(Lebesgue 分解) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,φ是$\mathscr{F}$

上的赋号测度,且 μ 与 φ 都是 σ 有限的,则 φ 可表示为

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s,\ \varphi_c \ll \mu,\ \varphi_s \perp \mu.$$

而且上述分解是唯一的.(φ_c, φ_s)称为 φ 的一组 Lebesgue 分解.

自此以后,若不特别声明,所述测度都是可数可加的测度.

第三章　Banach 空间、Banach 代数与算子半群

§1　Banach 空间的基本概念

定义 1.1　设 $\mathbf{B}$ 是数域 Z(实数域或复数域)上的线性空间(或者称为向量空间),如果存在映射:

$$p: \mathbf{B} \mapsto [0, \infty)$$

满足:

(1)　$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ $(\forall \alpha \in Z,\ x \in \mathbf{B})$;

(2)　$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ $(\forall x, y \in \mathbf{B})$;

(3)　$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(\forall x \in \mathbf{B})$,

则称$(\mathbf{B}, p)$为**赋范线性空间**,$p(x)$称为 x 的**范数**,x 的范数通常用符号 $\| x \|$ 记之,于是赋范线性空间常用$(\mathbf{B}, \| \cdot \|)$表示. 条件(2)通常称为“**三角不等式**”.

显然,若取 $\rho(x, y) = \| x - y \|$,则 ρ 是 $\mathbf{B}$ 上的一个度量,于是$(\mathbf{B}, \rho)$是线性度量空间,如果它是完备的,则称$(\mathbf{B}, \| \cdot \|)$为**Banach空间**,总之,Banach 空间即是完备赋范线性空间. Banach 空间上的拓扑(在不特别声明的情况下),通常是指由范数 $\| \cdot \|$ 决定的拓扑,亦即由距离 $\rho(x, y) = \| x - y \|$ 决定的拓扑,这种拓扑,通常称为**强拓扑**,由它所决定的极限称为**强极限**.

例 1.1　设 $\mathbf{B} = \mathbf{R}$, $\| x \| = |x|$ $(\forall x \in \mathbf{R})$,则$(\mathbf{B}, \| \cdot \|)$是 Banach 空间.

例 1.2　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是数域 Z 上的 Banach 空间，$L^r\triangleq L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})\triangleq\{f:f\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B}),\langle\|f\|^r,P\rangle<\infty\}$，$r\in[1,\infty)$. 任取 $f,g\in L^r$，$\alpha,\beta\in Z$，定义

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)\quad(\forall\, x\in\Omega),$$

$\|f\|_r=\langle\|f\|^r,P\rangle^{\frac{1}{r}}$，则$(L^r,\|\cdot\|_r)$是 Banach 空间(若 $f,g\in L^r$，$P(f\neq g)=0$，则视 f 与 g 为同一元素).

证　(1)　显然$(L^r,\|\cdot\|_r)$是线性空间.

(2)　其次证明$\|\cdot\|_r$ 是L^r 上一个范数. 定义 1.1 中范数的第 1 和第 3 个条件现在显然成立，所以，只证范数的第 2 个条件，即所谓“三角不等式”.

当 $r=1$ 时，由$\|\cdot\|$满足三角不等式，立即推出$\|\cdot\|_r$ 满足三角不等式.

当 $r>1$ 时，取 $q>1$，使$\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$. 任取 $f,g\in L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，则 $f+g\in L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，从而$\|f\|,\|g\|,\|f+g\|\in L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{R})$，于是$\|f+g\|^{r/q}\in L^q(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{R})$. 由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\|f\|\cdot\|f+g\|^{\frac{r}{q}}\mathrm{d}P\\&\qquad\leqslant\left(\int_\Omega\|f\|^r\mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega\|f+g\|^r\mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

所以由$\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$，即 $r-1=\frac{r}{q}$及上式得

$$\begin{aligned}\|f+g\|_r^r&\leqslant\int_\Omega(\|f\|+\|g\|)\cdot\|f+g\|^{r-1}\mathrm{d}P\\&=\int_\Omega\|f\|\cdot\|f+g\|^{\frac{r}{q}}\mathrm{d}P\\&\quad+\int_\Omega\|g\|\cdot\|f+g\|^{\frac{r}{q}}\mathrm{d}P\end{aligned}$$

$$\leqslant (\|f\|_r + \|g\|_r)\left(\int_\Omega \|f+g\|^r \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\|f\|_r + \|g\|_r)(\|f+g\|_r)^{\frac{r}{q}}$$

$$= (\|f\|_r + \|g\|_r)(\|f+g\|_r^{r-1})$$

所以 $\|f+g\|_r \leqslant \|f\|_r + \|g\|_r$.

(3) 最后证明完备性. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 中的 Cauchy 序列, 易证 $\lim\limits_{n,m\to\infty} P(\|f_m - f_n\| \geqslant \varepsilon) = 0\ (\forall \varepsilon > 0)$, 于是存在 $f \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$, 使

$$f_n \xrightarrow{P} f.$$

从而 $\{f_n\}$ 有子列 $\{f_{k_n}\}$ 使 $f_{k_n} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 推证

$$f_{k_n} \xrightarrow{L^r(P)} f.$$

由于 $\{f_{k_n}: n \geqslant 1\}$ 是 $L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 中的 Cauchy 序列, 所以对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使

$$\|f_{k_n} - f_{k_m}\|_r^r < \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant N).$$

又因为

$$\|f_{k_n} - f_{k_m}\| \xrightarrow{\text{a.e.}} \|f - f_{k_m}\| \quad (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

所以

$$\int_\Omega \|f - f_{k_m}\|^r \mathrm{d}P \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_{k_n} - f_{k_m}\|^r \mathrm{d}P \leqslant \varepsilon^r \quad (m \geqslant N).$$

再注意 $f_{k_m} \in L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 及 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知:

$$f \in L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B}), \quad \text{且 } f_{k_n} \xrightarrow{L^r(P)} f.$$

而全序列 $\{f_n: n \geqslant 1\}$ 是 $L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 中的 Cauchy 序列, 所以由

$$f_{k_n} \xrightarrow{L^r(P)} f$$

可得

$$f_n \xrightarrow{L^r(P)} f.$$

完备性得证. 总之,$L^r(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$是 Banach 空间.

例 1.3 设$(E,\mathscr{E})$是任一可测空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是数域 Z 上的 Banach空间. 记 $M_b=M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{B})\triangleq\{f:f\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{B}),\sup\limits_{x\in E}\|f(x)\|<\infty\}$,特别地,当$(\mathbf{B},\|\cdot\|)=(\mathbf{R},|\cdot|)$时,简记 $\mathscr{M}=M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{R})$,即 $\mathscr{M}=\{f:f\in b\mathscr{E}\}$是 E 上的有界 $\mathscr{E}$ 可测的实值函数全体.

在 $M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{B})$中按通常的函数的线性运算来定义

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

(对任何 $\alpha,\beta\in Z$, $f,g\in M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{B})$, $x\in E$),并定义

$$\|f\|_b=\sup_{x\in E}\|f(x)\|,$$

则$(M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{B}),\|\cdot\|_b)$是 Banach 空间.

证 显然$(M_b(E,\mathscr{E};\mathbf{B}),\|\cdot\|_b)$是赋范线性空间,下证完备性. 设$\{f_n:n\geqslant 1\}$是此空间中的 Cauchy 序列. 任取 $\varepsilon>0$,均存在 $N=N(\varepsilon)$使

$$\|f_m(x)-f_n(x)\|<\varepsilon\quad(\forall\, m,n\geqslant N,\ x\in E).$$

但$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是 Banach 空间,利用它的完备性可知:存在 $f\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$,使

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|=0\quad(\forall\, x\in E),$$

于是对任何 $x\in E$,存在 $n(x)\geqslant N$,使

$$\|f_{n(x)}(x)-f(x)\|<\varepsilon\quad(\forall\, x\in E).$$

所以

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in E}\|f_m(x)-f(x)\|\\&\qquad\leqslant\sup_{x\in E}\|f_m(x)-f_{n(x)}(x)\|+\sup_{x\in E}\|f_{n(x)}(x)-f(x)\|\\&\qquad<2\varepsilon\quad(\text{当 } m\geqslant N).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知 $\|f_n-f\|_b\to 0$. 完备性证毕.

下面我们再列举几个以后常用的 Banach 空间,但不证明了.

例 1.4 设$(E,\mathscr{E})$是任一可测空间,令

$\mathscr{L}=\{\varphi:\varphi$ 是定义在 $\mathscr{E}$ 上的可数可加的实值的集合函数$\}$,

在 $\mathscr{L}$ 中定义线性运算如下:

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(A)=c_1\varphi_1(A)+c_2\varphi_2(A)$$

(其中 $\varphi_i\in\mathscr{L}$, c_i 是实数,$A\in\mathscr{E}$, $i=1,2$),再定义范数如下:

$$\|\varphi\|=|\varphi|(E)\quad(\varphi\in\mathscr{L}),$$

其中$|\varphi|=\varphi^{+}+\varphi^{-}$, $\varphi^{+}(A)=\varphi(AF)$, $\varphi^{-}(A)=\varphi(AG)$, (F,G)是 φ 的一组 Hahn 分解,$A\in\mathscr{E}$. 则$(\mathscr{L},\|\cdot\|)$是实数域上的 Banach空间.

例 1.5 设 $C([0,1])\triangleq\{f:[0,1]\mapsto\mathbf{R}^d$,而且 f 连续$\}$,在 $C([0,1])$中按通常的函数线性运算来定义 $C([0,1])$中的线性运算,并定义 $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, $|\cdot|$是 $\mathbf{R}^d$ 中的欧氏范数. 则$(C[0,1],\|\cdot\|)$是 Banach 空间.

定义 1.2 设$(\mathbf{B}_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,2)$是数域 Z 上的赋范线性空间,$\mathscr{D}(T)\subset\mathbf{B}_1$, $T:\mathscr{D}(T)\mapsto\mathbf{B}_2$.

称算子(映射)T 是**泛函**,若 $\mathbf{B}_2=\mathbf{R}$;称 T 是**抽象函数**,若 $\mathscr{D}(T)\subset\mathbf{R}$. $\mathscr{D}(T)$为 T 之定义域.

称 T 是**线性的**,若

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)\quad(x,y\in\mathscr{D}(T),\ \alpha,\beta\in Z).$$

称 T 是**有界的**,如果存在正数 K,使

$$\|T(x)\|_2\leqslant K\|x\|_1\quad(\forall x\in\mathscr{D}(T)).$$

命题 1.1 设$(\mathbf{B}_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,2)$是数域 Z 上的赋范线性空间,$\mathscr{D}(T)\subset\mathbf{B}_1$, $T:\mathscr{D}(T)\mapsto\mathbf{B}_2$, T 是线性的,则 T 是连续算子的充要条件是:T 是有界的.

证明甚易,请参见[83] p.43.

定义 1.3 设$(\mathbf{B}_i,\|\cdot\|_i)$ $(i=1,2)$是数域 Z 上的 Banach 空间,$\mathscr{L}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)$表示由 $\mathbf{B}_1$ 到 $\mathbf{B}_2$ 的有界线性算子全体. 对任何 $\alpha,\beta\in Z$, $T_1,T_2\in\mathscr{L}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)$,定义

$$(\alpha T_1+\beta T_2)(x)=\alpha T_1(x)+\beta T_2(x)\quad(x\in\mathbf{B}_1),$$

$$\|T_i\|_l=\sup_{\|x\|_1\leqslant 1}\|T_i(x)\|_2,$$

易证：$(\mathscr{L}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2),\|\cdot\|_l)$是Banach空间，且

$$\|T_i\|_l=\sup_{\|x\|_1=1}\|T_i(x)\|_2.$$

定理 1.1(Hahn-Banach) 设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是赋范线性空间，M是$\mathbf{B}$的线性子空间，

$$T_0:M\mapsto\mathbf{R}.$$

若T_0是连续线性泛函，则存在由$\mathbf{B}$到$\mathbf{R}$的连续线性泛函T，使

$$T(x)=T_0(x)\quad(\text{当 }x\in M\text{ 时})$$

且$\|T\|_l=\|T_0\|_l$(算子范数之定义见定义1.3).

即是：赋范线性空间中的线性子空间上定义的连续线性泛函可以保范地延拓到全空间上去而成一连续线性泛函.

证明参见[83] p.106.

定理 1.2(Hahn-Banach) 设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是赋范线性空间，$x_0\in\mathbf{B}$, $x_0\neq 0$，则存在连续线性泛函

$$f_0:\mathbf{B}\mapsto\mathbf{R},$$

使$f_0(x_0)=\|x_0\|$, $\|f_0\|_l=1$.

证明参见[83] p.108.

此定理说明：非不足道的连续线性泛函是存在的，亦即全体连续线性泛函有“足够多”.

定理 1.3(Hahn-Banach) 设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是赋范线性空间，$x,y\in\mathbf{B}$，如果对任何$f\in\mathscr{L}(\mathbf{B},\mathbf{R})$都有$f(x)=f(y)$，则$x=y$.

证 这是定理1.2的推论.

§2 Bochner积分

定义 2.1 设$\mathbf{B}$是一个Banach空间.

(1) 设 $f_n, f\in \mathbf{B}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$,则称 $\{f_n\}$ **强收敛到** f,或称 f 是 $\{f_n\}$ 的**强极限**,记之为 $f=(\mathrm{s})\lim\limits_{n\to\infty}f_n$,或 $f_n\xrightarrow{(\mathrm{s})}f$,(当 $n\to\infty$时).

(2) 设 $t\to f_t$ 是定义在$[a,b]$上取值于 $\mathbf{B}$ 的抽象函数,$t_0\in[a,b]$.若

$$(\mathrm{s})\lim_{t\to t_0} f_1=f_{t_0},$$

则称 f_t **在 t_0 强连续**.如果 f_t 在$[a,b]$上每一点都强连续,则说 f_t **在$[a,b]$上强连续**.

若存在 $g_{t_0}\in\mathbf{B}$,使

$$(\mathrm{s})\lim_{h\to 0}\frac{f_{t_0+h}-f_{t_0}}{h}=g_{t_0},$$

则称 f_t **在 t_0 是强可导的**,g_{t_0} 称为 f_t 在 t_0 的**强导数**,记之为$f'_{t_0}=g_{t_0}$或$(\mathrm{s})\left.\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=g_{t_0}$.如果 f_t 在$[a,b]$上每一点都是强可导的,则说 f_t **在$[a,b]$上强可导**.

例如,若 $\mathbf{B}=\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ 的定义如§1 例 1.3,则 $\mathscr{M}$ 中之强收敛即数学分析中的一致收敛.

定义 2.2 设$\mathscr{F}^1$为 $\mathbf{R}$ 中一切 Lebesgue 可测集,μ^*是$\mathscr{F}^1$上的 Lebesgue 测度,遂得完备测度空间$(\mathbf{R},\mathscr{F}^1,\mu^*)$. $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间,$S\in\mathscr{F}^1$, $f_t:S\to\mathbf{B}$,称 f_t 在S 上关于 $\mathscr{F}^1$**强可测**(简称强可测),如果存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,使

$$f_t=(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\ [\mathrm{a.e.}]\ \mathrm{in}\ S\ (\mu^*).$$

(所谓 g_t 是简单抽象函数,意即 $g_t=\sum\limits_{i=1}^{k}c_i\mathbf{1}_{A_i}(t)$, $c_i\in\mathbf{B}$, A_i 是 S 中的可测子集,$A_1,\cdots,A_k$ 两两不交,$\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i=S$.)

命题 2.1 (甲) 若$\{g_t^{(n)}\}$是强可测函数列,且

$$g_t = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} g_t^{(n)}, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*),$$

则 g_t 亦为强可测函数.

（乙） 若 f_t 是强可测函数,则

（1） $\| f_t \|$ 是实变实值的 Lebesgue 可测函数;

（2） 存在简单抽象函数列 $\{f_t^{(n)}\}$,使

$$\| f_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \| \quad (n \geqslant 1,\ t \in S),$$

$$f_t = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)}, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*).$$

证 （甲）显然成立.下证(乙).

（1） 对简单抽象函数 $f_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}(t)$,总有

$$\| f_t^{(n)} \| = \sum_{i=1}^{k_n} \| c_i^{(n)} \| \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}(t)$$

是实变实值 Lebesgue 可测函数,但 f_t 强可测,故必存在简单抽象函数列 $\{f_t^{(n)}\}$ 使

$$f_t = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)}, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*).$$

由范数的连续性得

$$\| f_t \| = \lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)} \|, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*).$$

而今 $\| f_t^{(n)} \|$ 是 Lebesgue 可测的,故 $\| f_t \|$ 亦然.

（2） 设 $\{g_t^{(n)}\}$ 是简单抽象函数列,满足

$$f_t = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} g_t^{(n)}, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*),$$

取

$$f_t^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \| g_t^{(n)} \| > 2 \| f_t^{(n)} \|, \\ g_t^{(n)}, & \text{反之}, \end{cases}$$

则 $\{f_t^{(n)}\}$ 即为所求.

定义 2.3 （Bochner 积分） 设 $(\mathbf{R}, \mathscr{F}^1, \mu^*)$, S, $\mathbf{B}$ 如定义 2.2. $f_t : S \mapsto \mathbf{B}$, f_t 是强可测的,且 $\| f_t \|$ 在 S 上 Lebesgue 可积.

（1） 若 f_t 是简单抽象函数:

$$f_t = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}(t),$$

$A_i \in \mathscr{F}^1$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $c_i \in \mathbf{B}$,则定义 f_t(在 S 上)的 **Bochner 积分**为

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mu^*(A_i),$$

记之为

$$(\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu^*(A_i).$$

注意:$\| f_t \| = \sum_{i=1}^{n} \| c_i \| \mathbf{1}_{A_i}(t)$,而又设

$$\int_S \| f_t \| \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $\| c_i \| \mu^*(A_i) < \infty$ $(i = 1, \cdots, n)$. 因此

$$\text{“}\mu^*(A_i) = \infty \Longrightarrow c_i = 0\text{”}.$$

若约定 $0 \cdot \infty = 0$,则上面的积分恒为 $\mathbf{B}$ 中一元素. 这说明对满足定义 2.3 中的条件的简单抽象函数 f_t,其 Bochner 积分必存在. 而积分值的唯一性是显然的.

(2) 设 f_t 是一般的强可测函数,且 $\| f_t \|$ 在 S 上 Lebesgue 可积.

若对任意一列简单抽象函数

$$f_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}(t)$$

来说,只要 $\| f_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \|$,而且

$$f_t = (\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} f_t^{(n)}, \ [\text{a.e.}] \text{ in } S \ (\mu^*),$$

均存在 $h \in \mathbf{B}$,使

$$h = (\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} \mu^*(A_i^{(n)}) = (\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} \left((\mathrm{s}) \int_S f_t^{(n)} \mathrm{d}t \right),$$

而且 h 不依赖$\{f_t^{(n)}\}$的选取,则称 f_t 在 S 上是 **Bochner 可积的**,h 称为其积分值,记之为

$$h=(\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t.$$

对于任何一个可测子集 $S_1 \subset S$,定义

$$(\mathrm{s})\int_{S_1} f_t \mathrm{d}t=(\mathrm{s})\int_S \mathbf{1}_{S_1}(t) f_t \mathrm{d}t.$$

定理 2.1 设 f_t 强可测,且 $\| f_t \|$ 在 S 上是 Lebesgue 可积的,则 f_t 在 S 上 Bochner 可积.

证 由命题 2.1,可取简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,使

$$\lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)}-f_t \| =0,\ [\text{a.e.}]\ \text{in}\ S\ (\mu^*), \tag{2.1}$$

$$\| f_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \| \quad (n\geqslant 1,\ t\in S). \tag{2.2}$$

由(2.1),(2.2)并应用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\left\|(\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)}\mathrm{d}t-(\mathrm{s})\int_S f_t^{(m)}\mathrm{d}t\right\| \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty}\int_S \| f_t^{(n)}-f_t^{(m)} \| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty}\left(\int_S \| f_t^{(n)}-f_t \| \mathrm{d}t+\int_S \| f_t-f_t^{(m)} \| \mathrm{d}t\right) \\
&=\left(\int_S \lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)}-f_t \| \mathrm{d}t+\int_S \lim_{m\to\infty} \| f_t-f_t^{(m)} \| \mathrm{d}t\right) \\
&=0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

由 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 的完备性得知:存在 $h\in\mathbf{B}$,使得

$$h=(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)}\mathrm{d}t\right).$$

若有两列简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,$\{g_t^{(n)}\}$,使得

$$\| f_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \|,\quad \| g_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \| \quad (n\geqslant 1),$$

$$f_t=(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)}=(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} g_t^{(n)},\ [\text{a.e.}]\ \text{in}\ S\ (\mu^*),$$

推证:

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}\mathrm{d}t=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

(注意:如前所证,(2.4)两端的极限存在.)事实上,作

$$h_t^{(n)}=\begin{cases}f_t^{(n)}, & \text{当 } n \text{ 为奇数},\\ g_t^{(n)}, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$$

则 $\| h_t^{(n)}\| \leqslant 2\| f_t\|\ (n\geqslant 1)$, $\{h_t^{(n)}\}$是简单抽象函数列,且

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}h_t^{(n)},\ [\text{a.e.}]\text{ in } S\ (\mu^*).$$

因此,必存在 $h\in\mathbf{B}$,使

$$h=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S h_t^{(n)}\mathrm{d}t,$$

但是 $\left\{(s)\int_S f_t^{(n)}\mathrm{d}t\right\}$, $\left\{(s)\int_S g_t^{(n)}\mathrm{d}t\right\}$都是$\left\{(s)\int_S h_t^{(n)}\mathrm{d}t\right\}$的子序列,所以

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}\mathrm{d}t=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}\mathrm{d}t=h.$$

至此,定理 2.1 得证.

系 2.1 设 f_t 是强可测的,则下列陈述等价:

(1) $\| f_t\|$ 在 S 上 Lebesgue 可积;

(2) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,使$\| f_t^{(n)}\|$ Lebesgue 可积 $(n\geqslant 1)$,

$$(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)}=f_t,\ [\text{a.e.}]\text{ in } S\ (\mu^*),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \| f_t^{(n)}-f_t\|\mathrm{d}t=0,\quad \| f_t^{(n)}\|\leqslant 2\| f_t\|.$$

(3) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,使

$$(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)}=f_t,[\text{a.e.}]\text{ in } S\ (\mu^*),$$

$\lim_{n\to\infty}\int_S \| f_t^{(n)}-f_t\|\mathrm{d}t=0$, $\| f_t^{(n)}\|$ Lebesgue 可积 $(n\geqslant 1)$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设(1)成立,因 f_t 是强可测的,由命题 2.1 得知存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$,使

$$(s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)} = f_t,\ [\text{a.e.}]\ \text{in}\ S\ (\mu^*),$$

$\| f_t^{(n)} \| \leqslant 2 \| f_t \|$，从而 $\| f_t^{(n)} \|$ Lebesgue 可积. 由 $\| f_t^{(n)} - f_t \| \leqslant 3 \| f_t \|$，及 $\| f_t \|$ 在 S 上 Lebesgue 可积，用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \| f_t^{(n)} - f_t \| \, dt = \int_S \lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)} - f_t \| \, dt = 0.$$

(2)⟹(3). 显然成立.

(3)⟹(1). 设(3)成立. 取 $\{f_t^{(n)}\}$ 满足(3)中条件. 由

$$\| f_t \| \leqslant \| f_t^{(n)} \| + \| f_t^{(n)} - f_t \|,$$

$\| f_t^{(n)} \|$ 在 S 上 Lebesgue 可积，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_S \| f_t^{(n)} - f_t \| \, dt = 0$，可知 $\| f_t \|$ 在 S 上 Lebesgue 可积. 系 2.1 得证.

命题 2.2　设 f_t, g_t 在 S 上 Bochner 可积，则

(1)　$\alpha f_t + \beta g_t$ 在 S 上 Bochner 可积($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)，且

$$(s)\int_S (\alpha f_t + \beta g_t) dt = \alpha \cdot (s)\int_S f_t dt + \beta \cdot (s)\int_S g_t dt.$$

(2)　若 $A_n \in \mathscr{F}$, $A_n \subset S$, $A_n \cap A_m = \varnothing$ ($m \neq n$)，则有

$$(s)\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f_t dt = \sum_{n=1}^{\infty} (s)\int_{A_n} f_t dt. \tag{2.5}$$

(3)　$$\left\| (s)\int_S f_t dt \right\| \leqslant \int_S \| f_t \| dt. \tag{2.6}$$

定理 2.2(控制收敛定理)　设 $\{f_t^{(n)} : n \geqslant 1\}$ 是一串定义在 S 上的 Bochner 可积的抽象函数，而且 $\| f_t^{(n)} \| \leqslant \| g_t \|$，$\| g_t \|$ Lebesgue 可积，

$$f_t = (s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)},\ [\text{a.e.}]\ \text{in}\ S\ (\mu^*), \tag{2.7}$$

则 f_t 在 S 上也 Bochner 可积，而且

$$(s)\int_S f_t dt = (s)\lim_{n\to\infty} (s)\int_S f_t^{(n)} dt. \tag{2.8}$$

证　由(2.7)及范数的连续性有

$$\| f_t \| = \lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)} \|, \ [\text{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*), \tag{2.9}$$

由(2.7)知 f_t 是强可测的,从而 $\| f_t \|$ 是 Lebesgue 可测的.显然,由(2.9)及 $\|f_t^{(n)}\| \leqslant \|g_t\|$, $\|g_t\|$ 是 Lebesgue 可积的得知 $\|f_t\|$ 是 Lebesgue 可积的.因此,由定理 2.1 得知 f_t 是 Bochner 可积的.又因为

$$\left\| (\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)} \mathrm{d}t - (\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_S \| f_t^{(n)} - f_t \| \mathrm{d}t,$$

$\| f_t^{(n)} - f_t \| \leqslant 2 \| g_t \|$, $\| g_t \|$ 是 Lebesgue 可积的,

$$\lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)} - f_t \| = 0, \ [\text{a.e.}] \text{ in } S\ (\mu^*),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \left\| (\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)} \mathrm{d}t - (\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_S \| f_t^{(n)} - f_t \| \mathrm{d}t \\
&= \int_S \lim_{n\to\infty} \| f_t^{(n)} - f_t \| \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

定理 2.2 得证.

定理 2.3 若 f_t 在(a,b)上强连续,则 f_t 在(a,b)上是强可测的.若还有

$$\int_{(a,b)} \| f_t \| \mathrm{d}t < \infty, \tag{2.10}$$

则 f_t 在(a,b)上是 Bochner 可积的.(a 可以是 $-\infty$, b 可以是 ∞.)

证 取 $b_n > a_n$, $b_n \uparrow b$, $a_n \downarrow a$,由 f_t 在$[a_n, b_n]$上强连续得知 f_t 在$[a_n, b_n]$上一致强连续,令

$$f_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}(t), \ t \in (a,b), \ n \geqslant 1,$$

$$A_i^{(n)} = \left[a_n + \frac{i-1}{k_n}(b_n - a_n), a_n + \frac{i}{k_n}(b_n - a_n) \right],$$

$$c_i^{(n)} = f_{a_n + \frac{i}{k_n}(b_n - a_n)}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{b_n - a_n}{k_n} = 0,$$

则 $\{f_t^{(n)}\}$ 就是一串强收敛到 f_t 的简单抽象函数,此即 f_t 是强可测的.再注意(2.10)并利用定理 2.1 得知 f_t 在 (a,b) 上是 Bochner 可积的.

系 2.2 若 f_t 在 $[a,b]$ 上强连续,a,b 是实数,则 f_t 不仅在 $[a,b]$ 上强可测而且是 Bochner 可积的.

证 由 f_t 在 $[a,b]$ 上强连续,得 $\|f_t\|$ 在 $[a,b]$ 上是实变实值连续函数,由定理 2.3 即得系 2.2.

定理 2.4 若 f_t 在 S 上是 Bochner 可积的,$\|f_t\|$ 在 S 上 Lebesgue 可积,F 是由 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}$ 的有界线性算子,则 $F(f_t)$ 在 S 上也是 Bochner 可积的,而且

$$(\mathrm{s})\int_S F(f_t)\mathrm{d}t = F\left((\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t\right). \tag{2.11}$$

证 (1) 对简单抽象函数来说,(2.11)显然成立.

(2) 对一般抽象函数 f_t 来说,由 f_t Bochner 可积更知 f_t 是强可测的,从而存在简单抽象函数列 $\{f_t^{(n)}\}$,使

$$f_t = (\mathrm{s})\lim_{n \to \infty} f_t^{(n)}, \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S \ (\mu^*), \tag{2.12}$$

$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|$,

$$(\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t = (\mathrm{s})\lim_{n \to \infty}(\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)} \mathrm{d}t.$$

利用(1)及 F 是有界线性算子可得

$$\begin{aligned} F\left((\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t\right) &= (\mathrm{s})\lim_{n \to \infty} F\left((\mathrm{s})\int_S f_t^{(n)} \mathrm{d}t\right) \\ &= (\mathrm{s})\lim_{n \to \infty}(\mathrm{s})\int_S F(f_t^{(n)})\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.13}$$

再一次利用 F 是有界线性算子及(2.12)可知存在常数 k,使

$$\|F(f_t^{(n)})\| \leqslant k\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2k\|f_t\|,$$

$$(\mathrm{s})\lim_{n \to \infty} F(f_t^{(n)}) = F(f_t), \ [\mathrm{a.e.}] \text{ in } S \ (\mu^*).$$

又因为 $\| f_t \|$ 是 Lebesgue 可积的，所以由定理 2.2 得知 $F(f_t)$ 在 S 上是 Bochner 可积的，而且

$$(\mathrm{s})\int_S F(f_t)\mathrm{d}t = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}(\mathrm{s})\int_S F(f_t^{(n)})\mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

由(2.13)、(2.14)即得定理 2.4.

定理 2.5 若 f_t 在 $[a, a+h]$ 上强连续，则

$$f_a = (\mathrm{s})\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}(\mathrm{s})\int_{[a,a+\tau]} f_t \mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

证 因为

$$\left\| \frac{1}{\tau}(\mathrm{s})\int_{[a,a+\tau]} f_t \mathrm{d}t - f_a \right\| \leqslant \frac{1}{\tau}\int_{[a,a+\tau]} \| f_t - f_a \| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \sup_{t\in[a,a+\tau]} \| f_t - f_a \|,$$

所以，由 f_t 在 $[a, a+h]$ 上的强连续性即得定理 2.5.

定理 2.6 若 f_t 在 $[a, b]$ 上是强可导的，而且其强导数 f_t' 在 $[a, b]$ 上强连续，则

$$(\mathrm{s})\int_{[a,b]} f_t' \mathrm{d}t = f_b - f_a. \tag{2.16}$$

证 任取定义在 **B** 上的取值于实空间的有界线性泛函 F，由定理 2.4 有

$$F\left((\mathrm{s})\int_{[a,b]} f_t' \mathrm{d}t\right) = \int_{[a,b]} F(f_t')\mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

((2.17)右端是实变实值函数的 Lebesgue 积分.)而

$$F(f_t') = F\left((\mathrm{s})\lim_{h\to 0}\frac{f_{t+h} - f_t}{h}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} F\left(\frac{f_{t+h} - f_t}{h}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(f_t))$$

在 $t\in[a, b]$ 上是实变实值连续函数，故

$$\int_{[a,b]} F(f_t')\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(f_t))\mathrm{d}t$$
$$= F(f_b) - F(f_a) = F(f_b - f_a).$$

所以,由 Hahn-Banach 定理有

$$(\mathrm{s})\int_{[a,b]} f_t' \,\mathrm{d}t = f_b - f_a.$$

对于完备测度空间$(\mathbf{R},\mathscr{F}^1,\mu^*)$及任意的 Banach 空间 $\mathbf{B}$,对于任意抽象函数

$$f_t:\ S \to \mathbf{B} \quad (S\in\mathscr{F}^1),$$

我们研究过 f_t 的强可测性(关于 $\mathscr{F}$)以及 f_t 在 S 上的 Bochner 积分:

$$(\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}\mu^* = (\mathrm{s})\int_S f_t \mathrm{d}t.$$

其实,对任意完备测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,任意 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 及任意变换

$$f:\ \Omega \mapsto \mathbf{B},$$

我们亦可仿定义 2.2 和 2.3,定义 f 关于 $\mathscr{F}$ 的强可测性,以及 f 在 Ω 上的 Bochner 积分

$$(\mathrm{s})\int_\Omega f\mathrm{d}\mu.$$

而且关于积分的主要结果在此一般情况下亦成立.在第四章中将要讨论此问题,当然,若 Ω 中无拓扑,f 的强连续、强导数无法引进.此乃是促使我们研究特殊的完备测度空间$(\mathbf{R},\mathscr{F},\mu^*)$上的 Bochner 积分的主要原因.今后在无混淆的情况下,强极限、强导数、强积分(Bochner 积分)前面的(s),略去不写.

§3 Banach 代数

定义 3.1 称数域 Z(实数域或复数域)上的线性空间 $\mathscr{A}$ 为一个**代数**,如果对任意 $f,g\in\mathscr{A}$,存在唯一一个乘积 $fg\in\mathscr{A}$ 具有下列性质:

(1) 结合性:$(fg)h = f(gh)\ (f,g,h\in\mathscr{A})$;

(2) 分配性：$f(g+h)=fg+fh$，$(g+h)f=gf+hf$，$(f,g,h\in\mathscr{A})$；

(3) $\alpha\beta(fg)=(\alpha f)(\beta g)$ $(\alpha,\beta\in Z,\ f,g\in\mathscr{A})$；

(4) 有单位元素 e，使 $ef=fe=f$ $(f\in\mathscr{A})$. 称代数 $\mathscr{A}$ 是一个 **Banach 代数**，如果 $(\mathscr{A},\|\cdot\|)$ 还是一个 Banach 空间而且满足：

(5) $\|fg\|\leqslant\|f\|\,\|g\|$ $(f,g\in\mathscr{A})$；

(6) $\|e\|=1$.

注意：由(5)和范数的三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|f_ng_n-fg\|&\leqslant\|f_n(g_n-g)\|+\|(f_n-f)g\|\\&\leqslant\|f_n\|\,\|g_n-g\|+\|f_n-f\|\,\|g\|,\end{aligned}$$

所以 fg 对 f 或 g 皆连续(依范数).

例 3.1 设 $M(d\times d)$ 为一切以实值为元素的 d 阶方阵，取 $Z=\mathbf{R}$ 为实数域. 在 $M(d\times d)$ 中按通常的矩阵的线性运算来定义 $M(d\times d)$ 中的线性运算，并对 $M(d\times d)$ 中的两矩阵 $A=(a_{i,j},1\leqslant i,j\leqslant d)$ 及 $B=(b_{i,j},1\leqslant i,j\leqslant d)$ 定义乘法为矩阵 A 与 B 相乘. 令 $e=I$ 为单位矩阵. 在 $M(d\times d)$ 中定义

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant d}\sum_{j=1}^{d}|a_{i,j}|,$$

则 $(M(d\times d),\|\cdot\|)$ 是 Banach 代数.

例 3.2 设 $(E,\mathscr{E})$ 是任一可测空间. $\mathscr{M}=\{f:f\in b\mathscr{E}\}$ 是定义在 E 上的 $\mathscr{E}$ 可测的有界实值函数全体. 如例 1.3 来定义其中的线性运算及范数：$\|f\|_M\triangleq\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$，则 $(\mathscr{M},\|\cdot\|_M)$ 是 Banach 空间. 再令 $\mathscr{L}$ 是定义在 $\mathscr{E}$ 上的可数可加的实值的集合函数的全体. 如例 1.4 来定义其中的线性运算及范数 $\|\varphi\|_L=|\varphi|(E)$，则 $(\mathscr{L},\|\varphi\|_L)$ 是 Banach 空间.

再令

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{A}}=\{\mu(x,A):\ &\forall x\in E,\ \mu(x,\cdot)\in\mathscr{L},\ \forall A\in\mathscr{E},\\&\mu(\cdot,A)\in\mathscr{M},\ \sup_{x\in E}\|\mu(x,\cdot)\|_L<\infty\},\end{aligned}$$

在 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 中依通常习惯来定义加法与数量乘法，并定义 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 中二元素 μ_1 和 μ_2 的乘法如下：

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, A) = \int_E \mu_1(x, \mathrm{d}y)\mu_2(y, A).$$

易证："$\mu_1, \mu_2 \in \widetilde{\mathscr{A}} \Longrightarrow \mu_1 \otimes \mu_2 \in \widetilde{\mathscr{A}}$". 再在 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 上定义范数如下：

$$\| \mu \| = \sup_{x \in E} \| \mu(x, \cdot) \|_L,$$

取 $e = \mathbf{1}_A(x)$，则 $\| e \| = 1$. 可证：$(\widetilde{\mathscr{A}}, \| \cdot \|)$ 是一个 Banach 代数，$\mathscr{L}$ 是 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 的闭线性子空间.

定义 3.2　设 $\mathscr{A}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个代数，含 $\mathscr{A}_c = \mathscr{A} \times \mathscr{A} \triangleq \{(f, g): f, g \in \mathscr{A}\}$，在 $\mathscr{A}_c$ 中定义代数运算如下：

$$(f, g) + (f^*, g^*) = (f + f^*, g + g^*);$$

$$(\alpha + \beta \mathrm{i})(f, g) = (\alpha f - \beta g, \alpha g + \beta f);$$

$$(f, g)(f^*, g^*) = (ff^* - gg^*, fg^* + f^* g)$$

$(\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ f, g, f^*, g^* \in \mathscr{A}$, i 是虚根)，则 $\mathscr{A}_c$ 是复数域 $\mathscr{K}$ 上的一个代数，称 $\mathscr{A}_c$ 为 $\mathscr{A}$ 的"复化"代数.

易知(参见[70]定理 1.3.2)：若 $\mathscr{A}$ 是实数域上的一个 Banach 代数，其中范数用 $\| \cdot \|_A$ 表之，则在 $\mathscr{A}_c$ 上亦可定义一个范数 $\| \cdot \|_{A_c}$，使 $(\mathscr{A}_c, \| \cdot \|_{A_c})$ 成 Banach 代数，且 $\| f \|_A = \| (f, 0) \|_{A_c}$. 称 $\mathscr{A}_c$ 为 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的"复化".

定义 3.3　称 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 中的元素 f 是**正则的**，如果存在 $g \in \mathscr{A}$，使 $fg = gf = e$ (e 是 $\mathscr{A}$ 中的单位元素)，称 g 为 f 的**逆元素**，记之为 $g = f^{-1}$. 反之称 f 是**奇异的**.

易见，若 f 是正则的，则其逆必唯一.

定义 3.4　设 $\mathscr{A}$ 是复数域 $\mathscr{K}$ 上的 Banach 代数，$f \in \mathscr{A}$，称

$$\sigma_A(f) \triangleq \{\lambda : \lambda \in \mathscr{K},\ \lambda e - f \text{ 奇异}\}$$

为 f 的**谱**.

若 $\mathscr{A}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Banach 代数，$f \in \mathscr{A}$，则定义 f 的**谱**为 $(f, 0)$ 作为 $\mathscr{A}_c$ 中的元素的谱，即

$$\sigma_A(f) \triangleq \sigma_{A_c}((f,0)) \triangleq \{\lambda : \lambda \in \mathscr{K},\ \lambda(e,0)-(f,0)\text{ 奇异}\}.$$

称 $r_A(f) \triangleq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(f)\}$ 为 f 的**谱半径**.

定理 3.1 对任意 Banach 代数 $\mathscr{A}$(实数域上的或复数域上的),任意 $f \in \mathscr{A}$,均有:$\sigma_A(f)$ 是非空有界闭集且

$$r_A(f) = \lim_{n\to\infty} \| f^n \|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \| f^n \|^{\frac{1}{n}}$$

(f^n 表示 f 的 n 方,即 n 次乘积).

证明参见[70]定理 1.4.1 及定理 1.6.4.

简记 $\sigma_A(f)$ 和 $r_A(f)$ 为 $\sigma(f)$ 和 $r(f)$.

定理 3.2 设 $\mathscr{A}$ 为 Banach 代数,$f \in \mathscr{A}$,则

$$r(f^n) = (r(f))^n \quad (n \geq 1).$$

证 利用 Banach 代数的范数的乘法不等式及定理 3.1 即可证明定理 3.2.

§4 算子半群

定义 4.1 设$(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$是一个 Banach 空间,$\mathscr{L}(\mathbf{B},\mathbf{B})$是由 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}$ 的有界线性算子全体.如定义 1.3,在其中定义线性运算及范数 $\|\cdot\|_l$,则$(\mathscr{L}(\mathbf{B},\mathbf{B}), \|\cdot\|_l)$是 Banach 空间.若

(1) $\{F_t : t \in \mathbf{T}\} \subset \mathscr{L}(\mathbf{B},\mathbf{B})$,

(2) $F_s \circ F_t = F_{s+t}(s,t,s+t \in \mathbf{T},\ F_0 = I$ 是恒等算子,$\mathbf{T} \subset \mathbf{R})$,此即“半群”性,

则称$\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$是一个**算子半群**.特别地,如果还有正实数 β,使

$$\| F_t \|_l \leq e^{\beta t} \quad (t \in \mathbf{T}),$$

则称此算子半群是**标准型的**,更特别地,若

$$\| F_t \|_l \leq 1 \quad (t \in \mathbf{T}),$$

则称此算子半群是**压缩型的**.

今后,算子半群简称**半群**,如不特别声明,$\mathbf{T} = [0,\infty)$.

仍设$(\mathscr{M}, \|\cdot\|_M)$和$(\mathscr{L}, \|\cdot\|_L)$如例 3.3 中的两个 Banach 空间，$(E,\mathscr{E})$ 是可测空间.

定义 4.2 设 $P(t,x,A):[0,\infty)\times E\times\mathscr{E}\mapsto[0,1]$. 如果

(1) $\forall t\in[0,\infty),\ x\in E,\ P(t,x,\cdot)\in\mathscr{L}$;

(2) $\forall t\in[0,\infty),\ A\in\mathscr{E},\ P(t,\cdot,A)\in\mathscr{M}$;

(3) $\forall s,t\in[0,\infty),\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}$，有

$$P(s+t,x,A)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$

(K-C 方程式)，则称 $P(t,x,A)$ 是**时齐的准转移函数**.

下面我们从 $P(t,x,A)$ 出发，给出两个对我们非常有用的半群的例子.

例 4.1 半群$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$.

设 $\mathscr{M}$ 及 $P(t,x,A)$ 如前，任取 $f\in\mathscr{M}$，定义

$$(P_tf)(x)=\int_E P(t,x,\mathrm{d}y)f(y)\quad(t\in\mathbf{T},\ x\in E),$$

易证：$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}\subset\mathscr{L}(\mathscr{M},\mathscr{M})$，而且由 $P(t,x,A)$ 满足 K-C 方程式可知“半群性”成立. 总之，$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是压缩型半群.

例 4.2 半群$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$.

设 $\mathscr{L}$ 及 $P(t,x,A)$ 如前. 任取 $\varphi\in\mathscr{L}$，定义

$$(V_t\varphi)(A)=\int_E\varphi(\mathrm{d}x)P(t,x,A)\quad(t\in\mathbf{T},\ A\in\mathscr{E}).$$

易证：$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}\subset\mathscr{L}(\mathscr{L},\mathscr{L})$，而且由 $P(t,x,A)$ 满足 K-C 方程式可得

$$(V_{s+t}\varphi)(A)=(V_s\circ V_t)(\varphi)(A).$$

显然，$\|V_t\varphi\|_L\leqslant\|\varphi\|_L$. 所以，$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是压缩型半群.

§5 无穷小算子及预解式

在这一节恒设 $\mathbf{T}=[0,\infty)$，$\{F_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 上的

压缩型半群.而所考虑的极限、连续、导数都是强极限、强连续、强导数,所考虑的积分都是 Bochner 积分(除明显可辨者外),因此,在极限号、积分号……前之(s)都略去不写了,强极限、强连续、强导数之"强"字亦略去.

令 $\mathbf{B}_0 = \{f: f \in \mathbf{B}, \lim\limits_{t \to 0+} F_t f = f\}$.

命题 5.1 (1) $\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的闭线性子空间.

(2) $f \in \mathbf{B}_0 \Longrightarrow F_t f$ 在 $\mathbf{T}$ 上连续.

证 (1) 显然 $\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的线性子空间,下面证明 $\mathbf{B}_0$ 闭.任取 $f_n \in \mathbf{B}_0$,设 $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$.由于

$$\begin{aligned} \| F_t f - f \| &\leqslant \| F_t(f - f_n) \| + \| F_t f_n - f_n \| + \| f_n - f \| \\ &\leqslant 2 \| f - f_n \| + \| F_t f_n - f_n \|, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{t \to 0+} \| F_t f - f \| = 0.$$

即 $f \in \mathbf{B}_0$.

(2) 任取 $t_0 > 0$.若 $t > t_0$,则

$$\| F_t f - F_{t_0} f \| = \| F_{t_0}(F_{t-t_0} f - f) \| \leqslant \| F_{t-t_0} f - f \|,$$

而 $f \in \mathbf{B}_0$,所以 $\lim\limits_{t \downarrow t_0} F_t f = F_{t_0} f$.

若 $t < t_0$,则 $\| F_t f - F_{t_0} f \| \leqslant \| F_{t_0 - t} f - f \|$,由 $f \in \mathbf{B}_0$ 亦有 $\lim\limits_{t \uparrow t_0} F_t f = F_{t_0} f$.

定义 5.1 令

$$\mathscr{D}_A = \left\{ f: f \in \mathbf{B}_0, \text{且存在 } g \in \mathbf{B}_0, \text{使 } g = \lim_{h \to 0+} \frac{F_h f - f}{h} \right\},$$

在 $\mathscr{D}_A$ 上定义算子 $\mathbf{A}$ 如下:任取 $f \in \mathscr{D}_A$,定义

$$\mathbf{A} f = \lim_{h \to 0+} \frac{F_h f - f}{h},$$

称 $\mathbf{A}$ 为 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是**无穷小算子**.

命题 5.2 若 $f \in \mathscr{D}_A$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_tf) = \mathbf{A} \circ F_tf = F_t \circ \mathbf{A}f \quad (t \in \mathbf{T}),$$

$$F_tf - f = \int_{[0,t]} F_s \circ \mathbf{A}f\mathrm{d}s \quad (t \in \mathbf{T}).$$

证 由 $f \in \mathscr{D}_A$ 得

$$\lim_{h\to0+}\frac{F_{t+h}f - F_tf}{h} = F_t\lim_{h\to0+}\frac{F_hf - f}{h} = F_t \circ \mathbf{A}f,$$

且 $F_tf \in \mathscr{D}_A$. 故

$$\lim_{h\to0+}\frac{F_{t+h}f - F_tf}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{F_h \circ F_tf - F_tf}{h} = \mathbf{A} \circ F_tf.$$

综上所述得到

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}(F_tf) = \mathbf{A} \circ F_tf = F_t \circ \mathbf{A}f \quad (t \in \mathbf{T}).$$

若 $t \in \mathbf{T}$, $t > 0$,由于

$$\left\|\frac{F_tf - F_{t-h}f}{h} - F_t \circ \mathbf{A}f\right\| \leqslant \left\|F_{t-h}\left(\frac{F_hf - f}{h}\right) - F_{t-h} \circ \mathbf{A}f\right\| + \|F_{t-h} \circ \mathbf{A}f - F_t \circ \mathbf{A}f\|,$$

$f \in \mathscr{D}_A$, $\mathbf{A}f \in \mathbf{B}_0$,所以

$$\lim_{h\to0+}\left\|\frac{F_tf - F_{t-h}f}{h} - F_t \circ \mathbf{A}f\right\| = 0.$$

综上两步得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_tf) = F_t \circ \mathbf{A}f = \mathbf{A} \circ F_tf$ $(t \in \mathbf{T})$.

再用定理 2.6 即得 $F_tf - f = \int_{[0,t]} F_s \circ \mathbf{A}f\mathrm{d}s$.

定理 5.1 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠.

证 任取 $f \in \mathbf{B}_0$,则由定理 2.5 及命题 5.1 有

$$f = \lim_{\tau\to0+}\frac{1}{\tau}\int_{[0,\tau]} F_tf\mathrm{d}t.$$

若能证:对任何 $0 \leqslant a < b < \infty$,有

$$g(a,b) \equiv \int_{[a,b]} F_tf\mathrm{d}t \in \mathscr{D}_A,$$

则定理 5.1 得证.事实上,由定理 2.4 及 2.5 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}[F_h g(a,b)-g(a,b)]\\
&\quad=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\left(\int_{[a,b]}F_h\circ F_t f\mathrm{d}t-\int_{[a,b]}F_t f\mathrm{d}t\right)\\
&\quad=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\left(\int_{(b,b+h]}F_t f\mathrm{d}t-\int_{[a,a+h)}F_t f\mathrm{d}t\right)\\
&\quad=(F_b f-F_a f)\in\mathbf{B}_0.
\end{aligned}$$

此即 $g(a,b)\in\mathscr{D}_A$.

系 5.1 $\overline{\mathscr{D}}_A=\mathbf{B}_0$.($\overline{\mathscr{D}}_A$ 表示 $\mathscr{D}_A$ 之闭包.)

证 因为 $\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的闭线性子空间,而且 $\mathscr{D}_A\subset\mathbf{B}_0$,所以 $\overline{\mathscr{D}}_A\subset\mathbf{B}_0$.而由定理 5.1 有 $\overline{\mathscr{D}}_A\supset\mathbf{B}_0$,所以 $\overline{\mathscr{D}}_A=\mathbf{B}_0$.

定义 5.2 固定任一 $\lambda>0$,定义算子 $R_\lambda:\mathbf{B}_0\to\mathbf{B}_0$ 如下:

$$R_\lambda f=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\lambda t}F_t f\mathrm{d}t\quad(f\in\mathbf{B}_0),\tag{5.1}$$

称 R_λ 是 $\{F_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的**预解算子**,$\{R_\lambda:\lambda>0\}$ 称为 $\{F_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的**预解式**.

注意:(1) (5.1) 右端的积分是有意义的,因为 $f\in\mathbf{B}_0$,故 $F_t f$ 在 $\mathbf{T}$ 上连续,从而 $\mathrm{e}^{\lambda t}F_t f$ 亦然.又因为

$$\int_{[0,\infty)}\|\mathrm{e}^{\lambda t}F_t f\|\mathrm{d}t<\infty,$$

所以,由定理 2.3 得知 $\mathrm{e}^{-\lambda t}F_t f$ 在 $[0,\infty)$ 上是 Bochner 可积的.

(2) $\{R_\lambda:\lambda>0\}$ 是一族有界线性算子,而且

$$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda},\ R_\lambda f\in\mathbf{B}_0\ \ (\lambda>0,\ f\in\mathbf{B}_0).$$

显然 R_λ 是线性的,而且 $R_\lambda f\in\mathbf{B}_0(\lambda>0,\ f\in\mathbf{B}_0)$.又因为对任何 $f\in\mathbf{B}_0$,都有

$$\|R_\lambda f\|\leqslant\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\lambda t}\|f\|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|\quad(\lambda>0,\ f\in\mathbf{B}_0),$$

所以 $\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

定理 5.2　对任何 $\lambda > 0$ 来说，$\lambda I - \mathbf{A}$ 有逆算子 $(\lambda I - \mathbf{A})^{-1}$，而且等于 R_λ（I 是恒等算子），即是说，任取 $f \in \mathbf{B}_0$，方程式

$$\begin{cases}(\lambda I - \mathbf{A})g = f, \\ g \in \mathscr{D}_A\end{cases} \tag{5.2}$$

有唯一一个解，它就是 $R_\lambda f$.

证　(1)　$R_\lambda f$ 是(5.2)的一个解. 事实上，令 $h_\lambda = R_\lambda f$，则由定理 2.4 有

$$F_\tau h_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} F_{t+\tau} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\lambda\tau}\left(h_\lambda - \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda t} F_t f \mathrm{d}t\right).$$

因此，用定理 2.5 有

$$\lim_{\tau \to 0+} \frac{F_\tau h_\lambda - h_\lambda}{\tau} = \lim_{\tau \to 0+} \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda\tau} - 1}{\tau} h_\lambda - \frac{\mathrm{e}^{\lambda\tau}}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\lambda t} F_t f \mathrm{d}t\right)$$
$$= \lambda h_\lambda - f.$$

(2)　(5.2)的解是唯一的. 设(5.2)有两个解 $h_\lambda^{(1)}, h_\lambda^{(2)}$，即是 $h_\lambda^{(i)} \in \mathscr{D}_A$，且 $(\lambda I - \mathbf{A})h_\lambda^{(i)} = f\ (i = 1,2)$. 令 $\bar{h}_\lambda = h_\lambda^{(1)} - h_\lambda^{(2)}$，则 $\bar{h}_\lambda \in \mathscr{D}_A$，且 $\mathbf{A}\bar{h}_\lambda = \lambda \bar{h}_\lambda$. 故由命题 5.2 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t \bar{h}_\lambda = F_t \circ \mathbf{A}\bar{h}_\lambda = \lambda F_t \bar{h}_\lambda.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\lambda t} F_t \bar{h}_\lambda) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} F_t \bar{h}_\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t \bar{h}_\lambda\right) = 0.$$

因此，由定理 2.6 得

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} F_t \bar{h}_\lambda = \bar{h}_\lambda \quad (\text{不依赖 } t \in \mathbf{T}). \tag{5.3}$$

但是 $\bar{h}_\lambda \in \mathscr{D}_A \subset \mathbf{B}_0$，所以，由命题 5.1 得

$$\lim_{t \to 0+} \mathrm{e}^{-\lambda t} F_t \bar{h}_\lambda = \bar{h}_\lambda. \tag{5.4}$$

由(5.3)、(5.4)得 $\mathrm{e}^{-\lambda t} F_t \bar{h}_\lambda = \bar{h}_\lambda\ (t \in \mathbf{T})$. 所以

$$\| \bar{h}_\lambda \| = \mathrm{e}^{-\lambda t} \| F_t \bar{h}_\lambda \| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t} \| \bar{h}_\lambda \| \quad (\lambda > 0,\ t \in \mathbf{T}).$$

故 $\|\bar{h}_\lambda\| = 0$. 唯一性证毕.

定理5.3 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^*$ 分别为压缩型半群 $\{F_t: t \in \mathbf{T}\}$ 和 $\{F_t^*: t \in \mathbf{T}\}$ 的无穷小算子,若 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$,则

$$F_t f = F_t^* f \quad (f \in \mathbf{B}_0),$$

其中 $\mathbf{B}_0 = \{f: f \in \mathbf{B}, f = \lim_{t\to 0+} F_t f\} = \{f: f \in \mathbf{B}, f = \lim_{t\to 0+} F_t^* f\}$.

证 首先注意:由 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$,知 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^*$ 的值域一样,从而 $(\lambda I - \mathbf{A})$ 与 $(\lambda I - \mathbf{A}^*)$ 的值域同,故由定理5.2有 $\mathbf{B}_0 = \{f: f \in \mathbf{B}, f = \lim_{t\to 0+} F_t f\} = \{f: f \in \mathbf{B}, f = \lim_{t\to 0+} F_t^* f\}$,而且

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F_t f \mathrm{d}t = \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F_t^* f \mathrm{d}t \quad (f \in \mathbf{B}_0),$$

现任取 $\mathbf{B}$ 上的一个有界线性泛函 F,由定理2.4有

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F(F_t f)\mathrm{d}t = F\left(\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F_t f \mathrm{d}t\right) = F\left(\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F_t^* f \mathrm{d}t\right)$$
$$= \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t} F(F_t^* f)\mathrm{d}t \quad (f \in \mathbf{B}_0),$$

而 $f \in \mathbf{B}_0$ 时,$F(F_t f)$ 与 $F(F_t^* f)$ 都是 t 的实变实值连续函数,所以,由拉氏变换之唯一性得知

$$F(F_t f) = F(F_t^* f) \quad (t \in \mathbf{T},\ f \in \mathbf{B}_0).$$

因此,仿定理2.6,用 Hahn-Banach 定理得知

$$F_t f = F_t^* f \quad (f \in \mathbf{B}_0).$$

上面我们从半群出发,研究了其无穷小算子的性质.下面我们考虑它的逆问题,即什么样的算子 $\mathbf{A}$,可以作为某一个半群的无穷小算子?

设 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ 是两个 Banach 空间,$\mathscr{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ 是由 $\mathbf{B}_1$ 到 $\mathbf{B}_2$ 的全体有界线性算子构成的 Banach 空间.(其中范数按算子范数定义,其线性运算按普通的算子的线性运算定义.)若 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$,则简记 $\mathscr{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ 为 $\mathscr{L}^*$.

若 $\Psi \in \mathscr{L}^*$,定义

$$e^{\Psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi^m}{m!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{\Psi^m}{m!} \tag{5.5}$$

(此处收敛性是指按 $\mathscr{L}^*$ 中的范数的收敛性)，$\Psi^m = \underbrace{\Psi \circ \Psi \circ \cdots \circ \Psi}_{m个}$ 是 Ψ 的 m 重复合算子.

注意:(5.5) 右边的极限是存在的. 事实上，

$$\left\| \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\Psi^m}{m!} \right\| \leqslant \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\|\Psi^m\|}{m!} \leqslant \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{(\|\Psi\|)^m}{m!},$$

所以

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \left\| \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\Psi^m}{m!} \right\| = 0.$$

由 $\mathscr{L}^*$ 的完备性得知存在 $\Psi_0 \in \mathscr{L}^*$，使 $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{N} \frac{\Psi^m}{m!} = \Psi_0$.

命题 5.3　(1)　$\Psi \in \mathscr{L}^* \Longrightarrow \|e^{\Psi}\| \leqslant e^{\|\Psi\|}$;

(2)　$\Psi_{m,n} \in \mathscr{L}^*$，$\sum\limits_m \sum\limits_n \|\Psi_{m,n}\| < \infty$，$\sum\limits_m \sum\limits_n \Psi_{m,n} = \Psi \in \mathscr{L}^*$，$\sum\limits_n \sum\limits_m \Psi_{m,n} = \Phi \in \mathscr{L}^* \Longrightarrow \Psi = \Phi$;

(3)　$\Psi, \Phi \in \mathscr{L}^*$，$\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi \Longrightarrow$

$$e^{\Psi+\Phi} = e^{\Psi} \circ e^{\Phi} = e^{\Phi} \circ e^{\Psi};$$

(4)　$\Psi \in \mathscr{L}^* \Longrightarrow \frac{d}{dt} e^{t\Psi} = \Psi \circ e^{t\Psi} = e^{t\Psi} \circ \Psi$.

证　(1)　$\|e^{\Psi}\| = \lim\limits_{N\to\infty} \left\| \sum\limits_{m=0}^{N} \frac{\Psi^m}{m!} \right\| \leqslant \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{N} \frac{\|\Psi^m\|}{m!}$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{\|\Psi\|^m}{m!} = e^{\|\Psi\|}.$$

(2)　任取 $\mathscr{L}^*$ 上一个有界线性泛函 F，有

$$F(\Psi) = \sum_m \sum_n F(\Psi_{m,n}), \quad F(\Phi) = \sum_n \sum_m F(\Psi_{m,n}).$$

但是 $|F(\Psi_{m,n})| \leqslant \|F\| \|\Psi_{m,n}\|$，所以

$$\sum_{m}\sum_{n}|F(\Psi_{m,n})|\leqslant \|F\|\sum_{m}\sum_{n}\|\Psi_{m,n}\|<\infty,$$

因此，

$$F(\Psi)=\sum_{m}\sum_{n}F(\Psi_{m,n})=\sum_{n}\sum_{m}F(\Psi_{m,n})=F(\Phi),$$

从而由 Hahn-Banach 定理得 $\Psi=\Phi$.

(3) 由 $\Psi,\Phi\in\mathscr{L}^*$，$\Psi\circ\Phi=\Phi\circ\Psi$ 可得

$$e^{\Psi+\Phi}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_m^l\frac{\Psi^l\circ\Phi^{m-l}}{m!}$$

(C_m^l 是 m 个元素中取 l 个的组合数)，

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}C_m^l\frac{\Psi^l\circ\Phi^{m-l}}{m!}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+l}^l\frac{\Psi^l\circ\Phi^n}{(n+l)!}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\Psi^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi^n}{n!l!}=e^{\Psi}\circ e^{\Phi}.$$

又因为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_m^l\left\|\frac{\Psi^l\circ\Phi^{m-l}}{m!}\right\|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_m^l\frac{\|\Psi\|^l\|\Phi\|^{m-l}}{m!}$$

$$=e^{\|\Psi\|+\|\Phi\|}<\infty,$$

所以，由(2)有

$$e^{\Psi+\Phi}=e^{\Psi}\circ e^{\Phi}.$$

由 Ψ,Φ 地位的对称性，故亦有 $e^{\Psi+\Phi}=e^{\Phi}\circ e^{\Psi}$.

(4) 由(1)及(3)有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{(t+\Delta t)\Psi}-e^{t\Psi}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}e^{t\Psi}\circ\left(\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}\right)$$

$$=e^{t\Psi}\circ\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}\right).$$

又因为

$$\left\|\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}-\Psi\right\|\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\|(\Delta t\Psi)^m\|}{m!\Delta t}\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}(\Delta t)^{m-1}\frac{\|\Psi\|^m}{m!},$$

故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}=\Psi$. 至此，命题 5.3 得证.

定理5.4 设$\mathbf{B}_0$是Banach空间$\mathbf{B}$的一个闭线性子空间,$\mathbf{A}$是定义在$\mathscr{D}_A \subset \mathbf{B}_0$上的取值于$\mathbf{B}_0$的线性算子. 如果

(1) $\mathscr{D}_A$在$\mathbf{B}_0$中稠;

(2) 对任何$f \in \mathbf{B}_0$,方程式

$$\begin{cases}(\lambda I - \mathbf{A})g = f, \\ g \in \mathscr{D}_A\end{cases}$$

恰有唯一一个解(从而可以令$R_\lambda = (\lambda I - \mathbf{A})^{-1}$, $R_\lambda : \mathbf{B}_0 \to \mathscr{D}_A$);

(3) $\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$,

则在$\mathbf{B}_0$上存在唯一一个强连续的压缩型的半群$\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$使其无穷小算子就是$\mathbf{A}$.

证 由于$tn\mathbf{A} \circ R_n = tn^2 R_n - tnI$是有界线性算子,所以

$$e^{tn\mathbf{A} \circ R_n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tn\mathbf{A} \circ R_n)^m}{m!}$$

有定义. 再定义一族算子$F_t^{(n)} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$如下:

$$F_t^{(n)} f = e^{tn\mathbf{A} \circ R_n} f \quad (f \in \mathbf{B}_0).$$

(Ⅰ) 对任何$n \geqslant 1$,可证$\{F_t^{(n)} : t \in \mathbf{T}\}$是$\mathbf{B}_0$上的强连续压缩型半群.

显然,$F_t^{(n)}$是有界线性算子. 由命题5.3及条件(3)有

$$\| e^{tn\mathbf{A} \circ R_n} \| = \| e^{tn^2 R_n - tnI} \| = \| e^{-tn} e^{tn^2 R_n} \|$$

$$\leqslant e^{-tn} e^{\| tn^2 R_n \|} \leqslant e^{-tn} \cdot e^{tn} = 1.$$

至于$F_{s+t}^{(n)} = F_s^{(n)} \circ F_t^{(n)} = F_t^{(n)} \circ F_s^{(n)}$, $F_0^{(n)} = I$,由命题5.3 (3)立即可得. 此即$\{F_t^{(n)} : t \in \mathbf{T}\}$是压缩型半群. 再任取$f \in \mathbf{B}_0$,仿命题5.3 (4)的证明有(因为$n\mathbf{A} \circ R_n$是有界线性算子):$F_t^{(n)} f$对$t$来说有强导数(在$t \in \mathbf{T}$),从而对$t$更是强连续的.

(Ⅱ) 任取$f \in \mathbf{B}_0$, $t \in \mathbf{T}$,推证:$\lim\limits_{n \to \infty} F_t^{(n)} f$存在且属于$\mathbf{B}_0$,记此极限为$F_t f$.

事实上,由于$\|F_t^{(n)}\| \leqslant 1\ (n \geqslant 1,\ t \in \mathbf{T})$, $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠,所以,若能证:对任何 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$,均有 $\tilde{g}_t \in \mathbf{B}_0$,使

$$\tilde{g}_t = \lim_{n\to\infty} F_t^{(n)}\tilde{f} \quad (t \in \mathbf{T}), \tag{5.6}$$

则对任何 $f \in \mathbf{B}_0$,可取 $\tilde{f}_k \in \mathscr{D}_A$, $f = \lim_{k\to\infty}\tilde{f}_k$. 因此,由

$$\begin{aligned}\|F_t^{(n)}f - F_t^{(m)}f\| &\leqslant \|F_t^{(n)}f - F_t^{(n)}\tilde{f}_k\| + \|F_t^{(n)}\tilde{f}_k - F_t^{(m)}\tilde{f}_k\| \\ &\quad + \|F_t^{(m)}\tilde{f}_k - F_t^{(m)}\tilde{f}\| \\ &\leqslant 2\|\tilde{f}_k - f\| + \|F_t^{(n)}\tilde{f}_k - F_t^{(m)}\tilde{f}_k\|\end{aligned}$$

及(5.6)可得

$$\lim_{m,n\to\infty}\|F_t^{(n)}f - F_t^{(m)}f\| = 0.$$

因此,由 $\mathbf{B}_0$ 的完备性知必有 $g_t \in \mathbf{B}_0$,使 $g_t = \lim_{n\to\infty} F_t^{(n)}f$.

下面我们补充证明(5.6).

现任取 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$,由命题 5.3 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t^{(n)}\tilde{f}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tn\mathbf{A}\cdot R_n}\tilde{f}) = F_t^{(n)}(n\mathbf{A} \circ R_n\tilde{f}) \\ &= n\mathbf{A} \circ R_n \circ F_t^{(n)}\tilde{f}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

所以用(Ⅰ)及(5.7)有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(F_{t-s}^{(n)} \circ F_s^{(m)}\tilde{f}) \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{F_{t-s-\Delta s}^{(n)} \circ F_{s+\Delta s}^{(m)}\tilde{f} - F_{t-s}^{(n)} \circ F_s^{(m)}\tilde{f}}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{F_{t-s-\Delta s}^{(n)}(F_{s+\Delta s}^{(m)}\tilde{f} - F_s^{(m)}\tilde{f})}{\Delta s} + \frac{(F_{t-s-\Delta s}^{(n)} - F_{t-s}^{(n)}) \circ F_s^{(m)}\tilde{f}}{\Delta s}\right) \\ &= F_{t-s}^{(n)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_s^{(m)}\tilde{f}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{t-s}^{(n)}(F_s^{(m)}\tilde{f}) \\ &= F_{t-s}^{(n)}(m\mathbf{A} \circ R_m \circ F_s^{(m)}\tilde{f}) - F_{t-s}^{(n)}(n\mathbf{A} \circ R_n \circ F_s^{(m)}\tilde{f}) \\ &= F_{t-s}^{(n)} \circ (m\mathbf{A} \circ R_m \circ F_s^{(m)} - n\mathbf{A} \circ R_n \circ F_s^{(m)})\tilde{f}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

由(5.7)和(5.8)知$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t^{(n)}\tilde{f})$ 对 $t \in \mathbf{T}$ 是强连续的, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(F_{t-s}^{(n)} \circ$

$F_s^{(m)}\tilde{f}$) 对 $s \in [0,t]$ 是强连续的. 所以, 由定理 2.6 有

$$F_t^{(m)}\tilde{f} - F_t^{(n)}\tilde{f} = \int_{[0,t]} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(F_{t-s}^{(n)} \circ F_s^{(m)}\tilde{f})\right]\mathrm{d}s$$

$$= \int_{[0,t]} F_{t-s}^{(n)} \circ (m\mathbf{A} \circ R_m \circ F_s^{(m)} - n\mathbf{A} \circ R_n \circ F_s^{(m)})\tilde{f}\mathrm{d}s. \tag{5.9}$$

由 $(nI - \mathbf{A}) \circ (mI - \mathbf{A}) = (mI - \mathbf{A}) \circ (nI - \mathbf{A})$ 得 $R_n \circ R_m = R_m \circ R_n$, 又因为

$$\mathbf{A} \circ R_m = mR_m - I,$$

$$F_t^{(n)} = \mathrm{e}^{nt\mathbf{A} \cdot R_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(nt\mathbf{A} \circ R_n)^k,$$

所以 $\mathbf{A} \circ R_m \circ F_t^{(n)} = F_t^{(n)} \circ \mathbf{A} \circ R_m$(不论 m 是否等于 n), 以此代入(5.9) 得

$$F_t^{(m)}\tilde{f} - F_t^{(n)}\tilde{f} = \int_{[0,t]} F_{t-s}^{(n)} \circ F_s^{(m)} \circ (m\mathbf{A} \circ R_m - n\mathbf{A} \circ R_n)\tilde{f}\mathrm{d}s. \tag{5.10}$$

又因为对任何 $g \in \mathscr{D}_A$, 有

$$R_n \circ (nI - \mathbf{A})g = g, \quad \lim_{n\to\infty} R_n \circ \mathbf{A}g = 0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} nR_n g = g \quad (g \in \mathscr{D}_A). \tag{5.11}$$

而 $\| nR_n \| \leqslant 1$, $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠, 仿前可证:

$$\lim_{n\to\infty} nR_n g = g \quad (g \in \mathbf{B}_0). \tag{5.12}$$

但是 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$, 故

$$R_n \circ \mathbf{A}\tilde{f} = \mathbf{A} \circ R_n\tilde{f}. \tag{5.13}$$

显然 $\mathbf{A}\tilde{f} \in \mathbf{B}_0$, 所以由(5.12)、(5.13) 得

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{A} \circ R_n\tilde{f} = \lim_{n\to\infty} nR_n \circ \mathbf{A}\tilde{f} = \mathbf{A}\tilde{f}. \tag{5.14}$$

由(5.10), (5.13), (5.14) 得

$$\limsup_{m,n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant M} \| F_t^{(m)}\tilde{f} - F_t^{(n)}\tilde{f} \|$$

$$\leqslant \varlimsup_{m,n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant M} \int_{[0,t]} \| F_{t-s}^{(n)} \circ F_s^{(m)} \circ (m\mathbf{A} \circ R_m - n\mathbf{A} \circ R_n)\tilde{f} \| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \varlimsup_{m,n\to\infty} M \| (m\mathbf{A} \circ R_m - n\mathbf{A} \circ R_n) \|$$

$$= \varlimsup_{m,n\to\infty} M \| (mR_m - nR_n) \circ \mathbf{A}\tilde{f} \| = 0. \tag{5.15}$$

但是 $\mathbf{B}_0$ 是闭的，所以对任何 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$ 存在 $\tilde{g}_t \in \mathbf{B}_0$，使

$$\lim_{n\to\infty} F_t^{(n)} \tilde{f} = \tilde{g}_t \text{（在 } t \text{ 属于任何有限区间上一致）}. \tag{5.16}$$

(5.6) 得证.

（Ⅲ） 推证 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是强连续的压缩型半群. 显然 F_t 是有界线性算子，而且 $\| F_t \| \leqslant 1$ $(t \in \mathbf{T})$. 因为 $\{F_t^{(n)} : t \in \mathbf{T}\}$ 是强连续的压缩型半群，所以，由(5.16) 得知对任何 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$，$F_t\tilde{f}$ 在 $t \in \mathbf{T}$ 是强连续的. 再利用 $\| F_t \| \leqslant 1$ $(t \in \mathbf{T})$ 及 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠易证：对任何 $f \in \mathbf{B}_0$，$F_t f$ 在 $t \in \mathbf{T}$ 上也强连续.

又因为对任何 $f \in \mathbf{B}_0$，有 $F_{s+t} f = \lim\limits_{n\to\infty} F_s^{(n)} \circ F_t^{(n)} f$，

$$\| F_s \circ F_t f - F_s^{(n)} \circ F_t^{(n)} f \|$$

$$\leqslant \| F_s \circ F_t f - F_s^{(n)} \circ F_t f \| + \| F_s^{(n)} \circ F_t f - F_s^{(n)} \circ F_t^{(n)} f \|$$

$$\leqslant \| F_s \circ F_t f - F_s^{(n)} \circ F_t f \| + \| F_t f - F_t^{(n)} f \|,$$

所以

$$F_{s+t} f = \lim_{n\to\infty} F_s^{(n)} \circ F_t^{(n)} f = F_s \circ F_t f.$$

而 $F_0 = I$ 显然，故 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是强连续压缩型半群.

（Ⅳ） $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的无穷小算子 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

任取 $f \in \mathscr{D}_A$，由 $\mathbf{A} \circ R_n f = R_n \circ \mathbf{A} f$ 得

$$\left\| \int_{[0,t]} nF_s^{(n)} \circ \mathbf{A} \circ R_n f \mathrm{d}s - \int_{[0,t]} F_s \circ \mathbf{A} f \mathrm{d}s \right\|$$

$$\leqslant \int_{[0,t]} \| nF_s^{(n)} \circ R_n \circ \mathbf{A} f - F_s \circ \mathbf{A} f \| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_{[0,t]} \| nF_s^{(n)} \circ R_n \circ \mathbf{A} f - F_s^{(n)} \circ \mathbf{A} f \| \mathrm{d}s$$

$$+\int_{[0,t]}\|F_s^{(n)}\circ \mathbf{A}f-F_s\circ \mathbf{A}f\|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant t\|nR_n\circ \mathbf{A}f-\mathbf{A}f\|$$

$$+\int_{[0,t]}\|F_s^{(n)}\circ \mathbf{A}f-F_s\circ \mathbf{A}f\|\mathrm{d}s. \tag{5.17}$$

在(5.17)中令 $n\to\infty$ 并注意(5.12)及对任何 $g\in\mathbf{B}_0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}F_t^{(n)}g=F_tg\quad(\text{在 } t \text{ 属于任何有限区间上一致}),$$

((5.16)中已证当 $g\in\mathscr{D}_A$ 时上式成立,而今 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠,且 $F_t^{(n)}, F_t$ 是有界线性算子,范数均 $\leqslant 1$,所以上式对一切 $g\in\mathbf{B}_0$ 亦成立.)则可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,t]}nF_s^{(n)}\circ \mathbf{A}\circ R_nf\mathrm{d}s=\int_{[0,t]}F_s\circ \mathbf{A}f\mathrm{d}s. \tag{5.18}$$

但是,由(5.7)有

$$\int_{[0,t]}nF_s^{(n)}\circ \mathbf{A}\circ R_nf\mathrm{d}s=\int_{[0,t]}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_s^{(n)}f\right)\mathrm{d}s$$

$$=F_t^{(n)}f-f. \tag{5.19}$$

由(5.18)、(5.19)及定理2.5得

$$\lim_{t\to0+}\frac{F_tf-f}{t}=\lim_{t\to0+}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\int_{[0,t]}nF_s^{(n)}\circ \mathbf{A}\circ R_nf\mathrm{d}s$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}\int_{[0,t]}F_s\circ \mathbf{A}f\mathrm{d}s=\mathbf{A}f. \tag{5.20}$$

这就证明了 $\mathbf{A}^*\supset\mathbf{A}$,即 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 之开拓.下面我们再证明 $\mathbf{A}^*\subset\mathbf{A}$.即任取 $g^*\in\mathscr{D}_{A^*}$($\mathscr{D}_{A^*}$ 是 $\mathbf{A}^*$ 之定义域),推证 $g^*\in\mathscr{D}_A$,且 $\mathbf{A}^*g^*=\mathbf{A}g^*$,为此,若注意 $\mathbf{A}^*\supset\mathbf{A}$,又只需证明 $g^*\in\mathscr{D}_A$.事实上,必存在 $f^*\in\mathbf{B}_0$,使

$$(\lambda I-\mathbf{A}^*)g^*=f^*.$$

再用本定理假设(2)有唯一一个 $g\in\mathscr{D}_A$,使

$$(\lambda I-A)g=f^*.$$

由 $\mathbf{A}^*\supset\mathbf{A}$ 得 $f^*=(\lambda I-\mathbf{A}^*)g$, $g\in\mathscr{D}_A\subset\mathscr{D}_{A^*}$,而由定理5.2

得知

$$\begin{cases}(\lambda I - \mathbf{A}^*)h = f^*,\\ h \in \mathscr{D}_A.\end{cases}$$

恰有唯一一个解,所以 $g^* = g \in \mathscr{D}_A$,这就证明了 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

(Ⅴ) 由定理 5.3 立即可得:恰有唯一一个强连续的压缩型的半群 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$,使其无穷小算子就是 $\mathbf{A}$.

定理 5.5 设 $\mathbf{B}_0$ 是 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 的一个闭线性子空间,$\mathscr{D}_A \subset \mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}:\mathscr{D}_A \to \mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}$ 是线性算子,则 $\mathbf{A}$ 决定唯一一个 $\mathbf{B}_0$ 上的强连续的压缩型半群,使其无穷小算子就是 $\mathbf{A}$ 的充要条件是:

(1) $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠;

(2) 任取 $f \in \mathbf{B}_0$,方程式

$$\begin{cases}(\lambda I - \mathbf{A})g = f\ (\lambda > 0),\\ g \in \mathscr{D}_A\end{cases}$$

恰有唯一一个解,记此解为 $(\lambda I - \mathbf{A})^{-1} f$ 或 $R_\lambda f$;

(3) R_λ 是有界线性算子,且 $\| R_\lambda \| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\ (\lambda > 0)$.

证 这是前面 4 个定理的总结.

定理 5.6 设 $\mathbf{A}, R_\lambda$ 分别为 $\mathbf{B}$ 上的压缩型半群 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的无穷小算子与预解算子,$\mathbf{B}_0$ 如命题 5.1 前所定义,则对任何 $f \in \mathbf{B}_0$,恒有

$$F_t f = \lim_{n\to\infty} e^{tn\mathbf{A}\cdot R_n} f = \lim_{n\to\infty} e^{tn(nR_n - I)} f \quad (t \in \mathbf{T}).$$

证 定理 5.4 中已证明此事实.

第四章　随机过程的基本概念

§1　随机过程的定义及可测性、可分性、连续性

定义1.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$(E,\mathscr{E})$为可测空间，$\mathbf{T}\subset\mathbf{R}$，若对任何$t\in\mathbf{T}$，

$$X_t:\Omega\mapsto E,$$

且$X_t\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$，则称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的取值于$E$的**随机过程**，或$(E,\mathscr{E})$**随机过程**，称$(E,\mathscr{E})$为其“**相空间**”或“**状态空间**”，称$\mathbf{T}$为其“**时间域**”，称$X.(\omega)$为其相应于$\omega$的**轨道**$(\omega\in\Omega)$，称每个$X_t$为$E$值**随机元**.

在无混淆的情况下，简称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$为随机过程．有时记$X_t=X(t)$，$X_t(\omega)=X(t,\omega)$，$X.(\omega)=X(\cdot,\omega)$，$X_t(\cdot)=X(t,\cdot)$.

设$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{F}$中的一族单增的子$\sigma$代数，即$\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$是$\sigma$代数，且$t>s\Longrightarrow\mathscr{F}_t\supset\mathscr{F}_s$.若$X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}$ $(\forall t\in\mathbf{T})$，则称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$适应的随机过程，或适应于$\{\mathscr{F}_t\}$的随机过程．特别地，若令

$$\mathscr{F}_t\triangleq\sigma(X_s,s\leqslant t,s\in\mathbf{T})\triangleq\sigma\Big(\bigcup_{\substack{s\leqslant t\\ s\in\mathbf{T}}}X_s^{-1}(\mathscr{E})\Big)\triangleq\bigvee_{\substack{s\leqslant t\\ s\in\mathbf{T}}}X_s^{-1}(\mathscr{E})$$

是$\{X_s,s\leqslant t,s\in\mathbf{T}\}$所产生的$\sigma$代数，则$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$适应的随机过程.

我们最感兴趣的随机过程$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是：

(1) 其时间域$\mathbf{T}=[0,\infty)$或$\{0,1,2,\cdots\}$，或$(-\infty,\infty)$，或$(\cdots,-n,-n+1,\cdots,-1,0,1,\cdots n,n+1,\cdots\}$.

(2) 其相空间$(E,\mathscr{E})=(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$，或$(\mathbf{B},\|\cdot\|,\mathscr{B}(\mathbf{B}))$，其中$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间，$\mathscr{B}(\mathbf{B})$是$\mathbf{B}$中全体Borel集所构成的$\sigma$代数.

定义 1.2 设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的、以$(E,\mathscr{E})$为相空间的随机过程，$\mathbf{T}=[0,\infty)$或$(-\infty,\infty)$或直线上任一区间.称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$**是可测的**，如果对任何$A\in\mathscr{E}$，有

$$\{(t,\omega)\in\mathbf{T}\times\Omega:X(t,\omega)\in A\}\in\mathscr{B}(\mathbf{T})\times\mathscr{F}.$$

设$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{F}$中一族单增的子$\sigma$代数.若对任何$t\in\mathbf{T}$，$A\in\mathscr{E}$，有

$$\{(u,\omega)\in[0,t]\times\Omega:X(u,\omega)\in A\}\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t,$$

则称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$关于$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$**循序可测**.

命题 1.1 设$X_t:\Omega\mapsto E$，$X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}$ $(\forall t\in\mathbf{T})$，$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{F}$中一族单增子$\sigma$代数.

(1) 若$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$关于$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$循序可测，则$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是可测的.

(2) 若$(E,\rho,\mathscr{E})$是可测度量空间，即ρ是E上的一个度量，$\mathscr{E}$是由开集产生的σ代数.且对任何$\omega\in\Omega$，$X(\cdot,\omega)$是右连续的，则$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$关于$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$循序可测.

证 (1) 显然成立.

(2) 令

$$\Phi_t^{(n)}(u,\omega)=\begin{cases}X\left(\dfrac{k+1}{2^n},\omega\right), & \text{当 } u\in\left[\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right),\ 0\leqslant k<[2^nt],\\ X(t,\omega), & \text{当 } u\in\left[\dfrac{[2^nt]}{2^n},t\right],\end{cases}$$

则对任何$A\in\mathscr{E}$，有

$$
\begin{aligned}
&\{(u,\omega)\in[0,t]\times\Omega:\Phi_t^{(n)}(u,\omega)\in A\}\\
&=\bigcup_{k=0}^{[2^nt]-1}\left(\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\times X_{\frac{k+1}{2^n}}^{-1}(A)\right)\\
&\quad\cup\left(\left[\frac{[2^nt]}{2^n},t\right]\times X_t^{-1}(A)\right)\\
&\quad\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t\quad(\forall\, t\in\mathbf{T}).
\end{aligned}
$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_t^{(n)}(u,\omega)=X(u,\omega)\quad(\forall\, u\in[0,t],\ \omega\in\Omega),$$

所以$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$关于$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是循序可测的.

定义 1.3　设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$和$\{Y_t:t\in\mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(E,\mathscr{E})$为状态空间的随机过程,如果对任何$t\in\mathbf{T}$,有

$$P(X_t=Y_t)=1,$$

则称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$与$\{Y_t:t\in\mathbf{T}\}$是**随机等价的**(简称等价的),亦称Y是X之**修正**.

为了研究随机过程的轨道性质,我们有时要在一个随机等价的随机过程族中选出一个"较好"的代表加以研究.好的标准各种各样,其中之一就是可分性.

定义 1.4　设$\mathbf{T}=[0,\infty)$或$(-\infty,\infty)$或$[a,b]$,$f:\mathbf{T}\mapsto\mathbf{R}$,$D$是$\mathbf{T}$中的可数稠子集.如果对任何$t\in\mathbf{T}$,存在$r_n\in D\ (n\geqslant1)$,使

$$\lim_{n\to\infty}r_n=t,\quad\lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(t),$$

则称f关于D是**可分的**,而称D是f的一个**可分集**.

设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$为状态空间的随机过程,$D$是$\mathbf{T}$中的可数稠子集.如果存在一个零测集$N\in\mathscr{F}$, $P(N)=0$,使得当$\omega\notin N$时,$X(\cdot,\omega)$关于D是可分的,则称随机过程$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$关于D**可分**,N称为其**例外集**,D称为其**可分集**.如果存在一个在$\mathbf{T}$中稠密的可数集D,使随机过程关于D可分,则称**随机过程可分**.称随机过程**完全可分**,如果它关于$\mathbf{T}$

中的任一可数稠子集都是可分的.

显然,右连续函数是可分的.

定义 1.5 设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以可测度量空间$(E,\rho,\mathscr{E})$为状态空间的随机过程,如果对任何$t_0\in\mathbf{T}$,有

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in\mathbf{T}}} X_t = X_{t_0}\ ([P]),$$

则称$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是**随机连续的**.如果上述极限中的$t\to t_0$代之以$t\uparrow t_0$(或$t\downarrow t_0$),则称随机过程是**左(或右)随机连续的**.

定理 1.1 设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$为状态空间的随机过程,$\mathbf{T}=[0,\infty)$或$[a,b]$或$(-\infty,\infty)$.

(1) 恒存在一个可分的与$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$随机等价的随机过程$\{Y_t:t\in\mathrm{T}\}$.

(2) 若$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$可分且随机连续,则它必是完全可分的.

(3) $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$可分的充要条件是:存在$\mathbf{T}$的一个可数稠子集D及一个P-零测集N, $N\in\mathscr{F}$, $P(N)=0$,使得对任一闭集A及开区间I,有

$$\Big(\bigcap_{r\in DI}X_r^{-1}(A)-\bigcap_{t\in\mathrm{T}I}X_t^{-1}(A)\Big)\subset N.$$

证 参见[15]第Ⅱ章定理2.1~2.4.

定理1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分的Banach空间,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$, $\mathscr{B}(\mathbf{B})$是$\mathbf{B}$中全体Borel集生成的σ代数,则下面陈述等价:

(1) $X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$ (即X是$\mathbf{B}$值随机元);

(2) 存在$X_n:\Omega\mapsto\mathbf{B}$满足

$$(\mathrm{C}_1)\quad X_n(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^{(n)}1_{F_i^{(n)}}(\omega)$$

$$(x_i^{(n)}\in\mathbf{B},\ F_i^{(n)}\in\mathscr{F},\ F_i^{(n)}F_j^{(n)}=\varnothing,\ i\neq j),$$

(C_2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|X_n(\omega)-X(\omega)\|=0$;

(3) 存在 $X_n:\Omega\mapsto\mathbf{B}$ 满足(C_1)及

$(C_2)'$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n(\omega)-X(\omega)\|=0\ (\forall\,\omega\in\Omega)$;

(4) 存在 $X_n:\Omega\mapsto\mathbf{B}$ 满足

$(C_1)'$ $X_n(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{k_n}x_i^{(n)}\mathbf{1}_{F_i^{(n)}}(\omega)$

$(x_i^{(n)}\in\mathbf{B},\ F_i^{(n)}\in\mathscr{F},\ F_i^{(n)}F_j^{(n)}=\varnothing,\ i\neq j)$,及$(C_2)'$;

(5) 对任一 $f\in\mathbf{B}^*$ ($\mathbf{B}^*$ 是 $\mathbf{B}$ 上的有界线性泛函全体),有 $f(X)\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2).设(1)成立.由 $\mathbf{B}$ 之可分性知:存在 $\mathbf{B}$ 的可数稠子集$\{y_k\}$.令 $G_k^{(n)}=\left\{\omega\in\Omega:\|X(\omega)-y_k\|\leqslant\dfrac{1}{n}\right\}$, $F_1^{(n)}=G_1^{(n)}$, $F_k^{(n)}=G_k^{(n)}-\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}G_i^{(n)}\ (k\geqslant 2)$,则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^{(n)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k^{(n)}=\Omega,$$

$\{F_k^{(n)}:k\geqslant 1\}$ 两两不交 $(\forall\,n\geqslant 1)$.令

$$X_n(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k\mathbf{1}_{F_i^{(n)}}(\omega),$$

显然 X_n 满足(C_1),推证 X_n 满足(C_2). $\forall\,\varepsilon>0$,取$\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$ (n_0 不依赖于 ω).任取 $\omega\in\Omega$,必存在 i_n 使$\omega\in F_{i_n}^{(n)}\subset G_{i_n}^{(n)}(\forall\,n\geqslant 1)$,从而

$$\|X(\omega)-X_n(\omega)\|=\|X(\omega)-y_{i_n}\|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

(当 $n\geqslant n_0$ 时).此即(C_2)成立.

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然成立(并不用 $\mathbf{B}$ 的可分性).

(3)$\Longrightarrow$(4).设(3)成立,即存在 X_n 满足(C_1)及$(C_2)'$.由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(F_i^{(n)})=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i^{(n)})=1,$$

所以可取 k_n 使$P(\bigcup_{i>k_n} F_i^{(n)})<\frac{1}{n}$ $(\forall\, n\geqslant 1)$. 取

$$X_n^* = X_n \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{1}_{F_i^{(n)}},$$

由$\lim_{n\to\infty}\|X_n(\omega)-X(\omega)\| = 0$得知$\lim_{n\to\infty}\|X_n(\omega)\| = \|X(\omega)\|$，从而

$$\sup_{n\geqslant 1}\|X_n(\omega)\| \triangleq M(\omega) < \infty.$$

所以

$$\begin{aligned}\|X_n^*(\omega)-X_n(\omega)\| &= \|X_n(\omega)\sum_{i>k_n}\mathbf{1}_{F_i^{(n)}}(\omega)\| \\ &\leqslant M(\omega)\sum_{i>k_n}\mathbf{1}_{F_i^{(n)}}(\omega) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\text{当 } \omega\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\leqslant k_n}F_i^{(n)}).\end{aligned}$$

但 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\leqslant k_n}F_i^{(n)}) = 1$，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的，所以若令

$$X_n'(\omega) = \begin{cases} X_n^*(\omega), & \text{当 } \omega\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\leqslant k_n}F_i^{(n)}, \\ X(\omega), & \text{反之}, \end{cases}$$

则 X_n' 满足$(C_1)'$和$(C_2)'$.

注：此段证明未用 **B** 之可分性.

(4)⟹(1). 设(4)成立，即存在 $X_n:\Omega\mapsto\mathbf{B}$，$X_n$ 满足$(C_1)'$和$(C_2)'$. 由$(C_1)'$知

$$X_n\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B}) \quad (\forall\, n\geqslant 1).$$

再令 $\mathfrak{M}$ 是 **B** 中全体闭集所成之集合系，ρ 是由范数 $\|\cdot\|$ 决定之度量. 任取 $F\in\mathfrak{M}$，令 $f(x)\triangleq\rho(x,F)$ 为 x 到 F 的距离，则 $f(\cdot)$ 连续，且 $x\in F$ 当且仅当$\rho(x,F) = f(x) = 0$. 故

$$\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in F\} = \{\omega\in\Omega:f(X(\omega)) = 0\},$$

$$f\in\mathscr{B}(\mathbf{B})/\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

再用 $X_n\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$ 可得

$$f(X_n) \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

由 $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$ 可知

$$f(X) \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

所以

$$\{\omega: X(\omega) \in F\} = \{\omega: f(X(\omega)) = 0\} \in \mathscr{F},$$

因此 $X \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$.

(1)$\Longrightarrow$(5) 显然成立.

(5)$\Longrightarrow$(1). 设(5) 成立,则对任何 $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^1)$, $f \in \mathbf{B}^*$,恒有

$$X^{-1}(f^{-1}(A)) = (f(X))^{-1}(A) \in \mathscr{F}.$$

于是若令 $\mathscr{E} \triangleq \{f^{-1}(A): f \in \mathbf{B}^*,\ A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})\}$,则

$$X^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F}.$$

因此,若能证 $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}(\mathbf{B})$,则(1) 成立. 若注意 $\mathbf{B}$ 的可分性,只需证明 $\mathbf{B}$ 中任何闭球 $B(a,r) \triangleq \{x: \|x-a\| \leqslant r\} \in \sigma(\mathscr{E})$ 即可. 事实上,设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{B}$ 中一个可数稠子集,对每个 $n \geqslant 1$,选取 $f_n \in \mathbf{B}^*$,使

$$\|f_n\| = 1, \quad f_n(x_n - a) = \|x_n - a\|.$$

(据 Hahn-Banach 定理,这样的 f_n 是存在的.) 令

$$C = \{x \in \mathbf{B}: f_n(x-a) \leqslant r,\ n = 1,2,\cdots\},$$

显然 $C \in \sigma(\mathscr{E})$, $B(a,r) \subset C$. 任取 $x \overline{\in} B(a,r)$,则 $\|x-a\| > r$. 由 $\{x_n\}$ 在 $\mathbf{B}$ 中稠,可取 x_k 使

$$\|x - x_k\| < \frac{1}{2}(\|x-a\| - r).$$

于是

$$\begin{aligned}
\|x_k - a\| &\geqslant \|x-a\| - \|x - x_k\| \\
&> \|x-a\| - \frac{1}{2}(\|x-a\| - r) \\
&= \frac{1}{2}(\|x-a\| + r);
\end{aligned}$$

$$|f_k(x-a)-\|x_k-a\||=|f_k(x-a)-f_k(x_k-a)|$$
$$\leqslant \|x-x_k\|<\frac{1}{2}(\|x-a\|-r),$$

从而

$$\begin{aligned}f_k(x-a)&=\|x_k-a\|-(\|x_k-a\|-f_k(x-a))\\&>\frac{1}{2}(\|x-a\|+r)-\frac{1}{2}(\|x-a\|-r)\\&=r,\end{aligned}$$

此即 $x\overline{\in} C$. 总之 $C=B(a,r)\in\sigma(\mathscr{E})$. 定理证毕.

定理 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$和$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$满足定理 1.2 中的条件.

$$X_i:\Omega\mapsto\mathbf{B}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

则 $X_i\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的充要条件是:对任意 $a_i\in\mathbf{R}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,有$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$.

证 用定理 1.2 中(1)$\Longleftrightarrow$(5) 即可证明定理 1.3 成立.

注意:若$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$不可分,有反例说明两个随机元之和不是随机元.

定义 1.6 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$. 若定理 1.2 中条件(1) 成立,则称 X 是 **B 值随机元**,特别地 $\mathbf{R}^d$ 值随机元称为 **d 维随机变量**,1 维随机变量简称为随机变量. 若定理 1.2 中的条件(4) 成立,则称 X 是**强可测随机元**. 若条件(5) 成立,则称 X 是**弱可测的随机元**.

当$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$可分时,随机元与强可测随机元、弱可测随机元的概念是无区别的. 特别地,当 $\mathbf{B}=\mathbf{R}^d$ 时(自然可分),随机变量与强可测随机变量、弱可测随机变量的概念是无区别的.

定理 1.4 设实值随机过程$\{X_t:t\in[a,b]\}$是可分的,且存在三个数 $\alpha>0$, $\varepsilon>0$, $C\geqslant 0$,使得对任何 $s,t\in[a,b]$ 都有

$$\boldsymbol{E}(|X_t-X_s|^{\alpha})\leqslant C|s-t|^{1+\varepsilon},$$

则 $X(\cdot,\omega)$ 在$[a,b]$上一致连续(对几乎所有的 ω).

证明请参见[76]§3.2 定理2.

§2　随机元的分布及特征泛函

定义2.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间,$X=(X_1,\cdots,X_d)$: $\Omega\mapsto\mathbf{R}^d$, $X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbf{R}^d))\subset\mathscr{F}$,即 X 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量.任取 $A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$,令

$$P_X(A)\triangleq P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in A\}),$$

称 P_X 为X 的 **P-分布**,简称为 X 的**分布**,记 $P_X=P\circ X^{-1}$.显然 $P\circ X^{-1}$ 是$\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$上的一个概率测度.有时简记$P\circ X^{-1}$ 为 PX^{-1}.

特别地,取 $A=\bigtimes_{i=1}^{d}(-\infty,x_i)\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$,称

$$\begin{aligned}F_X(x_1,\cdots,x_d)&\triangleq P_X(\bigtimes_{i=1}^{d}(-\infty,x_i])\\&=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_d\leqslant x_d)\end{aligned}$$

为 $X=(X_1,\cdots,X_d)$的**分布函数**.显然,由 $F_X(x_1,\cdots,x_d)$所产生的 L-S 测度就是 P_X.称

$$\begin{aligned}f_X(t_1,\cdots,t_d)&\triangleq\int_{\mathbf{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{s=1}^{d}t_sx_s}P_X(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_d)\\&=\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{s=1}^{d}t_sX_s(\omega)}P(\mathrm{d}\omega)\end{aligned}$$

为 $X=(X_1,\cdots,X_d)$的**特征函数**.

定理2.1　设 F_X,f_X 分别为X 的分布函数及特征函数,则对 P_X 的任一连续区间$[a,b)=\{(x_1,\cdots,x_d):a_i\leqslant x_i<b_i,\ i=1,\cdots,d\}$ 来说,总有

$$P_X([a,b))=P_X((a,b))=P_X([a,b])$$

$$= \lim_{\substack{t_s \to \infty \\ s=1,\cdots,d}} \int_{[-T,T)} \left(\prod_{s=1}^{d} \frac{e^{-it_s a_s} - e^{-it_s b_s}}{i \cdot 2\pi t_s} \right) f_X(t_1,\cdots,t_d) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d,$$

其中 $a = (a_1,\cdots,a_d)$, $b = (b_1,\cdots,b_d)$, $T = (t_1,\cdots,t_d)$.

证明参见[27]第二章定理7.2.

注:此定理说明随机变量的分布函数与特征函数是相互唯一决定的.

定理 2.2 设 F_X, f_X 分别为 X 的分布函数与特征函数, $F_{X^{(n)}}, f_{X^{(n)}}$ 分别为 $X^{(n)}$ 的分布函数与特征函数($n = 1,2,\cdots$), P_X 与 $P_{X^{(n)}}$ 分别为 F_X 与 $F_{X^{(n)}}$ 产生的L-S测度,即分别为 X 与 $X^{(n)}$ 之分布.则

$$P_{X^{(n)}} \xrightarrow{\mathrm{w}} P_X \iff f_{X^{(n)}} \longrightarrow f_X.$$

证明参见[27]第二章定理7.6与定理7.7.

上面讨论了取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量的分布及特征函数.对于一般的取值于Banach空间$(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$的随机元 X 的分布与特征函数如何定义呢?分布的定义是与以前一样的(这时分布函数就不好定义了),但特征函数则代之以“特征泛函”.特征函数有许多好的性质(请参见[27]第二章),但特征泛函的性质就差一些.

定义 2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间,$(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$是任一Banach空间,X 是 $\mathbf{B}$ 值随机元,即是 $X:\Omega \mapsto \mathbf{B}$, $X \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$.称

$$P_X(A) \triangleq P(X^{-1}(A)) \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbf{B}))$$

为 X 的**分布**,称

$$f_X(l) \triangleq \int_{\mathbf{B}} e^{il(x)} P_X(\mathrm{d}x) = \int_{\Omega} e^{il(X(\omega))} P(\mathrm{d}\omega)$$

$(l \in \mathbf{B}^*)$为 X 的**特征泛函**,此处 $\mathbf{B}^*$ 是 $\mathbf{B}$ 上的有界线性泛函全体.

定理 2.3 $\mathbf{B}$ 值随机元 X 的特征泛函 $f_X(\cdot)$ 具有下述诸性质:

(1) $f_X(0) = 1$;

(2) f_X 是非负定的,即对任何 $l_1,\cdots,l_n \in \mathbf{B}^*$,任何复数 $c_1,\cdots,c_n$,均有

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_X(l_i - l_j)c_i\bar{c}_j \geqslant 0,$$

此处 $\bar{c}_j$ 表示 c_j 的共轭复数；

(3)　$|f_X(l)| \leqslant 1, \overline{f_X(l)} = f_X(-l)\ (\forall l \in \mathbf{B}^*)$，此处 $\overline{f_X(l)}$ 表示 $f_X(l)$ 之共轭复数；

(4)　f_X 在 $\mathbf{B}^*$ 上一致连续(关于 $\mathbf{B}^*$ 中的强拓扑，即算子范数决定的拓扑)；

(5)　固定任意 $l_1,\cdots,l_d \in \mathbf{B}^*$，定义在概率空间$(\mathbf{B},\mathscr{B}(\mathbf{B}),P_X)$上的取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量 $V(x) \triangleq (l_1(x),\cdots,l_d(x))$ 的特征函数

$$f_V(t_1,\cdots,t_d) = f_X(t_1 l_1 + \cdots + t_d l_d).$$

证　只证(4)，其余诸结论仿照取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量的相应的结论的证法可证. $\mathbf{B}^*$ 中的范数用 $\|\cdot\|_*$ 表示.

事实上，任取 $l, l' \in \mathbf{B}^*$，恒有

$$\begin{aligned}|f_X(l) - f_X(l')| &\leqslant \int_{\mathbf{B}} |e^{il(x)} - e^{il'(x)}| P_X(dx) \\ &\leqslant \int_{\mathbf{B}} |e^{i(l(x)-l'(x))} - 1| P_X(dx).\end{aligned} \tag{2.1}$$

$\forall \varepsilon > 0$，存在 $M > 0$，使 $P_X(\{x \in \mathbf{B}: \|x\| > M\}) < \frac{\varepsilon}{4}$. 取 $\delta > 0$ 充分小使 $|t| < \delta$ 时 $|e^{it} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $\|l - l'\|_* < \frac{\delta}{M}$ 时有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{B}} |e^{i(l(x)-l'(x))} - 1| P_X(dx) \\ &\leqslant \int_{\{x\in\mathbf{B}: \|x\| \leqslant M\}} |e^{i(l(x)-l'(x))} - 1| P_X(dx) \\ &\quad + 2P_X(\{x \in \mathbf{B}: \|x\| > M\}) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned} \tag{2.2}$$

由(2.1)及(2.2)可知 f_X 在 $\mathbf{B}^*$ 上一致连续.

定理 2.4 设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分的 Banach 空间,μ_1 和 μ_2 是 $\mathscr{B}(\mathbf{B})$ 上的两个概率测度,则 $\mu_1\equiv\mu_2$ 的充要条件是

$$\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu_1(\mathrm{d}x)\equiv\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu_2(\mathrm{d}x)\quad(\forall\, l\in\mathbf{B}^*).$$

由此定理可看出:取值于可分的 Banach 空间中的随机元的分布与其特征泛函是相互唯一决定的.

证 只证充分性,必要性是显然的.事实上,任取 $l_1,\cdots,l_d\in\mathbf{B}^*,t_1,\cdots,t_d\in\mathbf{R}$,由假设可知

$$\varphi_1(t_1,\cdots,t_d)\triangleq\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{s=1}^{d}t_sl_s(x)}\mu_1(\mathrm{d}x)=\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{s=1}^{d}t_sl_s(x)}\mu_2(\mathrm{d}x)$$
$$\triangleq\varphi_2(t_1,\cdots,t_d).$$

但是 $\varphi_i(t_1,\cdots,t_d)$ 是定义在概率空间$(\mathbf{B},\mathscr{B}(\mathbf{B}),\mu_i)$上的取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的随机变量

$$V_i(x)=(l_1(x),\cdots,l_d(x))$$

的特征函数$(i=1,2)$.既然 $\varphi_1\equiv\varphi_2$,所以 V_1 的分布恒等于 V_2 之分布,亦即对任意的 $A_d\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$,总有

$$\mu_1(\{x\in\mathbf{B}:(l_1(x),\cdots,l_d(x))\in A_d\})$$
$$=\mu_2(\{x\in\mathbf{B}:(l_1(x),\cdots,l_d(x))\in A_d\}).\quad(2.3)$$

注意:(2.3)式是对任意正整数 d,任意 $A_d\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$,任意 $l_1,\cdots,l_d\in\mathbf{B}^*$ 都成立的.即 μ_1 与 μ_2 在

$$\mathscr{E}\triangleq\{\{x\in\mathbf{B}:(l_1(x),\cdots,l_d(x))\in A_d\}:A_d\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d),$$
$$l_1,\cdots,l_d\in\mathbf{B}^*,\ d\geqslant 1\}$$

上恒等.但是 $\mathscr{E}$ 是一个代数,且 $\sigma(\mathscr{E})=\mathscr{B}(\mathbf{B})$(参见定理 1.2 中(5)$\Longrightarrow$(1)之证明).所以由测度扩张的唯一性定理可知 μ_1 与 μ_2 在 $\mathscr{B}(\mathbf{B})$ 上恒等.

定义 2.3 设 μ_1 和 μ_2 是可分的 Banach 空间$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$上的两个概率测度,对任何 $A\in\mathscr{B}(\mathbf{B})$, $x\in\mathbf{B}$,定义 $A-x=\{y=$

$u-x:u\in A\}$. 显然

$$\int_{\mathbf{B}}\mu_1(A-x)\mu_2(\mathrm{d}x)$$

是$\mathscr{B}(\mathbf{B})$上的概率测度，记之为$(\mu_1*\mu_2)(A)$. 称$\mu_1*\mu_2$为μ_1与μ_2之**卷积**. 显然，

$$\mu_1*\mu_2(A)=(\mu_1\times\mu_2)(\{(x,y):x+y\in A\}),$$

所以$\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$.

定理2.5　设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分的Banach空间，μ,μ_1,μ_2是$\mathscr{B}(\mathbf{B})$上的概率测度，则$\mu=\mu_1*\mu_2$的充要条件是

$$\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu(\mathrm{d}x)\equiv\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu_1(\mathrm{d}x)\cdot\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(y)}\mu_2(\mathrm{d}y).$$

证　必要性. 令

$$T:\mathbf{B}\times\mathbf{B}\mapsto\mathbf{B},\quad T(x,y)=x+y.$$

若$\mu=\mu_1*\mu_2$，则$\mu=(\mu_1\times\mu_2)\circ T^{-1}$. 故对任意的$l\in\mathbf{B}^*$，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu(\mathrm{d}x)&=\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}((\mu_1\times\mu_2)\circ T^{-1})(\mathrm{d}x)\\&=\int_{\mathbf{B}\times\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x+y)}\mu_1(\mathrm{d}x)\mu_2(\mathrm{d}y)\\&=\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu_1(\mathrm{d}x)\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(y)}\mu_2(\mathrm{d}y).\end{aligned}\tag{2.4}$$

充分性. 由于

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}(\mu_1*\mu_2)(\mathrm{d}x)\\&\quad=\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(x)}\mu_1(\mathrm{d}x)\cdot\int_{\mathbf{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(y)}\mu_2(\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

再用定理2.4可得知充分性成立.

定义2.4　设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间，$X_1,\cdots,X_n$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$\mathbf{B}$值随机元. 如果对任何$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{B}(\mathbf{B})$，均有

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i^{-1}(A_i)), \tag{2.5}$$

则称 $X_1,\cdots,X_n$ **是相互独立的**.

定理2.6 设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分的 Banach 空间,X_1 和 X_2 是相互独立的 $\mathbf{B}$ 值随机元,则 X_1+X_2 的特征泛函是 X_1 的特征泛函与 X_2 的特征泛函的乘积,X_1+X_2 的分布是 X_1 的分布与 X_2 的分布的卷积.

证 由定理2.4、2.5立即可得定理2.6.

注意:对于取值于 Banach 空间的随机元列$\{X^{(n)},X,n\geqslant 1\}$来说,只有

$$P_{X^{(n)}} \xrightarrow{\text{w}} P_X \implies f_{X^{(n)}} \to f_{\bar{X}},$$

而反向蕴含关系不一定成立. 所以定理 2.2 对一般的 $\mathbf{B}$ 值随机元列来说未必成立.

定义 2.5 设$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(E,\mathscr{E})$为状态空间的随机过程. 令

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(A) = P((X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\in A)$$

$(A\in\mathscr{E}^n,\ t_1,\cdots,t_n\in\mathbf{T})$,称$\{F_{t_1,\cdots,t_n}:t_i\in\mathbf{T},\ 1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ **的有限维分布族**.

§3 乘积空间上测度之产生,随机过程的存在性

为了研究随机过程的存在性,需要考虑乘积空间及其上的测度的产生的问题. 我们研究两类乘积空间,一类是因子空间的个数是可数的,但不要求因子空间具有拓扑;另一个是因子空间的个数任意,但要求因子空间赋以拓扑,而且这种拓扑具有某些性质. 就本书而言,我们假定因子空间是局部紧的可数基的 T_2 型拓扑空间(简称 L.C.C.B.T_2 空间). 因此,在本节的开头,先介绍

L.C.C.B. T_2 空间. $C(E)$(有时简记为 C) 表示定义在 E 上的全体有界连续函数. E 上的实值函数 f 称为在**无穷远点为零**,如果对任何 $\varepsilon > 0$,恒存在 E 的紧子集 K,使 $x \overline{\in} K$ 时有 $|f(x)| < \varepsilon$. 我们用 $C_0(E)$(简记为 C_0) 表示定义在 E 上的在无穷远点为零的实值连续函数的全体,E 上的实值函数 f 称为**具有紧支撑的**,如果存在一个 E 的紧子集 K,使 $x \overline{\in} K$ 时 $f(x) = 0$, K 称为 f 的一个**紧支撑**,我们用 $C_K(E)$(简记为 C_K) 表示 E 上的具有紧支撑的实值连续函数的全体. 显然 $C_K \subset C_0 \subset C$. 记 $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

对于 L.C.C.B. T_2 空间 E,恒用 $\mathscr{B}(E)$ 表示 E 的全体开集所产生的 σ 代数,即所谓 Borel σ 代数;

$$\mathscr{B}_0(E) \equiv \sigma(C_K) \equiv \sigma(\{f^{-1}(B): f \in C_K,\ B \in \mathscr{B}\})$$

表示 E 的 Baire σ 代数,显然,$\mathscr{B}_0(E)$ 是使 C_K 中任一函数 f 是可测的最小 σ 代数,亦即由 C_K 所产生的 σ 代数. $\mathscr{B}(E)$ 中任一集合皆称为 E 的 Borel 集,$\mathscr{B}_0(E)$ 中任一集合皆称为 E 的 Baire 集.

对任一 L.C.C.B. T_2 空间 E,总有

(ⅰ) E 是 σ 紧的;即 E 可表示为可数个紧集之并;

(ⅱ) E 可度量化(距离化),且可在 E 上选择这样一度量(距离)d,使 (E,d) 是可分的完备度量空间,由此度量 d 所产生的拓扑与 E 中原来的拓扑一致,(E,d) 中每一个闭的 d 有界集 F(所谓 F 是 d 有界的,意即 F 的直径 $\sup\limits_{x,y \in F} d(x,y) < \infty$) 都是紧集;

(ⅲ) $\mathscr{B}(E) = \mathscr{B}_0(E) = \sigma(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ 是 E 的拓扑的一组可数基.

定义 3.1　设 E 是 L.C.C.B. T_2 型空间,$\mathscr{E} \triangleq \mathscr{B}(E)$ 是 E 中全体 Borel 集所构成的 σ 代数,μ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的测度. 设 $\mathscr{H} \subset \mathscr{B}(E)$, $\mathfrak{M} \subset \mathscr{B}(E)$. 称可测空间 $(E,\mathscr{B}(E))$ 上的测度 μ 在 $\mathscr{H}$ 上关于 $\mathfrak{M}$ 是**内正则的**,如果对任何 $A \in \mathscr{H}$,有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B): B \in \mathfrak{M},\ B \subset A\},$$

类似地,称 μ 在 $\mathscr{H}$ 上关于 $\mathfrak{M}$ 是**外正则的**,如果对任何 $A \in \mathscr{H}$,有

$$\mu(A) = \inf\{\mu(B): B \in \mathfrak{M},\ B \supset A\}.$$

特别地,若$\mathfrak{M}$是E中全体紧集,μ在$\mathscr{H}$上关于$\mathfrak{M}$内正则,简称为μ在$\mathscr{H}$上内正则,若$\mathscr{H} = \mathscr{B}(E)$,则简称$\mu$在$\mathscr{H}$上内正则为$\mu$是内正则的.类似地,若$\mathfrak{M}$是$E$中全体开集,$\mu$在$\mathscr{H}$上关于$\mathfrak{M}$外正则,简称为$\mu$在$\mathscr{H}$上外正则,若$\mathscr{H} = \mathscr{B}(E)$,则简称$\mu$在$\mathscr{H}$上外正则为$\mu$是外正则的.若$\mu$既外正则又内正则,则称$\mu$是双正则的.

如果对任何紧集K,总有$\mu(K) < \infty$,则称可测空间$(E, \mathscr{B}(E))$上的测度μ是**Radon 测度**.

由于E中每一闭集和开集都可表示为可数个紧集之并,所以$(E, \mathscr{B}(E))$上的 Radon 测度总是σ有限的.

对于任何 L.C.C.B.T_2 空间E,我们还有

(ⅰ) 对$C_K(E)$上任一非负线性泛函L,恒存在E上的唯一一个 Radon 测度μ,使

$$L(f) = \int_E f \mathrm{d}\mu \quad (\text{对一切 } f \in C_K(E));$$

(ⅱ) $(E, \mathscr{B}(E))$上任一 Radon 测度μ都是双正测的,即对任何$B \in \mathscr{B}(E)$,有

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup\{\mu(K): K \subset B,\ K \text{ 是紧集}\} \\ &= \inf\{\mu(G): G \supset B,\ G \text{ 是开集}\}. \end{aligned}$$

定义3.2 设Ω是任一集合,$\mathscr{F}_0$是Ω上的一个代数,$\mathfrak{M} \subset \mathscr{F}_0$,如果“$B_n \in \mathfrak{M},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing \Longrightarrow$ 存在一个N,使$\bigcap_{n=1}^{N} B_n = \varnothing$”,则称$\mathfrak{M}$是$\mathscr{F}_0$的一个**列紧子族**.

容易证明,若$\mathfrak{M}$是Π系,则$\mathfrak{M}$是$\mathscr{F}_0$的一个列紧子族的充要条件为

$$“B_n \in \mathfrak{M},\ B_{n+1} \subset B_n,\ B_n \neq \varnothing\ (n \geqslant 1) \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing”.$$

下面将要介绍乘积空间以及在乘积空间上建立测度的问题.本节介绍两个在某个乘积空间上建立测度的定理——Kolmogorov 定理和 Tulcea 定理.

本节中恒设$(E,\mathscr{E})$为任意一个可测空间,$\mathbf{T}$是任一指标集合,$\varphi(\mathbf{T})$是由$\mathbf{T}$的一切有限子集构成的集合系.

令$\Omega=\{\omega:\ \omega=\omega(\cdot):\mathbf{T}\mapsto E\}$,记作$\Omega=E^{\mathbf{T}}=\bigtimes_{t\in\mathbf{T}}E_t\,(E_t\equiv E)$. 自然,对任何$J\in\varphi(\mathbf{T})$, E^J有定义.

若$J=\{t_1,\cdots,t_n\}\in\varphi(\mathbf{T})$,记

$$\mathscr{E}^J=\bigtimes_{t\in J}\mathscr{E}_t=\sigma\{A:A=A_1\times\cdots\times A_n,\ A_i\in\mathscr{E}\}$$
$$(\mathscr{E}_t\equiv\mathscr{E}).$$

再令π_J为$\Omega=E^{\mathbf{T}}$到E^J的投影变换,即

$$\pi_J(\omega)=(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))\in E^J\quad(\omega\in\Omega=E^{\mathbf{T}}).\tag{3.1}$$

而对任何$t\in\mathbf{T}$, X_t为由Ω到E的坐标变换:

$$X_t:\Omega\mapsto E,\ X_t(\omega)=\omega(t)\quad(\omega\in\Omega),\tag{3.2}$$

即$X_t=\pi_{\{t\}}$.

对任何$J\in\varphi(\mathbf{T})$, $A\in\mathscr{F}^J$,称$\Lambda=\pi_J^{-1}(A)=\{\omega:\omega\in\Omega,\ \pi_J(\omega)\in A\}$为**以$A$为底的$J$-柱集**,在无混淆的情况下,简称为**柱集**.令

$$\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}=\{\Lambda:\Lambda\subset\Omega,\text{存在}J\in\varphi(\mathbf{T}),\ A\in\mathscr{E}^J,\text{使}\Lambda=\pi_J^{-1}(A)\}$$

为全体柱集,显然它是代数.再令

$$\mathscr{E}^{\mathbf{T}}=\sigma(\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}),$$

即$\mathscr{E}^{\mathbf{T}}$为由全体柱集所产生的σ代数,通常称为**乘积σ代数**,记作

$$\mathscr{E}=\bigtimes_{t\in\mathbf{T}}\mathscr{E}_t,\ \mathscr{E}_t\equiv\mathscr{E}\quad(t\in\mathbf{T}).$$

设$I\subset J$, $I,J\in\varphi(\mathbf{T})$,令$\pi_I^J$为由$E^J$到$E^I$的投影变换,则有

命题3.1　设$I\subset J\subset K$, $I,J,K\in\varphi(\mathbf{T})$,则

(1)　$\pi_I^J\in\mathscr{E}^J/\mathscr{E}^I$;

(2)　$\pi_I^K=\pi_I^J\circ\pi_J^K$.

证明甚易,请读者作为习题自证.

定义 3.3 设 P_J 是可测空间 $(E^J, \mathscr{E}^J)$ 上的概率测度 $(J \in \varphi(\mathbf{T}))$. 称 $\{P_J : J \in \varphi(\mathbf{T})\}$ 是 $(E, \mathscr{E})$ 上的一个**投影测度系**,如果满足:

$$P_J(\pi_I^J)^{-1} = P_I \quad (\text{对一切 } I \subset J \in \varphi(\mathbf{T})) \tag{3.3}$$

$(P_J(\pi_I^J)^{-1}(A) \triangleq P_J((\pi_I^J)^{-1}(A)))$. 一般称(3.3)式为**相容性条件**.

任给指标集合 $\mathbf{T}$ 和可测空间 $(E, \mathscr{E})$,如果存在 $(E, \mathscr{E})$ 上的一个投影测度系 $\{P_J : J \in \varphi(\mathbf{T})\}$,则在 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上可以定义一个非负实值集合函数 P 满足

$$P\pi_J^{-1} = P_J \quad (\text{对一切 } J \in \varphi(\mathbf{T})), \tag{3.4}$$

且具有有限可加性. 如果 P 在 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上还具有可数可加性,则 P 可由 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 唯一地扩张到 $\mathscr{E}^{\mathbf{T}} = \sigma(\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}})$ 上去而成一个概率测度,扩张后的测度仍用 P 记之,遂得概率空间 $(\Omega = E^{\mathbf{T}}, \mathscr{F} = \mathscr{E}^{\mathbf{T}}, P)$. 若仍用 X_t 表示 Ω 上的坐标变换,即 $X_t(\omega) = \omega(t)$ $(\omega \in \Omega,\ t \in \mathbf{T})$,则有 $X_t \in \mathscr{F}/\mathscr{E}$,亦即 X_t 是 $(E, \mathscr{E})$ 随机变量,且对任何 $J = \{t_1, \cdots, t_n\} \in \varphi(\mathbf{T})$, $A \in \mathscr{E}^J$,有

$$P((X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \in A) = P_J(A), \tag{3.5}$$

即存在随机变量族 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$,其有限维联合分布族就是投影测度系 $\{P_J : J \in \varphi(\mathbf{T})\}$.

定理 3.1(Kolmogorov) *设 E 是局部紧可数基的 T_2 型空间(简记为 L.C.C.B. T_2 空间),$\mathscr{E}$ 是 E 中全体开集所产生的 σ 代数(记作 $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$, $\mathscr{B}(E)$ 中任一集合称之为 Borel 集合)若 $\{P_J : J \in \varphi(\mathbf{T})\}$ 是 $(E, \mathscr{E})$ 上的投影测度系,则(3.4)式所定义的 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上的集合函数 P 是 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上的概率测度. 由于 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 是代数,所以 P 可由 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 唯一地扩张到 $\mathscr{E}^{\mathbf{T}} = \sigma(\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}})$ 上去而得一概率测度,此概率测度仍用 P 表示.*

证 沿用前面的符号,由于 E 是 L.C.C.B. T_2 空间,所以任取 $J \in \varphi(\mathbf{T})$,积拓扑空间 E^J 亦为 L.C.C.B. T_2 空间,从而

$$\mathscr{E} = \mathscr{B}_0(E^J) = \mathscr{B}(E^J), \tag{3.6}$$

此处,如前所定义,$\mathscr{E}^J = \bigtimes_{t\in J}\mathscr{E}_t$, $\mathscr{E}_t \equiv \mathscr{E}$, $\mathscr{B}_0(E^J)$ 是 E^J 的 Baire σ 代数,$\mathscr{B}(E^J)$ 是 E^J 的 Borel σ 代数,再令 $\mathscr{K}^J$ 为 $\mathscr{E}^J$ 中的全体紧集,

$$\mathscr{K} = \{\pi_J^{-1}(K^J): K^J \in \mathscr{K}^J,\ J \in \varphi(\mathbf{T})\},$$

即 $\mathscr{K}$是全体以紧集为底的J- 柱集(J 取遍$\varphi(\mathbf{T})$). 由于 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 是全体柱集,所以 $\mathscr{K}\subset \mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$.

由于$\{P_J: J \in \varphi(\mathbf{T})\}$ 是一个投影测度系,从而满足相容性条件(3.3),所以 P 在 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上的定义是唯一的. 显然 P 是 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上的满足有限可加性的非负集合函数,且 $P(E^{\mathbf{T}}) = 1$. 如果我们还能证:

(ⅰ) P 在 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上关于 $\mathscr{K}$是内正则的;

(ⅱ) $\mathscr{K}$是 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 的一个列紧子族,

则可证

$$\text{“}F_n \in \mathscr{E}_0^{\mathbf{T}},\ F_n \downarrow \varnothing \Longrightarrow P(F_n)\downarrow 0\text{”},$$

从而 P 是 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 上一个概率测度. 事实上,若(ⅰ)和(ⅱ)成立,任取 $F_n \in \mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$, $F_n \downarrow \varnothing$,假设

$$P(F_n)\downarrow \delta, \quad \delta > 0,$$

则由(ⅰ)可知对每个 $n \geqslant 1$,存在 $K_n \subset F_n$, $K_n \in \mathscr{K}$,使

$$P(F_n - K_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

而 $F_n - \bigcap_{m=1}^{n} K_m = \bigcup_{m=1}^{n}(F_n - K_m) \subset \bigcup_{m=1}^{n}(F_m - K_m)$,所以

$$P(F_n - \bigcap_{m=1}^{n} K_m) \leqslant \frac{\delta}{2} > 0 \quad (n \geqslant 1),$$

从而

$$P(\bigcap_{m=1}^{n} K_m) \geqslant P(F_n) - \frac{\delta}{2} \geqslant \frac{\delta}{2} \quad (n \geqslant 1). \tag{3.7}$$

由(ⅱ)及(3.7)式得 $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \neq \varnothing$,更有 $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m \neq \varnothing$,这与$\{F_n\}$的取法矛盾. 所以

$$\text{“}F_n \in \mathscr{E}_0^{\mathrm{T}},\ F_n \downarrow \varnothing \Longrightarrow P(F_n) \downarrow 0\text{”}.$$

若能证(ⅰ)和(ⅱ),则定理3.1得证.

(ⅰ)任取$B \in \mathscr{E}_0^{\mathrm{T}}$,由$\mathscr{E}_0^{\mathrm{T}}$的定义得知必有$J \in \varphi(\mathbf{T})$, $A \in \mathscr{E}^J$,使$B = \pi_J^{-1}(A)$.由于P^J是$\mathscr{E}^J$上的概率测度,当然更是Radon测度,所以P_J在$\mathscr{E}^J$上双正则,因此

$$\begin{aligned} P(B) &= P\pi_J^{-1}(A) = P_J(A) \\ &= \sup\{P_J(K^J): K^J \subset A,\ K^J \in \mathscr{K}^J\} \\ &= \sup\{P\pi_J^{-1}(K^J): K^J \subset A,\ K^J \in \mathscr{K}^J\} \\ &\leqslant \sup\{P(K): K \subset B,\ K \in \mathscr{K}\}, \end{aligned}$$

而上式左端$\geqslant$右端乃属显然,所以P在$\mathscr{E}_0^{\mathrm{T}}$上关于$\mathscr{K}$是内正则的.

(ⅱ)推证$\mathscr{K}$是$\mathscr{E}_0^{\mathrm{T}}$的一个列紧子族.

首先证明$\mathscr{K}$是一个Π系.任取$K_i \in \mathscr{K}$,必有$J_i \in \varphi(\mathbf{T})$, $K_i^{J_i} \in \mathscr{K}^{J_i}$,使$K_i = \pi_{J_i}^{-1}(K_i^{J_i})$, $i = 1,2$.令$J = J_1 \cup J_2$.

(a) 若$J_1 \cap J_2 = \varnothing$,则可令$J_1 = \{t_1,\cdots,t_m\}$, $J_2 = \{t_{m+1},\cdots,t_n\}$, $t_i \neq t_j(i \neq j)$, $m < n$, $J = J_1 \cup J_2 = \{t_1,\cdots,t_n\}$,于是

$$K_1 \cap K_2 = \pi_{J_1}^{-1}(K_1^{J_1}) \cap \pi_{J_2}^{-1}(K_2^{J_2}) = \pi_J^{-1}(K_1^{J_1} \times K_2^{J_2}),$$

其中$K_1^{J_1} \times K_2^{J_2}$是$E^J = E^{J_1} \times E^{J_2}$中的紧集,所以$K_1 \cap K_2 \in \mathscr{K}$.

(b) 若$J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$,则可令$J_1 = \{t_1,\cdots,t_m\}$, $J_2 = \{t_s,\cdots,t_n\}$, $J = J_1 \cup J_2 = \{t_1,\cdots,t_n\}$, $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant n$, $t_i \neq t_j$ $(i \neq j)$,于是

$$\begin{aligned} K_1 \cap K_2 &= \pi_{J_1}^{-1}(K_1^{J_1}) \cap \pi_{J_2}^{-1}(K_2^{J_2}) = \pi_J^{-1}(\Lambda^J), \\ \Lambda^J &= \Big(K_1^{J_1} \times \bigtimes_{t \in J - J_1} E_t\Big) \cap \Big(\bigtimes_{t \in J - J_2} E_i \times K_2^{J_2}\Big), \\ E_t &\equiv E. \end{aligned}$$

由于T_2空间中的紧集必为闭集,$K_i^{J_i}$是$\mathscr{K}^{J_i}$中的紧集,故$K_i^{J_i} \times \bigtimes_{t \in J - J_i} E_t$是$E^J$中的闭集,从而$\Lambda^J$必为$E^J$中之闭集.

又因为

$$\Lambda^J \subset \pi^{J_1}_{\{t_1,\cdots,t_{s-1}\}}(K_1^{J_1}) \times [\pi^{J_1}_{\{t_s,\cdots,t_m\}}(K_1^{J_1}) \cap \pi^{J_2}_{\{t_s,\cdots,t_m\}}(K_2^{J_2})] \times \pi^{J_2}_{\{t_{m+1},\cdots,t_n\}}(K_2^{J_2}). \tag{3.8}$$

若注意紧集之投影亦是紧集；两紧集之交亦是紧集，紧集之 Cartesian 积亦是紧集，$K_i^{J_i}$ 为紧集，则可知(3.8)式右端为紧集，而 T_2 空间中紧集之闭子集，亦为紧集，Λ^J 为闭集，所以 Λ^J 为紧集，从而$K_1 \cap K_2 = \pi_J^{-1}(\Lambda^J) \in \mathscr{K}$.

我们证明了 $\mathscr{K}$ 是 Π 系.

由于 $\mathscr{K}$ 是 Π 系，所以为证 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}$ 中的一个列紧子族，只需证明

$$\text{“}K_n \in \mathscr{K},\ K_{n+1} \subset K_n,\ K_n \neq \varnothing\ (n \geqslant 1) \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing\text{”}.$$

事实上，由 $\mathscr{K}$ 的定义及$\{K_n\}$ 为非升集合列可令

$$I_0 = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset \mathbf{T},$$

$$J_n = \{t_1, t_2, \cdots, t_{N_n}\} \subset I_0 \quad (n \geqslant 1),$$

$$J_n \subset J_{n+1} \quad (n \geqslant 1),$$

$$K_n = \pi_{J_n}^{-1}(K_n^{J_n}),\ \varnothing \neq K_n^{J_n} \in \mathscr{K}^{J_n} \quad (n \geqslant 1).$$

但是，对任何固定的 t_k，当 $t_k \in J_n$ 时，

$$\begin{aligned}\pi_{\{t_k\}}(K_n) &= (\pi^{J_n}_{\{t_k\}} \circ \pi_{J_n})(K_n) \\ &= \pi^{J_n}_{\{t_k\}}(\pi_{J_n}(K_n)) = \pi^{J_n}_{\{t_k\}}\left(\pi_{J_n}\left(\pi_{J_n}^{-1}\left(K_n^{J_n}\right)\right)\right) \\ &= \pi^{J_n}_{\{t_k\}}(K_n^{J_n})\end{aligned}$$

是非空紧集. 而当 $t_k \overline{\in} J_n$ 时，由 K_n 是非空的J_n-柱集可知

$$\pi_{\{t_k\}}(K_n) = E_{t_k} = E.$$

又因为 $K_{n+1} \subset K_n (n \geqslant 1)$，所以$\{\pi_{\{t_k\}}(K_n): n \geqslant 1\}$ 除前面有限项为 E 以外，其余诸项构成一个非空非升的紧集序列. 令

$$F_{t_k} = \pi_{\{t_k\}}(K_{n(k)}),\ n(k) = \min\{n: n \geqslant 1,\ J_n \ni t_k\},$$

则 F_{t_k} 是非空紧集,由于 $\{\pi_{\{t_k\}}(K_n):n\geqslant 1\}$ 单调非升,所以

$$J_n \ni t_k \Longrightarrow n\geqslant n(k) \Longrightarrow F_{t_k} = \pi_{\{t_k\}}(K_{n(k)}) \supset \pi_{\{t_k\}}(K_n)$$

因此,若令 F 为 E 的非空紧子集,$F_t = F\ (t\in \mathbf{T}-I_0)$,

$$\Omega_0 = \Big(\bigtimes_{t_k\in I_0} F_{t_k}\Big)\times\Big(\bigtimes_{t\in \mathbf{T}-I_0} F_t\Big),$$

则 Ω_0 是 E^{T} 中之紧子集,且

$$\begin{aligned}\Omega_0 &\supset \Big(\bigtimes_{t_k\in J_n}\pi_{\{t_k\}}(K_n)\Big)\times\Big(\bigtimes_{t_k\in I_0-J_n}F_{t_k}\Big)\times\Big(\bigtimes_{t\in\mathbf{T}-I_0}F_t\Big)\\ &\supset K_n^{J_n}\times\Big(\bigtimes_{t\in I_0-J_n}F_{t_k}\Big)\times\Big(\bigtimes_{t\in\mathbf{T}-I_0}F_t\Big).\end{aligned}$$

故

$$\Omega_0\cap K_n = K_n^{J_n}\times\Big(\bigtimes_{t\in I_0-J_n}F_{t_k}\Big)\times\Big(\bigtimes_{t\in\mathbf{T}-I_0}F_t\Big)\neq\varnothing \quad (n\geqslant 1).$$

而 $K_n^{J_n}$,F_{t_k},F_t 皆为紧集,所以 $\Omega_0\cap K_n$ 是紧集,又因为 $\{\Omega_0\cap K_n:n\geqslant 1\}$ 是非升序列,所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\Omega_0\cap K_n)\neq\varnothing$,更有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n\neq\varnothing$,所以 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{E}_0^{\mathrm{T}}$ 的一个列紧子族,定理证毕.

例 3.1 设 $E=\mathbf{R}$, $\mathscr{E}=\mathscr{B}(E)=\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 中全体 Borel 集合,显然 E 是 L.C.C.B. T_2 空间,取 $\mathbf{T}\subset\mathbf{R}$, $\varphi(\mathbf{T})$ 定义如前,令 $(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n] = \{(x_1,\cdots,x_n):a_i< x_i\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中之左开右闭区间,

$\mathscr{I}_n = \{(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]:a_i\leqslant b_i,\ a_i,b_i\in\mathbf{R},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 为半环.若对任意 $J=\{t_1,\cdots,t_n\}\in\varphi(\mathbf{T})$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$,有 n 维分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$,即 $F_{t_1,\cdots,t_n}$ 满足:

(i) 对任何 $(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]\in\mathscr{I}_n$,有

$$\begin{aligned}P_J((a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]) &\equiv F_{t_1,\cdots,t_n}(b_1,\cdots,b_n)\\ &\quad -[F_{t_1,\cdots,t_n}(a_1,b_2,\cdots,b_n)+\cdots\\ &\quad +F_{t_1,\cdots,t_n}(b_1,\cdots,b_{n-1},a_n)]\end{aligned}$$

$$+ [F_{t_1,\cdots,t_n}(a_1,a_2,b_3,\cdots,b_n) + \cdots$$
$$+ F_{t_1,\cdots,t_n}(b_1,\cdots,b_{n-2},a_{n-1},a_n)] - \cdots$$
$$+ (-1)^n F_{t_1,\cdots,t_n}(a_1,\cdots,a_n) \geqslant 0; \tag{3.9}$$

(ⅱ) $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 对每个变量 x_i 皆为右连续;

(ⅲ) 正则性:

$$\lim_{x_i\to-\infty} F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = 0 \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{3.10}$$
$$\lim_{\substack{x_i\to\infty\\(i=1,\cdots,n)}} F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = 1. \tag{3.11}$$

再设多维分布函数族

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}: t_1 < t_2 < \cdots < t_n,\ t_i \in \mathbf{T},\ i = 1,\cdots,n,\ n \geqslant 1\}$$

满足相容性条件:

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty} F_{t_1,\cdots,t_{n+1}}(x_1,\cdots,x_{n+1}) = F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n), \tag{3.12}$$

则 P_J 是半环 $\mathscr{I}_n$ 上的一个有限测度,它可唯一地扩张到 $\sigma(\mathscr{I}_n) = \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 上去,而成一个概率测度,此概率测度仍用 P_J 表之. P_J 称为由 n 维分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}$ 所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度,简称 L-S 测度. 由于相容性条件(3.12)成立,所以 $\{P_J: J \in \varphi(\mathbf{T})\}$ 必为投影测度系. 因此,用定理 3.1,在 $(E^{\mathrm{T}},\mathscr{E}^{\mathrm{T}}) = \left(\bigtimes_{t\in\mathrm{T}} R_t, \bigtimes_{t\in\mathrm{T}} \mathscr{E}_t\right)$ 上存在唯一一个概率测度 P 满足

$$P\pi_J^{-1} = P_J \quad (\text{对一切 } J \in \varphi(\mathbf{T})),$$

此处 $\mathbf{R}_t \equiv \mathbf{R}$, $\mathscr{E}_t \equiv \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{R})$, $t \in \mathbf{T}$.

定理 3.1 讨论的乘积空间中产生测度的问题,对指标集合 $\mathbf{T}$ 未作任何限制,而对因子空间 $(E,\mathscr{E})$ 的拓扑倒是作了限制,假定了 E 是 L.C.C.B. T_2 空间, $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ 是 E 中全体开集所产生的 σ 代数.

如果限制指标集合 $\mathbf{T}$ 是可数集合,在可数维的乘积空间中产

生测度,对因子空间$(E,\mathscr{E})$就可以不加任何限制,甚至不要求E上有拓扑结构,只要求$(E,\mathscr{E})$是任何可测空间就行,这就是下面的定理.

定理3.2(Tulcea) 设$\mathbf{T}$为任一可数指标集合,不妨设$\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots\}$,对任何$t\in\mathbf{T}$, $(E_t,\mathscr{E}_t)$是一可测空间,令$\Omega\equiv E^{\mathbf{T}}\equiv\bigtimes_{t\in\mathbf{T}}E_t$, $\mathscr{E}^{\mathbf{T}}=\bigtimes_{t\in\mathbf{T}}\mathscr{E}_t$. 对任何$J=\{t_1,\cdots,t_m\}\in\varphi(\mathbf{T})$, 记$E^J=\bigtimes_{i=1}^m E_{t_i}$, $\mathscr{E}^J=\bigtimes_{i=1}^m\mathscr{E}_{t_i}$. 恒记$J_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$. 对任何$I\subset J\in\varphi(\mathbf{T})$, $\pi_J(\pi_I^J)$仍如定理3.1为Ω到E^J(E^J到E^I)的投影变换. 令

$$\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}}=\{\Lambda:\Lambda=\pi_{J_n}^{-1}(A),\ A\in\mathscr{E}^{J_n},\ n\geqslant 1\}$$

为全体柱集,它是代数,$\sigma(\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}})=\bigtimes_{t\in\mathbf{T}}\mathscr{E}_t$.

若对任何$n\geqslant 2$,存在函数$p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};A_{n-1})$ ($x_i\in E_i$, $A_{n-1}\in\mathscr{E}_{n-1}$), 使$p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\ \cdot)$是$\mathscr{E}_{n-1}$上的概率测度, $p_n(\cdot,\cdots,\cdot;A_n)\in\mathscr{E}^{J_{n-1}}$,此外,还有$\mathscr{E}_0$上的概率测度$p_1$. 对任何$B_n\in\mathscr{E}^{J_n}=\bigtimes_{i=0}^{n-1}\mathscr{E}_i$,定义

$$\begin{aligned}P_n(B_n)=&\int_{E_0}p_1(\mathrm{d}x_0)\int_{E_1}p_2(x_0;\mathrm{d}x_1)\cdots\\&\cdot\int_{E_{n-1}}p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})\\&\cdot\mathbf{1}_{B_n}(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}),\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$P(\pi_{J_n}^{-1}(B_n))=P_n(B_n),\tag{3.14}$$

则P是代数$\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}}$上的一个概率测度,从而它可唯一地扩张到$\bigtimes_{i=0}^{\infty}\mathscr{E}_i=\sigma(\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}})$上去而得一概率测度.

证 首先说明(3.14)式中的定义在$\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}}$上的集合函数$P$是一意的. 事实上,若$\Lambda\in\mathscr{E}_*^{\mathbf{T}}$, $\Lambda=\pi_{J_n}^{-1}(B_n)=\pi_{J_m}^{-1}(C_m)$, $m>n$,则

必有 $C_m = B_n \times \mathop{\times}\limits_{i=n}^{m-1} E_i$，从而

$$
\begin{aligned}
P_m(C_m) = & \int_{E_0} p_1(\mathrm{d}x_0) \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1) \cdots \\
& \cdot \int_{E_{n-1}} p_n(x_0, \cdots, x_{n-2}; \mathrm{d}x_{n-1}) \\
& \cdot \int_{E_n} p_{n+1}(x_0, \cdots, x_{n-1}; \mathrm{d}x_n) \cdots \\
& \cdot \int_{E_{m-1}} p_m(x_0, \cdots, x_{m-2}; \mathrm{d}x_{m-1}) \\
& \cdot \mathbf{1}_{B_n}(x_0, \cdots, x_{n-1}) \cdot \mathbf{1}_{\mathop{\times}\limits_{i=n}^{m-1} E_i}(x_n, \cdots, x_{m-1}) \\
= & \int_{E_0} p_1(\mathrm{d}x_0) \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1) \cdots \\
& \cdot \int_{E_{n-1}} p_n(x_0, \cdots, x_{n-2}; \mathrm{d}x_{n-1}) \\
& \cdot \mathbf{1}_{B_n}(x_0, \cdots, x_{n-1}) \\
= & P_n(B_n).
\end{aligned}
$$

显然，P 在 $\mathscr{E}_*^{\mathrm{T}}$ 上非负且具有有限可加性，所以为了证明 P 是 $\mathscr{E}_*^{\mathrm{T}}$ 上的测度，只需证明

$$
\text{“}\Lambda_n \in \mathscr{E}_*^{\mathrm{T}},\ \Lambda_n \downarrow \varnothing \Longrightarrow P(\Lambda_n) \downarrow 0\text{”}.
$$

为此，只需证明

$$
\text{“}\Lambda_n = \pi_{J_n}^{-1}(A_n),\ A_n \in \mathscr{E}^{J_n},\ \Lambda_n \downarrow \varnothing \Longrightarrow P(\Lambda_n) \downarrow 0\text{”}.
$$

若 $\Lambda_n = \pi_{J_n}^{-1}(A_n),\ A_n \in \mathscr{E}^{J_n},\ \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1},\ \lim\limits_{n\to\infty} P(\Lambda_n) > 0$，推证 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \neq \varnothing$.

事实上，由 P 的定义有

$$
\begin{aligned}
0 < \lim_{n\to\infty} P(\Lambda_n) &= \lim_{n\to\infty} P_n(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{E_0} p_1(\mathrm{d}x_0) \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1) \cdots
\end{aligned}
$$

$$\cdot \int_{E_{n-1}} p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})$$
$$\cdot \mathbf{1}_{A_n}(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}). \tag{3.15}$$

令

$$A_n(x_0) = \{(x_1,\cdots,x_{n-1}): x_i \in E_i,\ i=1,\cdots,n-1,\ (x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}) \in A_n\}$$

为 A_n 在x_0 的截口集,由 $A_n \in \bigtimes_{i=0}^{n-1}\mathscr{E}_i$ 知$A_n(x_0) \in \bigtimes_{i=1}^{n-1}\mathscr{E}_i$. 再定义

$$\begin{aligned}
&P^{(1)}(\pi_{\{1,\cdots,n-1\}}^{-1}(A_n(x_0)))\\
&= \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{E_{n-1}} p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})\\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{A_n(x_0)}(x_1,\cdots,x_{n-1})\\
&= \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{E_{n-1}} p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})\\
&\quad \cdot \mathbf{1}_{A_n}(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

又因为 $\Lambda_n = \pi_{\{0,1,\cdots,n-1\}}^{-1}(A_n)$, $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$,所以 $A_{n+1} \subset A_n \times E_n$,从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A_{n+1}(x_0)}(x_1,\cdots,x_n) &\leqslant \mathbf{1}_{(A_n\times E_n)(x_0)}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\\
&= \mathbf{1}_{A_n(x_0)}(x_1,\cdots,x_{n-1}),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

再注意 $p_{n+1}(x_0,\cdots,x_{n-1};\cdot)$是概率测度,所以由(3.16)和(3.17)式得

$$\begin{aligned}
&P^{(1)}(\pi_{\{1,\cdots,n\}}^{-1}(A_{n+1}(x_0)))\\
&= \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{E_{n-1}} p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})\\
&\quad \cdot \int_{E_n} p_{n+1}(x_0,\cdots,x_{n-1};\mathrm{d}x_n)\mathbf{1}_{A_{n+1}(x_0)}(x_1,\cdots,x_n)\\
&\leqslant \int_{E_1} p_2(x_0;\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{E_{n-1}} p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};\mathrm{d}x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$= \int_{E_1} p_2(x_0; dx_1) \cdots \int_{E_{n-1}} p_n(x_0, \cdots, x_{n-2}; dx_{n-1})$$
$$\cdot \mathbf{1}_{A_n(x_0)}(x_1, \cdots, x_{n-1})$$
$$= P^{(1)}(\pi^{-1}_{\{1,\cdots,n-1\}}(A_n(x_0))).$$

故可令

$$P^{(1)}(\pi^{-1}_{\{1,\cdots,n-1\}}(A_n(x_0))) \downarrow Y^{(1)}(x_0) \quad (n \uparrow \infty).$$

显然 $Y^{(1)} \geqslant 0$. 将(3.16)代入(3.15)式并应用控制收敛定理可得

$$0 < \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \int_{E_0} p_1(dx_0)[\lim_{n\to\infty} P^{(1)}(\pi^{-1}_{\{1,\cdots,n-1\}}(A_n(x_0)))]$$
$$= \int_{E_0} p_1(dx_0) Y^{(1)}(x_0), \tag{3.18}$$

而由 $Y^{(1)} \geqslant 0$ 得知必存在 $\overline{x}_0 \in E_0$, 使 $Y^{(1)}(\overline{x}_0) > 0$. 再由 $Y^{(1)}$ 的定义知

$$P^{(1)}(\pi^{-1}_{\{1,\cdots,n-1\}}(A_n(\overline{x}_0))) \geqslant Y^{(1)}(\overline{x}_0) > 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{3.19}$$

由(3.16)、(3.19)式知 $A_n(\overline{x}_0) \neq \varnothing \ (n \geqslant 1)$. 若令

$$A_n(x_0, x_1) = \{(x_2, \cdots, x_{n-1}) : x_i \in E_i,\ i = 2, \cdots, n-1,$$
$$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A_n\}$$

为 A_n 在 (x_0, x_1) 上的截口集, 而以 $P^{(1)}(\pi^{-1}_{\{1,\cdots,n-1\}}(A_n(\overline{x}_0)))$ 替代 $P(\pi^{-1}_{\{0,1,\cdots,n-1\}}(A_n)) = P(A_n)$, 并定义 $P^{(2)}$:

$$P^{(2)}(\pi^{-1}_{\{2,\cdots,n-1\}}(A_n(\overline{x}_0, x_1)))$$
$$= \int_{E_2} p_3(\overline{x}_0, x_1; dx_2) \cdots \int_{E_{n-1}} p_n(\overline{x}_0, x_1, \cdots, x_{n-2}; dx_{n-1})$$
$$\cdot \mathbf{1}_{A_u(\overline{x}_0, x_1)}(x_2, \cdots, x_{n-1}), \tag{3.20}$$

仿上, 必存在 $\overline{x}_1 \in E_1$, 使

$$P^{(2)}(\pi^{-1}_{\{2,\cdots,n-1\}}(A_n(\overline{x}_0, \overline{x}_1))) > 0 \quad (n \geqslant 2). \tag{3.21}$$

由(3.20)、(3.21)式得

$$A_n(\overline{x}_0, \overline{x}_1) \neq \varnothing \quad (n \geqslant 2).$$

如此下去,必存在 $\overline{x}_i \in E_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,使

$$A_n(\overline{x}_0,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_{n-1}) \neq \varnothing \quad (n \geqslant 1),$$

即$(\overline{x}_0,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_{n-1}) \in A_n \quad (n \geqslant 1)$,从而

$$\overline{x} \equiv (\overline{x}_0,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_{n-1},\cdots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_{\{0,1,\cdots,n-1\}}^{-1}(A_n)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_{J_n}^{-1}(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

定理证毕.

附注:(1) 若 $p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};B_n) = p_n(B_n)$ 不依赖 $x_0,\cdots,x_{n-2}$,则称 P 为**独立乘积测度**;

(2) 若 $p_n(x_0,\cdots,x_{n-2};B_n) = p_n(x_{n-2};B_n)$ 不依赖 $x_0,\cdots,x_{n-3}$,则称 P 为**马尔可夫乘积测度**.

§4 条件概率与条件期望

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间,$A,B \in \mathscr{F}$, $P(B)>0$, $X=(X_1,\cdots,X_d):\Omega \mapsto \mathbf{R}^d$, $X \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$. 在初等概率论中,我们曾定义过 X 的期望、A 关于 B 的条件概率、X 关于 B 的条件期望分别如下:

$$\boldsymbol{E}(X) \triangleq \int_{\Omega} X(\omega) P(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}} x(P \circ X_1^{-1})(\mathrm{d}x),\cdots,\int_{\mathbf{R}} x(P \circ X_d^{-1})(\mathrm{d}x)\right);$$

$$P(A \mid B) \triangleq P(A \cap B)/P(B);$$

$$\boldsymbol{E}(X \mid B) \triangleq \int_{\Omega} X(\omega) P(\mathrm{d}\omega \mid B)$$

$$= \left(\int_{\mathbf{R}} x F_{1,B}(\mathrm{d}x),\cdots,\int_{\mathbf{R}} x F_{d,B}(\mathrm{d}x)\right),$$

其中 $F_{i,B}(x) \triangleq P(X_i \leqslant x \mid B)$. 并定义 X_i 的方差为

$$\mathrm{Var}(X_i) \triangleq \boldsymbol{E}(|X_i - \boldsymbol{E}(X_i)|^2).$$

在这一节中,我们将要引进取值于Banach空间$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$的随机元X关于σ代数(特别地,关于随机元Y)的条件期望.

定义4.1　设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,

$$X:\Omega\mapsto\mathbf{B},$$

称X**关于**$\mathscr{F}$**强可测**(简称**强可测**),如果存在简单算子:

$$X_n=\sum_{i=1}^{k_n}c_i^{(n)}\mathbf{1}_{A_i^{(n)}},$$

$c_i^{(n)}\in\mathbf{B}$, $A_i^{(n)}\in\mathscr{F}$, $\bigcup_{i=1}^{k_n}A_i^{(n)}=\Omega$, $A_i^{(n)}A_j^{(n)}=\varnothing\ (i\neq j)$ $(n\geqslant 1)$,使

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [\mathrm{a.e.}]$$

(极限号前冠以(s),表示强极限,即依范收敛).

特别地,若$(\Omega,\mathscr{F},\mu)=(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,则称关于$\mathscr{F}$强可测的$\mathbf{B}$值算子$X$是**B值强可测随机元**.更特别地,若$\mathbf{B}=\mathbf{R}$,则称关于$\mathscr{F}$强可测的$\mathbf{R}$值随机元为**随机变量**.

注意:当$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分Banach空间时,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$,则$X$是$\mathbf{B}$值强可测随机元的充要条件是$X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})$,其中$\mathscr{B}(\mathbf{B})$是$\mathbf{B}$中开集所产生的$\sigma$代数.更特别地,当$\mathbf{B}=\mathbf{R}$时,则$X$是$\mathbf{R}$值随机变量的充要条件是$X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$. $\mathbf{R}$值随机变量简称为随机变量.

还要指出的是:若$\mathfrak{M}\subset\mathscr{B}(\mathbf{B})$, $\sigma(\mathfrak{M})=\mathscr{B}(\mathbf{B})$, $(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是可分的Banach空间,则

$$X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{B})\Longleftrightarrow X^{-1}(\mathfrak{M})\subset\mathscr{F}.$$

命题4.1　设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$, X是关于$\mathscr{F}$强可测的,则

(1)　$\|X(\omega)\|:\Omega\mapsto\mathbf{R}$, $\|X\|\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$;

(2)　存在简单算子列$\{X_n\}$使

$$\|X_n(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad(\forall\,\omega\in\Omega),$$

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [\mathrm{a.e}].$$

证明甚易,从略.

定义 4.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$,$X$关于$\mathscr{F}$强可测,且

$$\int_{\Omega}\|X(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)<\infty.$$

(1) 若X是简单算子:

$$X=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{A_i},$$

则定义X(在Ω上)的 **Bochner 积分**为$\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(A_i)$,记作:

$$(\mathrm{s})\int_{\Omega}X\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(A_i).$$

(2) 对满足定义 4.2 的任一个X,由命题 4.1,可取简单算子列$\{X_n\}$,使

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [\mathrm{a.e.}];$$
$$\|X_n(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad(\omega\in\Omega),$$

则定义X(在Ω上)的 **Bochner 积分**为

$$(\mathrm{s})\int_{\Omega}X\mathrm{d}\mu=(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_{\Omega}X_n\mathrm{d}\mu\right).$$

为了说明定义 4.2 的合理性,需要证明:

定理4.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$X:\Omega\mapsto\mathbf{B}$,$X$关于$\mathscr{F}$强可测,且$\int_{\Omega}\|X(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)<\infty$,则对任何简单算子列$\{X_n\}$,只要

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [\mathrm{a.e.}];$$
$$\|X_n(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad(\omega\in\Omega),$$

必有:

(1) 存在$x\in\mathbf{B}$,使

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_{\Omega}X_n\mathrm{d}\mu\right)=x,$$

若还有简单算子列 $\{\widetilde{X_n}\}$ 亦满足

$$(s)\lim_{n\to\infty}\widetilde{X_n}=X,\quad [a.e.],$$

$$\|\widetilde{X_n}(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad (\omega\in\Omega),$$

则

$$(s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_\Omega X_n\mathrm{d}\mu\right)=(s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_\Omega \widetilde{X_n}\mathrm{d}\mu\right);$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|X(\omega)-X_n(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)=0.$$

证　(1)　由命题 4.1,可取简单算子列 $\{X_n\}$ 使

$$(s)\lim_{n\to\infty}X_n=X,\quad [a.e.],\tag{4.1}$$

$$\|X_n(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad (\omega\in\Omega).\tag{4.2}$$

由(4.1)、(4.2) 和控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty}\left\|(s)\int_\Omega X_n\mathrm{d}\mu-(s)\int_\Omega X_m\mathrm{d}\mu\right\|\\
&\leqslant \lim_{m,n\to\infty}\int_\Omega\|X_n-X_m\|\mathrm{d}\mu\\
&\leqslant \lim_{m,n\to\infty}\left(\int_\Omega\|X_n-X\|\mathrm{d}\mu+\int_\Omega\|X-X_m\|\mathrm{d}\mu\right)\\
&=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\|X_n-X\|\mathrm{d}\mu+\int_\Omega\lim_{m\to\infty}\|X-X_m\|\mathrm{d}\mu\\
&=0.
\end{aligned}$$

由 Banach 空间的完备性得知:存在 $x\in\mathbf{B}$,使

$$x=(s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_\Omega X_n\mathrm{d}\mu\right).$$

若还有简单算子列 $\{\widetilde{X_n}\}$,使

$$(s)\lim_{n\to\infty}\widetilde{X_n}=X,\quad [a.e.],$$

$$\|\widetilde{X_n}(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad (\omega\in\Omega),$$

令

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{当 } n \text{ 为奇数}, \\ \widetilde{X}_n, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

则简单算子列$\{Y_n\}$亦满足(4.1)和(4.2),所以必存在$y \in \mathbf{B}$,使

$$y = (\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mu\right).$$

但$\left\{(\mathrm{s})\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mu\right\}$和$\left\{(\mathrm{s})\int_\Omega \widetilde{X}_n \mathrm{d}\mu\right\}$都是$\left\{(\mathrm{s})\int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mu\right\}$的子序列,所以

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mu\right) &= (\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_\Omega \widetilde{X}_n \mathrm{d}\mu\right) \\ &= (\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mu\right) = x.\end{aligned}$$

(2) 可由$\{X_n\}$之定义及控制收敛定理证得.

定义 4.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,$X:\Omega \mapsto \mathbf{B}$,$X$关于$\mathscr{F}$强可测,若定义4.2中所定义的

$$(\mathrm{s})\int_\Omega X \mathrm{d}\mu$$

在$\mathbf{B}$中唯一存在,则称X(在Ω上)是**Bochner 可积的**.

从定理4.1可知:$\int_\Omega \|X(\omega)\| \mu(\mathrm{d}\omega) < \infty$是$\mathbf{B}$值强可测的$X$为Bochner可积的充要条件.

与普通的Lebesgue积分一样,我们定义

$$(\mathrm{s})\int_A X \mathrm{d}\mu = (\mathrm{s})\int_\Omega \mathbf{1}_A X \mathrm{d}\mu \quad (A \in \mathscr{F}).$$

定理 4.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备测度空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,$X_i:\Omega \mapsto \mathbf{B}$,$X_i$关于$\mathscr{F}$强可测,且$\int_\Omega \|X_i\| \mathrm{d}\mu < \infty$,$c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1,\cdots,n)$,则

(1) $\sum_{i=1}^n c_i X_i$是Bochner可积的,且

$$(\mathrm{s})\int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i X_i \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n c_i \left((\mathrm{s})\int_\Omega X_i \mathrm{d}\mu \right);$$

(2)　若 $A_n \in \mathscr{F}$, $A_n A_m = \varnothing\ (n \neq m)$，则

$$(\mathrm{s})\int_{\bigcup\limits_n A_n} X_i \mathrm{d}\mu = \sum_n (\mathrm{s})\int_{A_n} X_i \mathrm{d}\mu;$$

(3)　$\| (\mathrm{s})\int_\Omega f_i \mathrm{d}\mu \| \leqslant \int_\Omega \| f_i \| \mathrm{d}\mu$;

(4)　若 $u:\Omega \mapsto \mathbf{R}$, $u \in \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$, $\int_\Omega |u| \mathrm{d}\mu < \infty$，则对任何 $x \in \mathbf{B}$，有

$$(\mathrm{s})\int_\Omega u(\omega) x \mu(\mathrm{d}\omega) = x \int_\Omega u(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega).$$

证明甚易，从略.

下面我们先引进实值随机变量关于 σ 代数的条件期望，然后再引进 $\mathbf{B}$ 值强可测随机元关于 σ 代数的条件期望.

定义 4.4　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是任一完备概率空间，X 是其上的随机变量，$\boldsymbol{E}(|X|) < \infty$，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数. 若 $Y \in \mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$，而且满足

$$\int_A Y \mathrm{d}P = \int_A X \mathrm{d}P \quad (\forall A \in \mathscr{G}),$$

则称 Y 是 X 关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的**条件期望**，记之为

$$Y = \boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}).$$

特别地，若 $X = \mathbf{1}_M$ 是 M 上的示性函数，$M \in \mathscr{F}$，则称 $\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})$ 为 M 关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的条件概率，记之为 $\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}) = P(M|\mathscr{G})$.

设 Ω 为任一集合，$(E,\mathscr{E})$ 为任一可测空间，Γ 是任一指标集合，$X_t:\Omega \mapsto E\ (t \in \Gamma)$，记

$$\sigma(X_t, t \in \Gamma) \triangleq \sigma(\bigcup_{t\in\Gamma} X_t^{-1}(\mathscr{E})).$$

显然 $X_t^{-1}(\mathscr{E})$ 是 σ 代数，但 $\bigcup\limits_{t\in\Gamma} X_t^{-1}(\mathscr{E})$ 未必是 σ 代数. $\sigma(\bigcup\limits_{t\in\Gamma} X_t^{-1}(\mathscr{E}))$ 是含 $\bigcup\limits_{t\in\Gamma} X_t^{-1}(\mathscr{E})$ 的最小 σ 代数.

如果对每个 $t \in \Gamma$, $\mathscr{F}_t$ 是 Ω 上的 σ 代数,则恒记

$$\bigvee_{t\in\Gamma}\mathscr{F}_t \triangleq \sigma(\bigcup_{t\in\Gamma}\mathscr{F}_t),$$

于是

$$\sigma(X_t, t \in \Gamma) = \bigvee_{t\in\Gamma} X_t^{-1}(\mathscr{E}).$$

以后总记

$$\boldsymbol{E}(X \mid X_t, t \in \Gamma) \triangleq \boldsymbol{E}(X \mid \sigma(X_t, t \in \Gamma)).$$

$\boldsymbol{E}(X \mid X_t = x)$ 为 $\boldsymbol{E}(X \mid X_t)$ 在 $\{\omega \in \Omega: X_t(\omega) = x\}$ 上的值.

注意:由 Radon-Nikodym 定理得知:若 $\boldsymbol{E}(|X|) < \infty$, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数,则 $\boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G})$ 除一个 P 测度为 0 的集合外是唯一存在的.以后言及条件期望(特别地,条件概率)相等,均系除一个 P 测度为 0 的集合外相等,[a.e.] 符号略去不写.

下面我们列举条件期望(概率)的性质.

(1) 设 $X, X_1, \cdots, X_n$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量, $c, c_1, \cdots, c_n$ 是实数, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数, $\boldsymbol{E}(|X|) < \infty$, $\boldsymbol{E}(|X_i|) < \infty$,则

(a) $\boldsymbol{E}(c \mid \mathscr{G}) = c$;

(b) $\boldsymbol{E}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \mid \mathscr{G}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{E}(X_i \mid \mathscr{G})$;

(c) $X_1 \geqslant X_2 \Longrightarrow \boldsymbol{E}(X_1 \mid \mathscr{G}) \geqslant \boldsymbol{E}(X_2 \mid \mathscr{G})$,特别地,

$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}) \geqslant 0.$$

(2) 设 X 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量, $\boldsymbol{E}(|X|) < \infty$, $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \mathscr{G}_3$ 皆为 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数,且 $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \subset \mathscr{G}_3$,如果 $\boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_3)$ 关于 $\mathscr{G}_1$ 可测,则

$$\boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_1) = \boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_2) = \boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_3);$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_2) \mid \mathscr{G}_1) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_1) \mid \mathscr{G}_2) = \boldsymbol{E}(X \mid \mathscr{G}_1).$$

(3) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间, $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数, $A_n \in \mathscr{F}$ $(n \geqslant 1)$,则

(a) $A_n \uparrow A$ (相应地, $A_n \downarrow A$) $\Longrightarrow P(A_n \mid \mathscr{G}) \uparrow P(A \mid \mathscr{G})$

(相应地,$P(A_n|\mathscr{G})\downarrow P(A|\mathscr{G})$);

(b) $A_n\cap A_m=\varnothing\ (n\neq m)\Longrightarrow P(\bigcup_{n\geq 1}A_n|\mathscr{G})$

$$=\sum_{n\geq 1}P(A_n|\mathscr{G}).$$

(4) 设 X 和 Y 都是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,$\boldsymbol{E}(|X|)<\infty$, $\boldsymbol{E}(|XY|)<\infty$, $\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$中的子σ代数,Y关于$\mathscr{G}$可测,则

$$\boldsymbol{E}(XY|\mathscr{G})=Y\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}),$$

特别地,若 f 是实变实值的 Borel 可测函数,则

$$\boldsymbol{E}(Xf(Y)|Y)=f(Y)\boldsymbol{E}(X|Y).$$

(5) 若 X 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,$\boldsymbol{E}(|X|)<\infty$, $\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$中的子σ代数, $\mathscr{G}$与$\sigma(X)$相互独立,即是任取 $A\in\mathscr{G}$, $B\in\sigma(X)$,恒有 $P(AB)=P(A)P(B)$,则

$$\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})=\boldsymbol{E}(X).$$

特别地,若两随机变量 X 与 Y 相互独立,则

$$\boldsymbol{E}(X|Y)=\boldsymbol{E}(X).$$

(6) 设 X 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,$\boldsymbol{E}(|X|)<\infty$, $\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$中的子σ代数,$A\in\mathscr{G}$, $\mathscr{G}_1\triangleq\{B:B=AD,\ D\in\mathscr{G}\}$,则 $\mathscr{G}_1$ 是 $\mathscr{G}$ 中的子σ代数,$A\in\mathscr{G}_1$ 且

$$\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})\mathbf{1}_A=\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}_1)\mathbf{1}_A.$$

定义4.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间,$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$是$\mathscr{F}$中的子$\sigma$代数. 称$\mathscr{G}_1$与$\mathscr{G}_2$**相互独立**,如果对任意 $A_i\in\mathscr{G}_i\,(i=1,2)$, A_1 与 A_2 独立,即 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$. 设$\mathscr{G}$也是$\mathscr{F}$的子σ代数,称$\mathscr{G}_1$与$\mathscr{G}_2$关于$\mathscr{G}$**条件独立**,如果对任意 $A_i\in\mathscr{G}_i\,(i=1,2)$,有

$$P(A_1A_2|\mathscr{G})=P(A_1|\mathscr{G})P(A_2|\mathscr{G}).$$

定理4.3 $\mathscr{G}_1$ 与 $\mathscr{G}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立的充要条件是

$$P(B_2|\mathscr{G})=P(B_2|\mathscr{G}\vee\mathscr{G}_1)\quad(\forall B_2\in\mathscr{G}_2).\tag{4.3}$$

证 任取 $B\in\mathscr{G}$, $B_1\in\mathscr{G}_1$, $B_2\in\mathscr{G}_2$. 由条件期望的定义及

性质(4) 有

$$\int_{B\cap B_1}\mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P=\int_B\mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P=\int_B\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})\mathrm{d}P,\quad(4.4)$$

$$\int_{B\cap B_1}P(B_2|\mathscr{G})\mathrm{d}P=\int_B\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})|\mathscr{G})\mathrm{d}P$$

$$=\int_B\mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_1}|\mathscr{G})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})\mathrm{d}P.\quad(4.5)$$

现证定理的必要性部分. 设 $\mathscr{G}_1$ 与 $\mathscr{G}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立,则对一切 $B\in\mathscr{G}$, $B_1\in\mathscr{G}_1$, $B_2\in\mathscr{G}_2$,恒有

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}|\mathscr{G})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G}).\quad(4.6)$$

由(4.4),(4.5),(4.6)有

$$\int_{B\cap B_1}\mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P=\int_{B\cap B_1}P(B_2|\mathscr{G})\mathrm{d}P.\quad(4.7)$$

欲证(4.3)成立,注意 $P(B_2|\mathscr{G})$ 关于 $\mathscr{G}\vee\mathscr{G}_1$ 可测,则只需证明对任何 $C\in\mathscr{G}\vee\mathscr{G}_1$ 有

$$\int_C\mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P=\int_C P(B_2|\mathscr{G})\mathrm{d}P.\quad(4.8)$$

事实上,任取 $B_2\in\mathscr{G}_2$,令

$$\mathfrak{M}=\left\{C:\int_C\mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P=\int_C P(B_2|\mathscr{G})\mathrm{d}P\right\},$$

$$\mathfrak{M}_1=\{C:C=B\cap B_1,\ B\in\mathscr{G},\ B_1\in\mathscr{G}_1\},$$

则 $\mathfrak{M}_1$ 是 Π 系且 $\mathfrak{M}_1\supset\mathscr{G}\cup\mathscr{G}_1$. 由(4.7)知:$\mathfrak{M}\supset\mathfrak{M}_1$. 显然,$\mathfrak{M}_1$ 是 d 系,所以由第二章定理 1.2 有

$$\mathfrak{M}\supset\mathfrak{M}_1=d(\mathfrak{M}_1)=\sigma(\mathfrak{M}_1)\supset\sigma(\mathscr{G}\cup\mathscr{G}_1)$$

$$=\mathscr{G}\vee\mathscr{G}_1.$$

此即(4.8)对一切 $C\in\mathscr{G}\vee\mathscr{G}_1$ 成立. 必要性部分得证.

最后证明定理的充分性部分. 设(4.3)对一切 $B_2\in\mathscr{G}_2$ 成立. 则

$$\int_{B\cap B_1} P(B_2|\mathscr{G})\mathrm{d}P = \int_{B\cap B_1} \mathbf{1}_{B_2}\mathrm{d}P \quad (B\in\mathscr{G},\ B_i\in\mathscr{G}_i). \tag{4.9}$$

由(4.4),(4.5),(4.9)有

$$\int_B \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})\mathrm{d}P$$
$$= \int_B \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}|\mathscr{G})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G})\mathrm{d}P \quad (B\in\mathscr{G},\ B_i\in\mathscr{G}_i). \tag{4.10}$$

而(4.10)式左、右两边积分的被积函数都是关于$\mathscr{G}$可测的,所以

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G}) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1}|\mathscr{G})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_2}|\mathscr{G}).$$

充分性得证.定理证毕.

定理 4.4 设 Ω 是任一集合,$(E,\mathscr{E})$ 是任一可测空间,$f:\Omega\mapsto E$, $g:\Omega\mapsto\overline{\mathbf{R}}$,则 g 关于$\sigma(f)$ 可测的充要条件是存在

$$h:E\mapsto\overline{\mathbf{R}},\quad h\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}),$$

使 $g=h(f)$.

证 充分性显然成立.下证必要性.令

$$\mathscr{H}=\{g:g=h(f),\ h\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{R})\},$$

则$\mathscr{H}$是包含全体常值函数的向量空间.令$\{h_n(f):n\geqslant 1\}$是$\mathscr{H}$中的使 $F=\sup\limits_{n\geqslant 1}(h_n(f))$ 为实值函数的一个非降序列,再令

$$A=\{x\in E:\sup_{n\geqslant 1}h_n(x)<\infty\},$$

则 $A\in\mathscr{E}$, $f(\Omega)\subset A$.定义

$$h(x)=\begin{cases}\sup\limits_{n\geqslant 1}h_n(x), & 若\ x\in A,\\ 0, & 若\ x\overline{\in} A,\end{cases}$$

则 $h\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,且 $F=h(f)$,即 $F\in\mathscr{H}$.如果集合 $C\in\sigma(f)$,则由 $\sigma(f)$ 的定义知存在 $B\in\mathscr{E}$,使 $C=f^{-1}(B)$,从而 $\mathbf{1}_C=\mathbf{1}_B\circ f\in\mathscr{H}$.由第二章定理1.3得知$\mathscr{H}$包含了 Ω 上一切实值$\sigma(f)$ 可测的函数,即是对任何 $g\in\sigma(f)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,必有 $h\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,使 $g=h(f)$.

现再取$g\in\sigma(f)/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$,令$g^*=\arctan g$,则$g^*\in\sigma(f)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$.如前所证,存在$h^*\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,使$g^*=h^*(f)$.我们可以假定$h^*(E)\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,因为$g^*$只在此区间上取值.令$h=\tan h^*$,则$h\in\mathscr{E}/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$, $g=h(f)$.定理证毕.

定理4.5 设Ω为任一集合,Γ为任一指标集,$\{\mathscr{G}_i:i\in\Gamma\}$是$\Omega$上一族$\sigma$代数,$\mathscr{G}=\bigvee_{i\in\Gamma}\mathscr{G}_i$,则对每一个$A\in\mathscr{G}$,总存在$\Gamma$的可数子集$I$,使$A\in\bigvee_{i\in I}\mathscr{G}_i$.

证 令

$\mathfrak{M}=\{A\in\mathscr{G}$: 存在$\Gamma$的可数子集$I$,使$A\in\bigvee_{i\in I}\mathscr{G}_i\}$,则$\mathfrak{M}\supset\bigcup_{i\in\Gamma}\mathscr{G}_i$,且$\mathfrak{M}$是$\sigma$代数,故$\mathfrak{M}=\mathscr{G}$.定理证毕.

定理4.6 设Ω,Γ如前,$\{(E_i,\mathscr{E}_i):i\in\Gamma\}$是一族可测空间,$f_i:\Omega\mapsto E_i\ (i\in\Gamma)$,令$\mathscr{F}=\sigma(f_i,i\in\Gamma)$, $\varphi:\Omega\mapsto\overline{\mathbf{R}}$, $\varphi\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$,则存在$\Gamma$的可数子集$I$及定义在可测空间$(\bigtimes_{i\in I}E_i,\bigtimes_{i\in I}\mathscr{E}_i)$上的取值于$\overline{\mathbf{R}}$的函数$h$,且$h\in(\bigtimes_{i\in I}\mathscr{E}_i)/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$,使

$$\varphi=h\circ f_I,$$

其中$f_I(\omega)=(f_i(\omega),i\in I)$, $\omega\in\Omega$.

证 令$\mathfrak{M}=\{[a,b]:a$为有理数或$-\infty$, b为有理数或$\infty\}$,则$\mathfrak{M}$为可数集合系.不妨记之为$\mathfrak{M}=\{A_1,A_2,\cdots\}$.对每个$A_k\in\mathfrak{M}$,由$\varphi\in\mathscr{F}/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$得知$\varphi^{-1}(A_k)\in\mathscr{F}$.由定理4.5得知存在$\Gamma$的可数子集$I_k$,使

$$\varphi^{-1}(A_k)\in\sigma(f_i,i\in I_k).$$

令$I=\bigcup_{k\geq1}I_k$,则$\varphi^{-1}(\mathfrak{M})\subset\sigma(f_i,i\in I)$,因此

$$\varphi^{-1}(\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))=\varphi^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))=\sigma(\varphi^{-1}(\mathfrak{M}))\subset\sigma(f_i,i\in I),$$

此即

$$\varphi\in\sigma(f_i,i\in I)/\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}).$$

再用定理4.4得知:满足定理4.6中的条件的h是存在的.定理证毕.

作为定理 4.6 的应用,有

定理 4.7 设 Y 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量,Γ 是任一指标集,$\{X_i: i\in\Gamma\}$ 是一族随机变量,$\boldsymbol{E}(|Y|)<\infty$,则存在 Γ 的一个可数子集 I,及定义在可测空间 $\left(\bigtimes_{i\in I}\mathbf{R}_i, \bigtimes_{i\in I}\mathscr{B}_i\right)$ 上的实值函数 h, $h\in\left(\bigtimes_{i\in I}\mathscr{B}_i\right)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,使

$$\boldsymbol{E}(Y|X_i, i\in\Gamma) = h\circ X_I,$$

其中 $X_I(\omega)=(X_i(\omega), i\in I)$, $\omega\in\Omega$, $\mathbf{R}_i\equiv\mathbf{R}$, $\mathscr{B}_i\equiv\mathscr{B}(\mathbf{R})$, $i\in I$.

证 在定理 4.6 中取 $\varphi=\boldsymbol{E}(Y|X_i, i\in\Gamma)$, $E_i\equiv\mathbf{R}$, $\mathscr{E}_i\equiv\mathscr{B}(\mathbf{R})$, $f_i=X_i$, $i\in\Gamma$,则由定理 4.6 和定理 4.4 及下面的附注 4.1 即可得定理 4.7.

附注 4.1 若 $\Gamma=\{1,2,\cdots,n\}$,则存在

$$h:\mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{R},\ h\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)/\mathscr{B}(\mathbf{R}),$$

使 $\boldsymbol{E}(Y|X_1,\cdots,X_d)=h(X_1,\cdots,X_d)$.

下面我们将给出期望与条件期望的 Jensen 不等式.

定义 4.6(凸集与凸函数) 称 $\mathbf{R}^d$ 中的子集 S 是**凸集**,如果

$$x,y\in S\Longrightarrow((1-\lambda)x+\lambda y)\in S\ (\forall 0<\lambda<1).$$

设 S 是 $\mathbf{R}^d$ 中任一子集,$f:S\mapsto\mathbf{R}$,若

$$\{(x,t): x\in S,\ t\in\mathbf{R},\ t\geqslant f(x)\}$$

是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的凸集,则称 f 是 S 上的**凸函数**.

显然 $\mathbf{R}$ 中的区间(开的或闭的或半开半闭的,有穷的或无穷的)均为凸集,反之,若注意对任何 $\alpha<\gamma<\beta$,有

$$\gamma=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\beta+\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\cdot\alpha,$$

则可知 $\mathbf{R}$ 中任何凸集必为区间(开的或闭的或半开半闭的,有穷的或无穷的).

我们首先给出凸函数的几条性质,详细证明请参见[71].

命题 4.2 设 $f:(\alpha,\beta)\mapsto\mathbf{R}$ (α 可为 $-\infty$, β 可为 ∞),则下

列陈述等价:

(1) f 是(α,β) 上的凸函数;

(2) $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $(\forall\lambda\in(0,1),\ x,y\in(\alpha,\beta))$;

(3) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$ $(\forall x,y\in(\alpha,\beta))$,且 f 在(α,β) 上连续.

由命题4.2可知:定义在$\mathbf{R}$中的凸集 S 上的实值凸函数f 必是 Borel 可测的,即

$$f\in(S\cap\mathscr{B}(\mathbf{R}))/\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

命题 4.3 设 f 和(α,β) 如命题 4.2,则

(1) 若 f 有单调非降连续导函数f',则 f 是(α,β) 上的凸函数;

(2) 若 f 有二阶连续导函数 f'',则"f 是(α,β) 上的凸函数 $\Longleftrightarrow f''(x)\geqslant 0$ $(\forall x\in(\alpha,\beta))$";

(3) $f(x)\triangleq|x|^p$ $(1\leqslant p<\infty)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数.

命题 4.4 若 f 是 $\mathbf{R}$ 中之凸子集 S 上的凸函数,则必存在 $f_n(x)=a_nx+b_n$, $f_n(x)\leqslant f(x)$ $(\forall x\in S,\ n\geqslant 1)$,使 $f(x)=\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n(x)$ $(\forall x\in S^\circ)$,其中 S° 是如第一章所定义的 S 的开核.

定理4.8(Jensen不等式) 设 X 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,f 为$\mathbf{R}$中的凸子集 S 上的凸函数,且 $X(\Omega)\subset S$, $\boldsymbol{E}(|X|)<\infty$,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数,则

(1) $f(\boldsymbol{E}(X))\leqslant\boldsymbol{E}(f(X))$;

(2) $f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}))\leqslant\boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G})$.

证 由于$\mathbf{R}$中之凸子集 S 必为区间(开的或闭的或半开半闭的,有穷的或无穷的),所以总可令 $S^\circ=(\alpha,\beta)$ 为开区间,$S-S^\circ$ 至多只含两点 α 和β(当 α,β 为有限数时才有可能),且由 $X(\Omega)\subset S$ 可知$\boldsymbol{E}(X)\in S$.

(1)　若 $\boldsymbol{E}(X)\in S^{\circ}$,则取$\{f_n\}$满足命题4.4中的条件,于是有

$$f(\boldsymbol{E}(X))=\sup_{n\geqslant1}f_n(\boldsymbol{E}(X))=\sup_{n\geqslant1}\boldsymbol{E}(f_n(X))$$
$$\leqslant\boldsymbol{E}(f(X)).$$

若 $\boldsymbol{E}(X)\in S-S^{\circ}$,不妨设 $\boldsymbol{E}(X)=\alpha$ 是实数.由于 $X(\omega)\in S=[\alpha,\beta)\ (\forall\,\omega\in\Omega)$,所以

$$X=\alpha,\ [\text{a.e.}],$$

从而 $f(\boldsymbol{E}(X))=f(\alpha)=\boldsymbol{E}(f(X))$.

(2)　取$\{f_n\}$满足命题4.4中的条件,令

$$A^{\circ}=\{\omega\in\Omega:\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega)\in S^{\circ}\},$$
$$A_\alpha=\{\omega\in\Omega:\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega)=\alpha\},$$
$$A_\beta=\{\omega\in\Omega:\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega)=\beta\}.$$

(a)　若 $\omega\in A^{\circ}$,则

$$f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega))=\sup_{n\geqslant1}f_n(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega))$$
$$=\sup_{n\geqslant1}\boldsymbol{E}(f_n(X)|\mathscr{G})(\omega)$$
$$\leqslant\boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G})(\omega).$$

(b)　若 $\omega\in A_\alpha$,则仍有

$$f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega))\leqslant\boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G})(\omega).$$

事实上,由于 $X-\alpha\geqslant0,\ A_\alpha\in\mathscr{G}$,所以

$$\int_{A_\alpha}(X-\alpha)\mathrm{d}P=\int_{A_\alpha}(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})-\alpha)\mathrm{d}P=0,$$

因此,$X=\alpha$, [a.e.] in A_α.而由 A_α 的定义有

$$\mathbf{1}_{A_\alpha}f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}))=\mathbf{1}_{A_\alpha}f(\alpha)=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_\alpha}f(\alpha)|\mathscr{G})$$
$$=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_\alpha}f(X)|\mathscr{G})=\mathbf{1}_{A_\alpha}\boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G}).$$

此即 $f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega))=\boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G})(\omega)\ (\forall\,\omega\in A_\alpha)$.

(c)　仿(b)可证

$$f(\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})(\omega)) = \boldsymbol{E}(f(X)|\mathscr{G})(\omega) \quad (\forall\, \omega \in A_\beta).$$

定理证毕.

下面我们考察两种特殊场合下的条件期望的计算.

第一种场合:设(X,Y)是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的2维随机变量,而且是连续型的,即(X,Y)的分布函数

$$F(x,y) \triangleq P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

有密度函数$p(s,t)$,亦即$p(s,t)$是非负2维Lebesgue可积函数且满足:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \quad (x,y \in \mathbf{R}).$$

令$p_X(s)$,$p_Y(t)$分别为X,Y的密度函数,即

$$p_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,t)\mathrm{d}t, \quad p_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,t)\mathrm{d}s.$$

令$C \triangleq \{x \in \mathbf{R}: p_X(x) > 0\}$,易见

$$P(X \overline{\in} C) = \int_{\{x\in\mathbf{R}:\, p_X(x)=0\}} p_X(x)\mathrm{d}x = 0.$$

定义

$$p(y|x) \triangleq \begin{cases} p(x,y)/p_X(x), & \text{当 } x \in C,\ y \in \mathbf{R}, \\ p_Y(y), & \text{当 } x \overline{\in} C,\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

为Y在$X=x$的条件密度函数.再设$\boldsymbol{E}(|Y|) < \infty$.由定理4.7的附注4.1知:存在$g_Y \in \mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$,使$\boldsymbol{E}(Y|X) = g_Y(X)$.则可证:

(1) $g_Y(x) = E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y|x)\mathrm{d}y \ (x \in C)$;

(2) $$\boldsymbol{E}(Y) = \int_{\mathbf{R}} g_Y(x)p_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{E}(Y|X=x)p_X(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 对任何$f \in \mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$, $\boldsymbol{E}(|f(X)Y|) < \infty$,有
$\boldsymbol{E}(f(X)Y|X=x) = f(x)g_Y(x)$

$$= f(x)\boldsymbol{E}(Y|X=x) \quad (x \in C),$$

$$\boldsymbol{E}(f(X)Y) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g_Y(x)p_X(x)\mathrm{d}x$$

$$= \boldsymbol{E}(f(X)\boldsymbol{E}(Y|X)).$$

第二种场合:设(X,Y)是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的2维随机变量,而且是离散型的,即存在两个有限或可数无穷的指标集 Γ_1 和 Γ_2,使$\{x_i:i\in\Gamma_1\}\subset\mathbf{R}$, $\{y_j:j\in\Gamma_2\}\subset\mathbf{R}$,

$$\sum_{i\in\Gamma_1}P(X=x_i)=\sum_{j\in\Gamma_2}P(Y=y_j)=1.$$

令

$$p_{i,j}=P(X=x_i,Y=y_j),$$

$$p_{i,\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j\in\Gamma_2}p_{i,j},$$

$$p_{\cdot,j}=P(Y=y_j)=\sum_{i\in\Gamma_1}p_{i,j},$$

称$\{p_{i,j}:i\in\Gamma_1,\ j\in\Gamma_2\}$为$(X,Y)$的**(联合)分布**,称$\{p_{i,\cdot}:i\in\Gamma_1\}$为 **X 的(边缘)分布**,称$\{p_{\cdot,j}:j\in\Gamma_2\}$为 **Y 的(边缘)分布**. 令

$$C=\{x_i\in\mathbf{R}:p_{i,\cdot}>0\},$$

易见 $P(X\overline{\in}C)=0$. 定义

$$p_{j|i}\triangleq\begin{cases}p_{i,j}/p_{i,\cdot}, & \text{当 } x_i\in C,\ j\in\Gamma_2,\\ p_{\cdot,j}, & \text{当 } x_i\overline{\in}C,\ j\in\Gamma_2,\end{cases}$$

称$\{p_{j|i}:j\in\Gamma_2\}$为 Y 在$X=x_i$ 下的条件分布. 设$\boldsymbol{E}(|Y|)<\infty$,则可证

(1) $\boldsymbol{E}(Y|X=x_i)=\sum\limits_{j\in\Gamma_2}y_jp_{j|i}\ (x_i\in C)$;

(2) $\boldsymbol{E}(Y)=\sum\limits_{j\in\Gamma_2}y_jp_{\cdot,j}=\sum\limits_{i\in\Gamma_1}\boldsymbol{E}(Y|X=x_i)\cdot p_{i,\cdot}$;

(3) 对任何 $f\in\mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$, $\boldsymbol{E}(|f(X)|Y)<\infty$,有

$\boldsymbol{E}(f(X)Y|X=x_i)=f(x_i)\boldsymbol{E}(Y|X=x_i)$

$$= f(x_i)\sum_{j\in\Gamma_2} y_j p_{j\mid i} \quad (x_i \in C),$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(f(X)Y) &= \boldsymbol{E}(f(X)\boldsymbol{E}(Y|X)) \\ &= \sum_{i\in\Gamma_1} f(x_i)\boldsymbol{E}(Y|X=x_i)p_{i,\cdot} \\ &= \sum_{i\in\Gamma_1} f(x_i)p_{i,\cdot}\sum_{j\in\Gamma_2} y_j p_{j\mid i}. \end{aligned}$$

下面,我们引进 **B** 值强可测随机元 X 关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的条件期望.

定义 4.7(**B** 值强可测随机元的条件期望) 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是 Banach 空间,X 是 **B** 值强可测随机元且 Bochner 可积,$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$中的子 σ 代数且关于P亦为完备的(即$\mathscr{G}$中的 P 零测集之子集恒属于 $\mathscr{G}$). 如果存在

$$Y:\Omega \mapsto \mathbf{B},$$

满足:

(i) Y 关于 $\mathscr{G}$ 强可测,且$\int_{\Omega}\|Y(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega)<\infty$ (从而 Y 是 Bochner 可积的);

(ii) $(\mathrm{s})\int_A X\mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A Y\mathrm{d}P \ (\forall A \in \mathscr{G})$,

则称 Y 是 X 关于 σ 代数 $\mathscr{G}$ 的**强条件期望**(有时简称条件期望),记作

$$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}) = Y.$$

若$\{X_i : i\in\Gamma\}$是 **B** 值随机元族,则记

$$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X|X_i, i\in\Gamma) \triangleq (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X|\sigma(X_i, i\in\Gamma)).$$

定理 4.9 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$,$\mathscr{G}$,X 如定义 4.7,则 $Y=(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G})$ 在[a.e.]意义下唯一存在.

证 若 $X=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{1}_{A_i}$ 是简单算子,令

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_i}|\mathscr{G}).$$

则 Y 关于 $\mathscr{G}$ 强可测，$\int_{\Omega}\|Y(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega)<\infty$，而且对任何 $A\in\mathscr{G}$，总有

$$(\mathrm{s})\int_A Y\mathrm{d}P=\sum_{k=1}^{n}x_k\int_A \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_k}\mid\mathscr{G})\mathrm{d}P$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\int_A \mathbf{1}_{A_k}\mathrm{d}P=(\mathrm{s})\int_A X\mathrm{d}P,$$

即 $Y=(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G})$.

若 X 是一般的Bochner可积的强可测随机元，则由命题4.1及定理4.1得知：存在简单算子列

$$X_n=\sum_{i=1}^{k_n}x_i^{(n)}\mathbf{1}_{A_i^{(n)}},$$
$$\|X_n(\omega)\|\leqslant 2\|X(\omega)\|\quad(\forall\,\omega\in\Omega,\ n\geqslant 1),$$
$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [\mathrm{a.e.}],$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|X(\omega)-X_n(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega)=0.$$

令

$$Y_n=(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_n\mid\mathscr{G})=\sum_{i=1}^{k_n}x_i^{(n)}\boldsymbol{E}\left(\mathbf{1}_{A_i^{(n)}}\mid\mathscr{G}\right),\qquad(4.11)$$

则 Y_n 关于 $\mathscr{G}$ 强可测，$\boldsymbol{E}(\|Y_n\|)<\infty$，又

$$X_n-X_m=\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m}(x_i^{(n)}-x_j^{(m)})\mathbf{1}_{A_i^{(n)}}\mathbf{1}_{A_j^{(m)}},$$
$$Y_n-Y_m=\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m}(x_i^{(n)}-x_j^{(m)})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_i^{(n)}}\mathbf{1}_{A_j^{(m)}}\mid\mathscr{G}),$$

所以

$$\int_{\Omega}\|Y_n(\omega)-Y_m(\omega)\|P(\mathrm{d}\omega)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m}\|x_i^{(n)}-x_j^{(m)}\|P(A_i^{(n)}\cap A_j^{(m)})$$

$$= \int_\Omega \| X_n(\omega) - X_m(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega).$$

因此,

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_\Omega \| Y_n(\omega) - Y_m(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega) = 0. \qquad (4.12)$$

而 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 是完备的(参见第三章例 1.2),所以由(4.12)式得知存在 $Y \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 使

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| Y(\omega) - Y_n(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega) = 0. \qquad (4.13)$$

推证:

$$Y = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X|\mathscr{G}). \qquad (4.14)$$

由于 $Y \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$,为证(4.14),只需证明

$$(\mathrm{s})\int_A X\mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A Y\mathrm{d}P \quad (\forall A \in \mathscr{G}). \qquad (4.15)$$

但是

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| X(\omega) - X_n(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| Y(\omega) - Y_n(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega) = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \| X(\omega) - X_n(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_A \| Y(\omega) - Y_n(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega) = 0 \quad (\forall A \in \mathscr{G}).$$

因此,由 $Y_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_n|\mathscr{G})$ 可得

$$(\mathrm{s})\int_A Y\mathrm{d}P = (\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_A Y_n\mathrm{d}P\right)$$

$$= (\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty}((\mathrm{s})\int_A X_n\mathrm{d}P)$$

$$= (\mathrm{s})\int_A X\mathrm{d}P \quad (\forall A \in \mathscr{G}).$$

(4.15) 式得证.

最后证明条件期望在[a.e.]意义下的唯一性. 为此只需证明下面的

命题 4.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$, $(\mathbf{B},\|\cdot\|)$, $\mathscr{G}$如定理 4.8, Y是Bochner可积的$\mathbf{B}$值随机元, 且关于$\mathscr{G}$强可测, $(s)\int_A Y\,\mathrm{d}P = 0$ $(\forall A \in \mathscr{G})$, 则 $Y = 0$, [a.e.].

证 由Y满足命题4.5的条件可取简单算子列$\{Y_n : n \geqslant 1\}$使

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} y_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}} \quad (n \geqslant 1),$$

$$A_i^{(n)} \in \mathscr{G},\ A_i^{(n)} A_j^{(n)} = \varnothing \quad (i \neq j),$$

$$\bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^{(n)} = \Omega,\ y_i^{(n)} \in \mathbf{B} \quad (1 \leqslant i \leqslant k_n,\ n \geqslant 1)$$

$$\| Y_n(\omega) \| \leqslant 2 \| Y(\omega) \| \quad (n \geqslant 1)$$

$$(s) \lim_{n\to\infty} Y_n = Y, \quad [\text{a.e.}],$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| Y_n(\omega) - Y(\omega) \| P(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

由$A_i^{(n)} \in \mathscr{G}$及命题假设可知

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \| Y_n \| \mathrm{d}P &= \sum_{i=1}^{k_n} \int_{A_n^{(i)}} \| Y_n \| \mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{k_n} \| y_i^{(n)} \| P(A_i^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} \left\| (s)\int_{A_n^{(i)}} Y_n \mathrm{d}P \right\| \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} \left\| (s)\int_{A_i^{(n)}} Y_n \mathrm{d}P - (s)\int_{A_i^{(n)}} Y \mathrm{d}P \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \int_{A_i^{(n)}} \| Y_n - Y \| \mathrm{d}P \\
&= \int_\Omega \| Y_n - Y \| \mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Omega}\| Y\| \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Omega}\| Y - Y_n\| \mathrm{d}P + \int_{\Omega}\| Y_n\| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant 2\int_{\Omega}\| Y_n - Y\| \mathrm{d}P \to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty).$$

故 $Y = 0$, [a.e.].命题证毕,定理 4.8 得证.

关于 Bochner 可积的 **B** 值随机元的条件期望,具有下列性质:

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$X,X_1,\cdots,X_n$ 是Bochner可积的**B**值随机元,$\mathscr{G},\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2,\mathscr{G}_3$是$\mathscr{F}$中的子 σ 代数,$c_1,\cdots,c_n$ 是实数,$x\in\mathbf{B}$. Y 是强可测 **B** 值随机元.

(1) $(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(x\mid\mathscr{G}) = x$;

(2) $(\mathrm{s})\boldsymbol{E}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \mid \mathscr{G}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_i\mid\mathscr{G})c_i$;

(3) $\|(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G})\| \leqslant \boldsymbol{E}(\|X\|\mid\mathscr{G})$;

(4) 若 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2\subset\mathscr{G}_3$, $(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G}_3)$ 关于 $\mathscr{G}_1$ 强可测,则

$$\begin{aligned}(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G}_1) &= (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G}_2) = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G}_3)\\ &= (\mathrm{s})\boldsymbol{E}([(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X/\mathscr{G}_2)]\mid\mathscr{G}_1)\\ &= (\mathrm{s})\boldsymbol{E}([(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid\mathscr{G}_1)]\mid\mathscr{G}_2);\end{aligned}$$

(5) 若 X 与 Y 相互独立,则

$$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X\mid Y) = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X).$$

第五章　平稳独立增量过程

§1　Poisson 过程

本章,我们将要研究平稳独立增量过程,即 Lévy 过程.我们先从两个具有代表性的特殊的平稳独立增量过程——Poisson 过程和 Brown 运动开始,然后再讨论一般的平稳独立增量过程.在平稳独立增量过程的理论框架建立后,再研究另外两个重要的平稳独立增量过程——Subordinator 和 Stable 过程.

定义 1.1　称概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的取值于$\{0,1,2,\cdots\}$中的随机过程$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是始于 0 的**标准 Poisson 过程**,记之为 S.P.P.O.,如果

(ⅰ)　$X_0\equiv 0$;

(ⅱ)　对每个$\omega\in\Omega$, $X(\cdot,\omega)$是非负整值的单增的右连续的函数,且在每个间断点上其跃度为 1;

(ⅲ)　存在$\lambda>0$,使$P(X_t=k)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ $(\forall k=0,1,2,\cdots,\ t\in[0,\infty))$;

(ⅳ)　$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$具有平稳独立增量,即是对任何正整数$n\geqslant 1$,任何非负整数$k_1,\cdots,k_n$,任何非负实数$t_0,t_1,\cdots,t_n$, $t_0<t_1<\cdots<t_n$,都有

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})=k_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i-t_{i-1}}=k_i).$$

称 λ 为 $\{X_t\}$ 的**强度**.

定理 1.1 S.P.P.O.恒存在.

证 由第四章定理 3.2 可以构造概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的相互独立的具有公共分布的随机变量序列 $\{Y_k: k = 1,2,\cdots\}$,其公共分布为

$$H(t) = P(Y_k \leqslant t) = \begin{cases} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx, & \text{当 } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } t < 0 \end{cases}$$

$(k = 1,2,\cdots,\ \lambda$ 为正实数).

再令

$$T_0 \equiv 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \ (n \geqslant 1),$$

则 $\boldsymbol{E}(Y_k) \equiv \dfrac{1}{\lambda}$.所以由强大数定律得知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}, \ [\text{a.e.}].$$

不失普遍性可令 $Y_k(\omega) > 0$, $T_n(\omega) \to \infty$ $(\forall\, \omega \in \Omega)$.再令

$$X_t(\omega) = k, \quad \text{当 } T_k(\omega) \leqslant t < T_{k+1}(\omega)\ (k \geqslant 0),$$

由于 $T_n(\omega) \to \infty$,所以对一切 $\omega \in \Omega$, $t \in [0,\infty)$, $X_t(\omega)$ 都是唯一确定的.推证 $\{X_t: t \in [0,\infty)\}$ 就是一个 S.P.P.O..事实上,

(i) 由定义即得 $X_0 \equiv 0$.

(ii) 显然,对每个 ω, $X(\cdot,\omega)$ 是非负整值的单增的函数,在间断点上跃度为 1.至于右连续性,任取 $t_0 \in [0,\infty)$,由 $T_n(\omega) \to \infty$ 及 $Y_k(\omega) > 0$ 得知必有 k,使 $T_k(\omega) \leqslant t_0 < T_{k+1}(\omega)$.故存在 $\delta > 0$,使 $T_k(\omega) \leqslant t_0 + \tau < T_{k+1}(\omega)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \delta)$.因此

$$X_\tau(\omega) \equiv X_{t_0}(\omega) = k \quad (\forall\, \tau \in [0,\delta]).$$

所以 $\lim\limits_{t \downarrow t_0} X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) = k$.

(iii) 因为 Y_k 的特征函数为

$$\varphi(\alpha) = \boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Y_k}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha y}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\alpha},$$

而$\{Y_k : k \geqslant 1\}$是相互独立具有公共分布的随机变量序列，所以 $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 的特征函数为

$$\varphi(\alpha)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\alpha}\right)^n.$$

但是，n 个自由度的 $\chi^2(n)$ 分布的特征函数与密度函数分别为

$$\Psi_n(\alpha) = \left(\frac{1}{1 - 2\mathrm{i}\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}$$

与

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

所以

$$\varphi(\alpha)^n = \Psi_{2n}\left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right),$$

对应的密度函数为 $2\lambda f_{2n}(2\lambda x)$. 因此，$T_n$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \int_0^t 2\lambda f_{2n}(2\lambda x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n(n-1)!}\int_0^t (2\lambda x)^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot 2\lambda \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

所以

$$\begin{aligned} P(X_t = k) &= P(T_k \leqslant t < T_{k+1}) \\ &= F_k(t) - F_{k+1}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k \geqslant 0). \end{aligned}$$

(iv)　首先证明：

$$P(X_{s+t} = k + j, X_s = j) = \mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$(s,t\in[0,\infty),\ j\geqslant 0,\ k\geqslant 0). \qquad (1.2)$$

(a) 当 $k=0$ 时,由 X_t 之定义及(1.1)并注意 T_j 与 Y_{j+1} 独立,可得

$$\begin{aligned} P(X_{s+t}=j,X_s=j) &= P(T_j\leqslant s<T_{j+1},\ T_j\leqslant s+t<T_{j+1}) \\ &= P(T_j\leqslant s,\ T_{j+1}>s+t) \\ &= P(T_j\leqslant s,\ T_j+Y_{j+1}>s+t) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

此即 $k=0$ 时(1.2)式成立.

(b) 当 $k\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} &P(X_{s+t}=j+k,X_s=j) \\ &= P(T_j\leqslant s<T_{j+1},\ T_{j+k}\leqslant s+t<T_{j+k+1}) \\ &= P\Big(T_j\leqslant s,\ T_j+Y_{j+1}>s,\ T_j+Y_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{j+k}Y_i\leqslant \\ &\qquad s+t, T_j+Y_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{j+k}Y_i+Y_{j+k+1}>s+t\Big). \end{aligned}$$

而 $T_j, Y_{j+1}, \sum\limits_{i=j+2}^{j+k}Y_i, Y_{j+k+1}$ 相互独立,且它们的密度函数分别为

$$\frac{\lambda^j}{(j-1)!}x^{j-1}\mathrm{e}^{-\lambda x},\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}x^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda x},\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

所以

$$\begin{aligned} &P(X_{s+t}=k+j,X_s=j) \\ &= \int_D \frac{\lambda^j}{(j-1)!}x_1^{j-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\cdot \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}x_3^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda x_3} \\ &\quad \cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_4}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_4 \end{aligned}$$

(其中 $D=\{0\leqslant x_1\leqslant s,\ x_1+x_2>s,\ 0\leqslant x_1+x_2+x_3\leqslant s+t,\ x_3\geqslant 0,\ x_1+x_2+x_3+x_4>s+t\}$)

$$= \int_0^s\mathrm{d}x_1\int_{x_2>s-x_1}\mathrm{d}x_2\cdot\int_{0\leqslant x_3\leqslant s+t-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdot\Big\{\frac{\lambda^j}{(j-1)!}$$

$$x_1^{j-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}x_3^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda x_3}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda(s+t-x_1-x_2-x_3)}\Big)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}\int_0^s\mathrm{d}x_1\int_{s-x_1}^{s-x_1+x}\mathrm{d}x_2\int_0^{s+t-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda^j}{(j-1)!}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}x_1^{j-1}x_3^{k-2}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}\int_0^s\mathrm{d}x_1\int_{s-x_1}^{s-x_1+t}\mathrm{d}x_2$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda^j}{(j-1)!}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}x_1^{j-1}(s+t-x_1-x_2)^{k-1}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}\int_0^s\mathrm{d}x_1\left(\frac{\lambda^j}{(j-1)!}\frac{\lambda^k}{k!}x_1^{j-1}t^k\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

即 $k\geqslant 1$ 时,(1.2) 式亦成立.

用(1.2) 式及归纳推理可证:

$$P\Big(\bigcap_{r=1}^n\{X_s=j,\ X_{s+t_1+\cdots+t_r}=j+k_1+\cdots+k_r\}\Big)$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}\prod_{r=1}^n\mathrm{e}^{-\lambda t_r}\frac{(\lambda t_r)^{k_r}}{k_r!}.$$

把上式对 $j\geqslant 0$ 求和得

$$P\Big(\bigcap_{r=1}^n\{X_{s+t_1+\cdots+t_r}-X_{s+t_1+\cdots+t_{r-1}}=k\}\Big)$$

$$=\prod_{r=1}^n\mathrm{e}^{-\lambda t_r}\frac{(\lambda t_r)^{k_r}}{k_r!}\quad(t_0=0,\ n\geqslant 1),\tag{1.3}$$

故 $\{X_t:t\in[0,\infty]\}$ 有平稳独立增量. 定理证毕.

定理1.2　设 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程,它满足:

(ⅰ)　$X_0\equiv 0$;

(ⅱ)　对每个 $\omega\in\Omega$, $X(\cdot,\omega)$ 是非负整值单调非降右连续函数,且在每个间断点上,其跃度为 1;

(ⅲ) $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 具有平稳独立增量,

则存在 $\lambda \geqslant 0$,使

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (t \in [0,\infty),\ k = 0,1,\cdots).$$

若有 $\varepsilon > 0$,使 $P(X_s = 0) < 1$,则可取 $\lambda > 0$,从而 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是 S.P.P.O..

证 令 $f(t) = P(X_t = 0)$.

首先证明存在 $\lambda > 0$,使 $P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$.事实上,由(ⅲ)及(ⅱ),(ⅰ)得知

$$\begin{aligned} f(s+t) &= P(X_{s+t} = 0) = P(X_s = 0, X_{s+t} - X_s = 0) \\ &= P(X_s = 0)P(X_{s+t} - X_s = 0) \\ &= P(X_s = 0)P(X_t = 0) \\ &= f(s)f(t) \quad (s,t \in [0,\infty)), \end{aligned} \tag{1.4}$$

所以 $f(\cdot)$ 在$[0,\infty)$上单调非升.

推证: $f(t) > 0$ (对一切 $t > 0$).假设存在一个 $t_0 > 0$,使 $f(t_0) = 0$,则由(1.4)式知

$$f\left(\frac{t_0}{2^n}\right) = 0 \quad (n \geqslant 0).$$

而 $f(\cdot)$ 在$[0,\infty)$上单调非升,所以

$$f(t) = 0 \quad (\text{对一切 } t > 0).$$

因此,

$$\begin{aligned} P(X_1 \geqslant n) &\geqslant P(X_{\frac{1}{n}} \geqslant 1, X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}} \geqslant 1, \cdots, X_1 - X_{\frac{n-1}{n}} \geqslant 1) \\ &= P(X_{\frac{1}{n}} \geqslant 1)P(X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}} \geqslant 1)\cdots P(X_1 - X_{\frac{n-1}{n}} \geqslant 1) \\ &= (1 - P(X_{\frac{1}{n}} = 0))^n = \left(1 - f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \quad (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

但这与

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 \geqslant n) = 1 - P(X_1 < \infty) = 0$$

矛盾,所以 $f(t) > 0$ (对一切 $t > 0$).因此可令

$$\lambda = -\log f(1).$$

由(1.4)式有

$$f(r) = f(1)^r \quad (\text{当 } r \text{ 为非负有理数}),$$

而对任意 $t \in [0,\infty)$,可取非负有理数 $r_n \geqslant t$, $s_n \leqslant t$, $s_n \uparrow t$, $r_n \downarrow t$,故由 $f(\cdot)$ 单调非升得

$$f(1)^t = \lim_{n\to\infty} f(1)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} f(r_n) \leqslant f(t)$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)^{s_n} = f(1)^t,$$

所以 $f(t) = f(1)^t = e^{-\lambda t}$ $(t \in [0,\infty))$.

推证:

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0,1,\cdots,\ t \in [0,\infty)). \tag{1.5}$$

为此,只需证明 X_t 的特征函数为 $e^{\lambda t(e^{i\alpha}-1)}$.现任取定 $t \in [0,\infty)$.令

$$Y_k^{(n)} = \left(X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) \wedge 1, \quad k = 1,\cdots,2^n, \quad n = 1,2,\cdots,$$

则

$$P(Y_k^{(n)} = 0) = e^{-\frac{\lambda t}{2^n}}, \quad P(Y_k^{(n)} = 1) = 1 - e^{-\frac{\lambda t}{2^n}}.$$

若令 $A_n = \bigcap_{k=1}^{2^n}\left\{X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \leqslant 1\right\}$,则

(a) $A_n \subset A_{n+1}$ (因 X_t 对 t 单调非降);

(b) $A_n \subset \bigcap_{k=1}^{2^n}\left\{Y_k^{(n)} = X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right\} \subset \left\{X_t = \sum_{k=1}^{2^n} Y_k^{(n)}\right\}$;

(c) $A_n \uparrow \Omega$.

(a),(b) 显然成立.下面证(c).

任取 $\omega_0 \in \Omega$,由于 $X(\cdot,\omega_0)$ 在$[0,\infty)$内单调非降且取非负整值,间断点上之跃度为 1,故 $X(\cdot,\omega_0)$ 在$[0,t]$上最多有有限个间断点,记为 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\ \tau_N,\tau_i < \tau_{i+1}$($N \geqslant 0$,当 $N = 0$ 时,即

$X(\cdot,\omega_0)$ 在$[0,t]$上连续).故可取 n_0,使

$$\left[\frac{(k-1)t}{2^{n_0}},\frac{kt}{2^{n_0}}\right]$$

中至多只含一个间断点$\left(取\frac{t}{2^{n_0}}<\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}(\tau_{i+1}-\tau_i)\right)$. 由此,由 $X(\cdot,\omega_0)$ 在每个间断点上的跃度为 1 得

$$X\left(\frac{kt}{2^{n_0}},\omega_0\right)-X\left(\frac{(k-1)t}{2^{n_0}},\omega_0\right)\leqslant 1\quad (k=1,2,\cdots,2^n),$$

即 $\omega_0\in A_{n_0}$,所以 $A_n\uparrow\Omega$.

由(a),(b),(c)得

$$\lim_{n\to\infty}P\left(X_t=\sum_{k=1}^{2^n}Y_k^{(n)}\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\Omega)=1.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X_t})&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sum_{k=1}^{2^n}Y_k^{(n)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Y_1^{(n)}})\right]^{2^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^0\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t/2^n}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cdot(1-\mathrm{e}^{-\lambda t/2^n})\right]^{2^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2^n(1-\mathrm{e}^{-\lambda t/2^n})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1)}{2^n}\right]^{2^n}\end{aligned}\tag{1.6}$$

若注意

$$\lim_{n\to\infty}2^n(1-\mathrm{e}^{-\lambda t/2^n})=\lambda t,\qquad\lim_{x_m\to x}\left(1+\frac{x_m}{m}\right)^m=\mathrm{e}^x,$$

则由(1.6)式得

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X_t})=\mathrm{e}^{\lambda t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1)},$$

即(1.5)式成立.

若还有 $\varepsilon>0$,使 $P(X_\varepsilon=0)<1$,则由 $X(\cdot,\omega)$ 单调非降得

$$f(t)=P(X_t=0)\leqslant P(X_\varepsilon=0)<1\quad(t\geqslant\varepsilon).$$

再由(1.4)式得

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=f(\varepsilon)^{1/2^n}<1\quad(n\geqslant 1),$$

若注意 $f(\cdot)$ 单调非升得知 $f(t)<0\ (0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$. 总之 $f(t)<1$

$(t \in (0,\infty))$. 故 $\lambda = -\log f(1) > 0$. 定理证毕.

定义 1.2 设 $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, E 是 Banach 空间, $\mathscr{E}$ 是 E 中全体开集产生的 σ 代数, $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ 上的 $(E, \mathscr{E})$ 随机过程.

(1) 如果存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $P(\Omega_0) = 0$, 当 $\omega \overline{\in} \Omega_0$ 时, $X(\cdot, \omega)$ 不是 $\mathbf{T}$ 上的连续变换, 则称 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是**纯间断型的**;

(2) 如果存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $P(\Omega_0) = 0$, 当 $\omega \overline{\in} \Omega_0$ 时, $X(\cdot, \omega)$ 是 $\mathbf{T}$ 上的连续变换, 则称 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是**纯连续型的**.

下面我们将要证明 S.P.P.O. 是纯间断型的平稳独立增量随机过程.

定理 1.3 设 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 S.P.P.O., 则

(1) 它是纯间断型的;

(2) 对每个固定的 $t_0 \in [0,\infty)$,

$$P(\{\omega : X(\cdot, \omega) \text{ 在 } t_0 \text{ 连续}\}) = 1. \tag{1.7}$$

证 (1) 令 $A_u = \{\omega : X(\cdot, \omega) \text{ 在} [0, u] \text{ 上连续}\}$, $u \in [0, \infty)$, $A_\infty = \{\omega : X(\cdot, \omega) \text{ 在} [0, \infty) \text{ 上连续}\}$, 则 $A_n \supset A_{n+1}$, $A_n \downarrow A_\infty$, 所以

$$\begin{aligned} P(A_\infty) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : X(\cdot,\omega) \text{ 在} [0, n] \text{ 连续}\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X(0) = X(n)) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda n} = 0. \end{aligned}$$

(2) 若 $t_0 = 0$, 由于 $X(\cdot, \omega)$ 只定义在 $[0, \infty)$ 上, 所以 $X(\cdot, \omega)$ 在 0 连续意即在 0 右连续, 而 S.P.P.O. 的轨道都是右连续的, 所以 $t_0 = 0$ 时, (1.7) 式成立; 若 $t_0 > 0$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to0+} P(\{\omega : X(t_0+\varepsilon, \omega) - X(t_0-\varepsilon, \omega) > 0\}) \\ &\quad = \lim_{\varepsilon\to0+} P(\{\omega : X(2\varepsilon, \omega) > 0\}) \\ &\quad = \lim_{\varepsilon\to0+} (1 - \mathrm{e}^{-2\varepsilon\lambda}) = 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&P(\{\omega:X(\cdot,\omega)\text{ 在 } t_0 \text{ 连续}\})\\
&= P\left(\bigcup_{n>\frac{1}{t_0}}\left\{\omega:X\left(t_0+\frac{1}{n},\omega\right)-X\left(t_0-\frac{1}{n},\omega\right)=0\right\}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}P\left(\left\{\omega:X\left(t_0+\frac{1}{n},\omega\right)-X\left(t_0-\frac{1}{n},\omega\right)=0\right\}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1-P\left(\left\{\omega:X\left(t_0+\frac{1}{n},\omega\right)-X\left(t_0-\frac{1}{n},\omega\right)>0\right\}\right)\right]\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

S.P.P.O.有如下的实际背景：

设从 $t=0$ 起观察到某服务机构请求服务的顾客数. 令 $X_0\equiv 0$, X_t 表示 $(0,t]$ 内到来的顾客数, 于是得到 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$. 假定:

(i) 在不相交的时间区内, 到来的顾客数是相互独立的, 用概率论的述语说, 即是 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 具有独立增量;

(ii) 在长为 t 的时间区间 $(a,a+t]$ 内, 到来 k 个顾客的概率 $v_k(t)$ 只与 k 和 t 有关, 而与 a 无关, 即 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 具有平稳增量;

(iii) 在有穷时间区间 $(a,a+t]$ 内, 只能到来有穷多个顾客, 严格地说,

$$\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t)=1,\quad t\in[0,\infty);$$

(iv) 在 $(a,a+t]$ 内到来两个或更多的顾客的概率 $\varphi(t)=1-v_0(t)-v_1(t)$ 关于 t 是高级无穷小, 即

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\varphi(t)}{t}=0;$$

(v) 永不来顾客的概率不为 1, 即 $v_0(t)$ 不恒为 1.

在上述假定下, $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 是 S.P.P.O.. 显然, 定义 1.1 的 (i), (ii), (iv) 均成立. 只证 (iii),

$$P(X_t=k)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,\cdots;\ t\in[0,\infty).$$

而定理1.2已经证明(i),(ii),(iv)和 $v_0(t)\not\equiv 1 \Longrightarrow$(iii),所以$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是S.P.P.O..

在定理1.1中,我们曾经通过$\{Y_k:k=1,2,\cdots\}$和$\{T_n:n=1,2,\cdots\}$构造出S.P.P.O.$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$,其中$\{Y_k\}$相互独立,具有公共分布函数:

$$H(y)=P(Y_k\leqslant y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & \text{当 } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } y<0,\end{cases}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k\ (n\geqslant 1),\quad T_0\equiv 0,$$

$$X_t(\omega)=k,\quad \text{当 } T_k(\omega)\leqslant t<T_{k+1}(\omega).$$

事实上,对任何一个S.P.P.O.,都可以通过此法产生.这可由下面的定理看出.

定理1.4　设$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的S.P.P.O.,令$T_n(\omega)$是$X(\cdot,\omega)$的第n个间断点$(n\geqslant 1)$,$T_0(\omega)\equiv 0$, $Y_1=T_1$, $Y_n=T_n-T_{n-1}\ (n\geqslant 2)$,则

(1)　$0<T_1(\omega)<T_2(\omega)<\cdots\ (\omega\in\Omega)$;

(2)　$\{Y_k:k=1,2,\cdots\}$相互独立,具有公共分布函数:

$$H(y)=P(Y_k\leqslant y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & \text{当 } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } y<0.\end{cases}$$

从而$P(Y_k<\infty)=1$;

(3)　$P(T_n<\infty)=1$;

(4)　$P(\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\infty)=1$;

(5)　$X(t,\omega)=k$ (当 $T_k(\omega)\leqslant t<T_{k+1}(\omega)$).

由于(4),对一切$\omega\in\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}T_n(\omega)=\infty\}$和$t\in[0,\infty)$,(5)总成立.

证　(1)　这可由$X(\cdot,\omega)$右连续且取非负整值而得到.

(2)　若$y_1\geqslant 0$,则

$$P(Y_1\leqslant y_1)=P(X(y_1)-X(0)\geqslant 1)=1-e^{-\lambda y_1};$$

若 $y_1 \leqslant 0$,则由 Y_1 非负可得 $P(Y_1 \leqslant y_1) = 0$.

下面证 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立且有相同分布.为简单起见,只证 $n = 2$ 的情形,一般情形类似.

对任意 $m > 1,\ y_1 > 0,\ y_2 > 0$,有

$$
\begin{aligned}
&P(Y_1(\omega) \leqslant y_1,\ Y_2(\omega) \leqslant y_2) \\
&\quad \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} P\left(X\left(\frac{jy_1}{m}\right) - X(0) = 0,\ X\left(\frac{j+1}{m}y_1\right) - X\left(\frac{jy_1}{m}\right) = 1,\right. \\
&\qquad \left. X\left(\frac{j+1}{m}y_1 + y_2\right) - X\left(\frac{j+1}{m}y_1\right) \geqslant 1\right) \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{m-1} P\left(X\left(\frac{jy_1}{m}\right) - X(0) = 0,\right. \\
&\qquad \left. X\left(\frac{j+1}{m}y_1\right) + X\left(\frac{j}{m}y_1\right) \geqslant 2\right).
\end{aligned}
$$

而由 $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ 具有独立增量及它满足定义 1.1 中的(iii)可知上式右方第二项为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda j y_1}{m}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda y_1}{m}} - \frac{\lambda y_1}{m} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda y_1}{m}}\right) \\
&\qquad = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_1}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda j y_1 / m}} O\left(\frac{1}{m^2}\right) = O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (m \to \infty),
\end{aligned}
$$

而第一项为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}^{(-\lambda j y_1 / m) - (\lambda y_1 / m)} \cdot \frac{\lambda y_1}{m} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_2}) \\
&\qquad \to (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_1}) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_2}) \quad (m \to \infty).
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

故

$$
P(Y_1 \leqslant y_1, Y_2 \leqslant y_2) \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_1}) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_2}).
\tag{1.10}
$$

另一方面,(1.10) 式的左方不小于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} P\left(X\left(\frac{jy_1}{m}\right) - X(0) = 0,\ X\left(\frac{j+1}{m}y_1\right) - X\left(\frac{j}{m}y_1\right) = 1,\right. \\
&\qquad \left. X\left(\frac{j}{m}y_1 + y_2\right) - X\left(\frac{j+1}{m}y_1\right) \geqslant 1\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} e^{-\lambda y_1/m} \cdot \frac{\lambda y_1}{m} \cdot e^{-\lambda y_1/m}\left(1 - e^{-\lambda\left(y_2 - \frac{y_1}{m}\right)}\right)$$

$$\to (1 - e^{-\lambda y_1}) \cdot (1 - e^{-\lambda y_2}) \quad (m \to \infty)$$

(2)　证毕.

(3)　由(2)及 $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 即得(3).

(4)　由于$\{X_t : t \in [0,\infty)\}$是S.P.P.O.,所以

$$A_n \equiv \{\omega : X(\cdot,\omega)\text{在}[0,n]\text{内有无穷多个间断点}\}$$
$$= \{\omega : X(n,\omega) = \infty\},$$

从而 $P(A_n) = 0$,但是$\{\lim_{n\to\infty} T_n < \infty\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,所以

$$P(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1.$$

(4)获证.

(5)　由 T_n 的定义即得(5).

定理 1.5　设$\{X_t : t \in [0,\infty)\}$满足:

(i)　$X_0 \equiv 0$;

(ii)　具有独立增量;

(iii)　对任何 $t > 0$, $0 < P(X(t) > 0) < 1$;

(iv)　对任何 $a, t \geqslant 0$,有

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X(t+a) - X(a) = k) = 1;$$

(v)　对任何 $t \geqslant 0$,有

$$\lim_{k\to 0+} \frac{P(X(t+h) - X(t) \geqslant 2)}{h} = 0;$$

(vi)　对任何 $t \geqslant 0$,有

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1 - P(X(t+h) - X(t) = 0)}{h} = \lambda(t),$$

$\lambda(t) > 0$, $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s < \infty$,则

$$P(X(t)=k)=\mathrm{e}^{-m(t)}\frac{m(t)^k}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

(称 $\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ 为**非时齐的 Poisson 过程**.)

证 令 $\psi(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X(t)=k)z^k\ (|z|<1)$. 利用 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 具有独立增量可得

$$\psi(z,t+h)=\psi(z,t)\boldsymbol{E}(z^{X(t+h)-X(t)}).$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}(\boldsymbol{E}(z^{X(t+h)-X(t)})-1)\\&\quad=\frac{1}{h}(P(X(t+h)-X(t)=0)-1)\\&\qquad+z\frac{1}{h}P(X(t+h)-X(t)=1)\\&\qquad+\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty}z^kP(X(t+h)-X(t)=k),\end{aligned}$$

用(ⅴ),(ⅵ)得 $\lim\limits_{h\to0+}\frac{1}{h}(\boldsymbol{E}(z^{X(t+h)-X(t)})-1)=\lambda(t)(z-1)$,所以

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(z,t)=\psi(z,t)\lambda(t)(z-1),\\ \psi(z,0)=1,\end{cases}$$

解此初值问题可证定理 1.5.

定义 1.3 设 (E,ρ) 是完备可分度量空间,ρ 是 E 上的度量,$\mathscr{B}(E)$ 是 E 中全体 Borel 集,λ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的有限测度. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间.

$$\varphi:\Omega\times\mathscr{B}(E)\mapsto\mathbf{R}.$$

称 φ 是具有强度 λ 的**随机 Poisson 测度**(简称 Poisson 测度),如果:

(1) 固定任何 $A\in\mathscr{B}(E)$, $\varphi(A)\triangleq\varphi(\cdot,A)$ 是服从强度为 $\lambda(A)$ 的 Poisson 随机变量,即

$$P(\varphi(A)=k)=\mathrm{e}^{-\lambda(A)}\cdot\lambda(A)^k/k!\quad(k\geqslant0);$$

(2) 固定任何 $\omega\in\Omega$, $\varphi(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的有限测度;

(3) 对任何两两不交的 $A_1,\cdots,A_n$，$\{\varphi(A_1),\cdots,\varphi(A_n)\}$ 相互独立.

命题 1.1(Poisson 测度的构造)　设 (E,ρ) 和 λ 如定义 1.3，$c=\lambda(E)>0$. 设 $\{\xi_i:i=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布随机变量列，其公共分布为 λ/c，N 是服从强度为 c 的 Poisson 分布的随机变量，δ_x 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的测度集中在点 x 上的概率测度. 令

$$\varphi(\omega,A)=\sum_{j=1}^{N}\delta_{\xi_j(\omega)}(A), \tag{1.11}$$

则 φ 是 Poisson 测度(具有强度 λ).

证　首先证明 $\varphi(A)$ 服从强度为 $\lambda(A)$ 的 Poisson 分布. 事实上，由 $\{\xi_i\}$ 独立和 N 与 $\{\xi_i\}$ 独立有

$$\begin{aligned}P(\varphi(A)=k)&=\sum_{m=0}^{\infty}P(N=m)P\Big(\sum_{j=1}^{m}\delta_{\xi_j}(A)=k\Big)\\&=\sum_{m\geqslant k}\frac{\mathrm{e}^{-c}c^m}{m!}\frac{m!}{k!(m-k)!}\left(\frac{\lambda(A)}{c}\right)^k\left(1-\frac{\lambda(A)}{c}\right)^{m-k}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda(A)}\frac{\lambda(A)^k}{k!}\quad(A\in\mathscr{B}(E),\ k\geqslant 0).\end{aligned}$$

显然，$\varphi(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 上的有限测度.

当 $A_1,\cdots,A_n$ 两两不交时，利用 $\{\xi_j\}$ 独立同分布，$\{\xi_j\}$ 与 N 独立，再利用多项式分布计算概率，对任何非负整数 $k_1,\cdots,k_n$，$k=\sum_{i=1}^{n}k_i$，均有

$$\begin{aligned}&P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\varphi(A_i)=k_i\}\Big)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-c}c^m}{m!}P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big\{\sum_{j=1}^{m}\delta_{\xi_j}(A_i)=k_i\Big\}\Big)\\&=\sum_{m\geqslant k}\frac{\mathrm{e}^{-c}c^m}{m!}\frac{m!}{k_1!\cdots k_n!(m-k)!}\Big(\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{\lambda(A_i)}{c}\Big)^{k_i}\Big)\\&\quad\cdot\Big(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(A_i)}{c}\Big)^{m-k}\end{aligned}$$

$$= \left(e^{-c}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda(A_i)^{k_i}}{k_i!}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\left[c-\sum_{i=1}^{n}\lambda(A_i)\right]^p}{p!}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda(A_i)^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda(A_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}P(\varphi(A_i)=k_i).$$

命题 1.1 得证.

定义 1.4 设$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$是强度为λ的S.P.P.O.，$\{\xi_n:n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的取值于$\mathbf{R}^d$的随机变量序列，其公共特征函数为$f(u)$. 再设$\{X(t)\}$与$\{\xi_n\}$独立，令

$$\widetilde{X}(t)=\sum_{n=1}^{X(t)}\xi_n \quad (t\geqslant 0), \tag{1.12}$$

则称$\{\widetilde{X}(t):t\in[0,\infty)\}$为强度为$\lambda$的**复合 Poisson 过程**.

命题 1.2 (1.12) 中定义的$\{\widetilde{X}(t):t\in[0,\infty)\}$是平稳独立增量过程，且对任何$t\geqslant 0$，$\widetilde{X}(t)$的特征函数为

$$\tilde{f}_t(u)=E(e^{i(u,\widetilde{X}_t)})=e^{\lambda t(f(u)-1)}. \tag{1.13}$$

证 由(1.12) 的定义，直接计算即可证命题 1.2.

定义 1.5 设$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是具有强度$\lambda>0$的S.P.P.O.，$\{\xi_n:n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的取值于$\mathbf{R}^d$的随机变量序列，其公共分布为ν, $\nu(\{0\})=0$. 令

$$e(t)=\begin{cases}\xi_n, & \text{当 } X_{t-}<n=X_t,\\ 0, & \text{反之},\end{cases}$$

则称$\{e(t):t\in[0,\infty)\}$为具有特征测度$\lambda\nu$的 **Poisson 点过程**.

定义 1.6 设$X=\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是S.P.P.O.，$\{\mathscr{G}_t:t\in[0,\infty)\}$是一族单增$\sigma$代数. 若$X$是$\{\mathscr{G}_t\}$适应随机过程，则称$X$是$\{\mathscr{G}_t\}$的**S.P.P.O.**.

命题 1.3 设$X^{(i)}=\{X_t^{(i)}:t\in[0,\infty)\}$是$\{\mathscr{G}_t\}$的S.P.P.O. $(1\leqslant i\leqslant n)$，则$X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$相互独立的充要条件是：对任何

$i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$,恒有

$$X_t^{(i)} - X_{t-}^{(i)} = 0$$

或者 $X_t^{(j)} - X_{t-}^{(j)} = 0$ (对一切 $t > 0$) [a.e.].

证明参见[2] p.5 命题 1.

§2 Brown 运动及 Wiener 空间

上一节中,我们研究了平稳独立增量过程的一个重要特例——Poisson 过程,它的轨道是间断型的.这一节我们将研究平稳独立增量过程的另一个重要特例——Brown 运动,它的轨道是连续型的.

本书常用 $N(\mu, \Sigma)$ 表示 d 维正态分布,其中 μ 是 d 维实值向量,Σ 是 $d \times d$ 维实值对称方阵. μ 是期望向量,Σ 是协方差矩阵.

定义 2.1 设 $\{X_t : t \in \mathbf{T} = [0, b)\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的取值 $\mathbf{R}^d$ 上的随机过程,b 可为 ∞. 若

(1) X_t 服从正态分布 $N(0, tI)$ ($\forall\, 0 \leqslant t < b$);其中 I 是 d 维单位矩阵;

(2) X 具有独立增量,即对任何 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b$, $\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} : 1 \leqslant i < k\}$ 相互独立;

(3) $\forall\, \omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ 在 $[0, b)$ 上连续;

(4) $X_0 \equiv 0$,

则称 $X = \{X_t : t \in [0, b)\}$ 是标准的始于 0 的 d 维 **Brown 运动**,记之为 S.B^d.M.O..

对于取值于 $\mathbf{R}^d$ 中的随机变量 X_t,有时记为 $X_t = (X_{t,1}, \cdots, X_{t,d})$ · $|x|$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 中的元 x 的欧氏范数.

众所周知:若 X_t 服从 d 维正态分布 $N(\mu, \Sigma)$,则 $X_{t,1}, \cdots, X_{t,d}$ 相互独立的充要条件是:Σ 是对角矩阵.

命题 2.1 设 $X = \{X_t : t \in [0, b)\}$ 是 S.B^d.M.O.,则 $\{X_{t,k}$:

$t \in [0,b)\}$ 是 S.B^1.M.O.，而且 $X_{t,1},\cdots,X_{t,d}$ 相互独立($\forall t \in [0,b)$).

证 由于 X_t 服从正态分布 $N(0,tI)$，tI 是对角矩阵，所以 $X_{t,1},\cdots,X_{t,d}$ 相互独立($\forall t \in [0,b)$). 显然 $X_{t,k}$ 服从正态分布 $N(0,t)$，而$\{X_{t,k}:t\in[0,b)\}$ 满足定义1.1中的条件(2),(3),(4)是显然的，故$\{X_{t,k}:t \in [0,b)\}$ 是 S.B^1.M.O..

命题2.2 设 $X=\{X_t:t\in[0,b)\}$ 是S.B^d.M.O.，L 是 $d\times d$ 阶实值标准正交矩阵，即 $L'=L^{-1}$，L 的行列式 $|L|=1$(此处 L' 表 L 之转置)，作变换

$$Y_t=(Y_{t,1},\cdots,Y_{t,d})=X_tL=(X_{t,1},\cdots,X_{t,d})L\ (t\in[0,b)),$$

则 $Y=\{Y_t:t\in[0,b)\}$ 也是 S.B^d.M.O..

证 由于 X_t 服从 d 维正态分布 $N(0,tI)$，而 $Y_t=X_tL$，L 是标准正交矩阵，所以 Y_t 亦服从 d 维正态分布 $N(0,tI)$. 直接验证易知$\{Y_t:t\in[0,b)\}$还满足定义1.1中的条件(2),(3),(4)，命题得证.

命题2.3 若$\{X_t:t\in[0,b)\}$ 是 S.B^d.M.O.，则它具有平稳增量，即 $X_{t+h}-X_{s+h}$ 与 X_t-X_s 之分布一样为 $N(0,(t-s)I)$ ($\forall 0\leqslant s<t<b,\ 0\leqslant s+h\leqslant t+h<b$).

证 由于 $X_{t+h}=(X_{t+h}-X_{s+h})+(X_{s+h}-X_0)$，而 $X_{t+h}-X_{s+h}$ 与 $X_{s+h}-X_0$ 相互独立，所以若令 $X_v=(X_{v,1},\cdots,X_{v,d})$，

$u=(u_1,\cdots,u_d)\in\mathbf{R}^d$，$u'=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_d\end{pmatrix}$ 为 u 之转置，则有

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_{t+h}\cdot u'})=\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(X_{t+h}-X_{s+h})u'})\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_{s+h}u'}),$$

从而由 X_t 服从正态分布 $N(0,tI)$ 可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(X_{t+h}-X_{s+h})u'})&=\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_{t+h}u'})/\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_{s+h}u'})\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u(t+h)u'}/\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u(s+h)u'}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u(t-s)u'}.$$

此即 $X_{t+h} - X_{s+h}$ 与 $X_t - X_s$ 的分布一样都是 $N(0,(t-s)I)$.

命题 2.4　设 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是 S.B^d.M.O.，则对任何正数 K，有

$$P(\bigcap_{t\in[0,\infty)} \{|X_t| \leqslant K\}) = 0.$$

证　因为对任何 ω，$X(\cdot,\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，所以若令 D 为 $[0,\infty)$ 中全体有理数集，则

$$\bigcap_{t\in[0,\infty)} \{|X_t| \leqslant K\} = \bigcap_{t\in D} \{|X_t| \leqslant K\}$$

是概率空间中的可测集. 又因为

$$P(\bigcap_{t\in[0,\infty)} \{|X_t| \leqslant K\}) \leqslant P(|X_t| \leqslant K)$$

$$= \int_{|x| \leqslant K} (\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2t}} / (2\pi t)^{\frac{n}{2}}) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{|x| \leqslant K} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{d}x \quad (t \in [0,\infty)),$$

令 $t \to \infty$ 即得命题 2.4.

命题 2.5　设 $\{X_t : t \in [0,b)\}$ 是 S.B^d.M.O.，任取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b$，则

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k})$$

$$= (X_{t_1,1}, \cdots, X_{t_1,d}; X_{t_2,1}, \cdots, X_{t_2,d}; \cdots; X_{t_k,1}, \cdots, X_{t_k,d})$$

服从 dk 维正态分布.

证　由于 $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ 相互独立，且 $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ 服从 d 维正态分布 $N(0,(t_i - t_{i-1})I)$，所以 $X_{t_i,1} - X_{t_{i-1},1}, \cdots, X_{t_i,d} - X_{t_{i-1},d}$ 相互独立且服从正态分布，从而

$$\{X_{t_1,1} - X_{t_0,1}, \cdots, X_{t_1,d} - X_{t_0,d}; \cdots;$$
$$X_{t_k,1} - X_{t_{k-1},1}, \cdots, X_{t_k,d} - X_{t_{k-1},d}\}$$

相互独立，且每个 $\{X_{t_i,l} - X_{t_{i-1},l}\}$ 皆服从正态分布，$i = 1, \cdots, k$，

$l = 1, \cdots, d$. 但是若令

$$L_{d,k} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & I & I & \cdots & I & I \\ 0 & I & I & \cdots & I & I \\ 0 & 0 & I & \cdots & I & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}}_{k\text{列}} \Bigg\} k\text{行}$$

其中 I 是 d 维单位矩阵,则

$$\begin{aligned}&(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \cdots, X_{t_{k-1}}, X_{t_k}) \\ &\quad = (X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}}, \\ &\qquad X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \cdot L_{d,k},\end{aligned}$$

所以由命题2.3得知$(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \cdots, X_{t_{k-1}}, X_{t_k})$服从 dk 维正态分布.

命题2.6 若$\{X_t : t \in [0,b)\}$是S.B^1.M.O.,则对任何 $s, t \in [0,b)$,总有 $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$.

证 由$\{X_t : t \in [0,b)\}$具有独立增量,X_t 服从正态分布 $N(0,t)$ 可知

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_s, X_t) &= \boldsymbol{E}(X_s X_t) \\ &= \operatorname{cov}(X_{s\wedge t}, X_{s\vee t} - X_{s\wedge t}) + \operatorname{cov}(X_{s\wedge t}, X_{s\wedge t}) \\ &= \operatorname{cov}(X_{s\wedge t}, X_{s\wedge t}) = \operatorname{var}(X_{s\wedge t}) = s \wedge t.\end{aligned}$$

定理2.1(Lévy). S.B^d.M.O. 总是存在的.

证 第一步. 用第四章定理3.2, 可以构造一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 及此概率空间上的一个独立同分布随机变量序列$\{Z_k : k \geqslant 1\}$, Z_k 服从正态分布 $N(0,1)$ (记作 $Z_k \sim N(0,1)$).

第二步. 在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上再构造一族随机变量$\left\{ Y\left(\dfrac{k}{2^n}\right) : 0 \leqslant k \leqslant 2^n,\right.$
$\left. n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$

(ⅰ)　$\left\{Y\left(\frac{k}{2^n}\right):0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$中每一个 $Y\left(\frac{h}{2^n}\right)$皆为$Z_1,Z_2,\cdots,Z_{2^n}$ 的线性函数($n\geqslant 0$);　(2.1)

(ⅱ)　$Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\sim N\left(0,\frac{k}{2^n}\right)$　$(0\leqslant k\leqslant 2^n,\ n\geqslant 0)$,　(2.2)

造法如下:

当 $n=0$ 时,定义 $Y\left(\frac{0}{2^0}\right)=Y(0)\equiv 0,\ Y\left(\frac{1}{2^0}\right)=Y(1)\equiv Z_1$.

设第 n 次内插$\left\{Y\left(\frac{k}{2^n}\right):0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$已定义,对第 $n+1$ 次内插$\left\{Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right):0\leqslant k\leqslant 2^{n+1}\right\}$,由下述递推公式来定义

$$\begin{cases} Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}+\frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ \qquad\qquad (k=1,\cdots,2^n), \\ Y\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)=Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\quad (k=0,1,\cdots,2^n). \end{cases}\tag{2.3}$$

易证

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\middle| Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right),Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &=\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}\middle| Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right),Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &\quad+\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2}\left[Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\middle| Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right),Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &=\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}\right)+\frac{1}{2}\left[Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] \\ &=\frac{1}{2}\left[Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\quad (n\geqslant 0). \end{aligned}\tag{2.4}$$

下面我们证明由递推公式(2.3)所定义的$\left\{Y\left(\frac{k}{2^n}\right):0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$

$(n=0,1,\cdots)$满足(2.1)及(2.2)式.

(ⅰ) 由递推公式(2.3)得知(2.1)式显然成立.

(ⅱ) 用递推公式(2.3),并对 n 使用归纳法来证明(2.2)式及

$$\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)=\frac{k-1}{2^n}\quad(1\leqslant k\leqslant 2^n,\ n\geqslant 0).$$

显然,当 $n=0$ 时

$$Y(0)\equiv 0\sim N(0,0),\ Y\left(\frac{1}{2^0}\right)=Y(1)=Z_1\sim N(0,1),$$

$$\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{0}{2^0}\right)Y\left(\frac{1}{2^0}\right)\right)=\boldsymbol{E}(0)=0.$$

设当 $m\leqslant n$ 时, $\left\{Y\left(\frac{k}{2^m}\right):0\leqslant k\leqslant 2^m\right\}$ 中每个 $Y\left(\frac{k}{2^m}\right)\sim N\left(0,\frac{k}{2^m}\right)(1\leqslant k\leqslant 2^m)$,且

$$\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^m}\right)Y\left(\frac{k}{2^m}\right)\right)=\frac{k-1}{2^m}\quad(1\leqslant k\leqslant 2^m),$$

推证 $\left\{Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right):0\leqslant k\leqslant 2^{n+1}\right\}$ 中每个 $Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\sim N\left(0,\frac{k}{2^{n+1}}\right)$,且

$$\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)=\frac{k-1}{2^{n+1}},\quad 0\leqslant k\leqslant 2^{n+1}.$$

当 $k=2j\ (j=1,\cdots,2^n)$ 为偶数时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)&=\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{2j}{2^{n+1}}\right)\right)\\&=\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\left\{\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+j}\ \frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)\right\}\right)\\&=\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2}Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{j}{2^n}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right).\end{aligned}\qquad(2.5)$$

由归纳法假设,有

$$E\left(Y\left(\frac{j}{2^n}\right)^2\right)=\frac{j}{2^n},$$

$$E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)=\frac{j-1}{2^n}\quad(1\leqslant j\leqslant 2^n),$$

所以

$$\begin{aligned}E\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{j}{2^n}+\frac{j-1}{2^n}\right)\\&=\frac{2j-1}{2^{n+1}}=\frac{k-1}{2^{n+1}};\end{aligned}\tag{2.6}$$

当 $k=2j-1\ (j=1,\cdots,2^n)$ 为奇数时，

$$\begin{aligned}E\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)&=E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)\right)\\&\xlongequal{(2.3)}E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\left[\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+j}+\frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)\right]\right)\\&\xlongequal{(2.1)}\frac{1}{2}E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)^2\right)+\frac{1}{2}E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right);\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)^2\right)=\frac{j-1}{2^n},$$

$$E\left(Y\left(\frac{j-1}{2^n}\right)Y\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)=\frac{j-1}{2^n}\quad(1\leqslant j\leqslant 2^n),$$

所以

$$\begin{aligned}E\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{j-1}{2^n}+\frac{j-1}{2^n}\right)\\&=\frac{2j-2}{2^{n+1}}=\frac{k-1}{2^{n+1}},\end{aligned}\tag{2.8}$$

对任何 $1\leqslant k\leqslant 2^{n+1}$，有

$$E\left(Y\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)=\frac{k-1}{2^{n+1}}.\tag{2.9}$$

由于 $\left\{Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right):0\leqslant k\leqslant 2^{n+1}\right\}$ 是 $\left\{Y\left(\frac{k}{2^n}\right):0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$ 中插进 2^n 个随机变量 $\left\{Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right):1\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$ 而成的，而由归

纳法假设已知$Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\sim N\left(0,\frac{k}{2^n}\right)(0\leqslant k\leqslant 2^n)$，所以下面只证新插进的$2^n$个随机变量$\left\{Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right):1\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$满足$Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\sim N\left(0,\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)(1\leqslant k\leqslant 2^n)$即可.

事实上，由(2.3)式：

$$Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}+\frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),\quad 1\leqslant k\leqslant 2^n,$$

和(i)，$Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)$是有限个相互独立的服从期望为零的正态分布的随机变量之和(因为$Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)$是$Z_1,\cdots,Z_{2^n}$的线性函数，而它们与$Z_{2^n+k}(k\geqslant 1)$相互独立，$Z_k\sim N(0,1)$)，所以

$$Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\sim N(0,\sigma_{n,k}^2),\quad 1\leqslant k\leqslant 2^n.$$

又由归纳法假设及(2.3)、(2.1)式得

$$\begin{aligned}\sigma_{n,k}^2&=\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)^2\right)\\&=\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{2^{n+2}}Z_{2^n+k}^2\right)+\frac{1}{4}\boldsymbol{E}\left(\left(Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2\right)\\&=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{k}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\\&=\frac{2k-1}{2^{n+2}}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

归纳法完成.

第三步.引进第n步逼近过程$\{X^{(n)}(t):t\in[0,1]\}$.对任意$n\geqslant 0$和$\omega\in\Omega$，定义$X^{(n)}(\cdot,\omega)$是以$\left\{\left(\frac{k}{2^n},Y\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)\right):k=0,1,\cdots,2^n\right\}$为顶点连成的折线，即

$$X^{(n)}(t,\omega)=\frac{t-\frac{k-1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}\left(Y\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-Y\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right)$$

$$+Y\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)$$

$$=(2^n t-(k-1))\left(Y\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-Y\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right)$$

$$+Y\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)$$

$$\left(n\geqslant 0,t\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right],\ k=1,2,\cdots,2^n\right). \tag{2.11}$$

下面我们研究 $\{X^{(n)}(t):t\in[0,1]\}$ 的性质.令

$$W_n=\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\frac{|Z_{2^n+k}|}{2^{\frac{n+2}{2}}}\quad(n\geqslant 0). \tag{2.12}$$

引理 2.1 对(2.12)式所定义的 W_n 有

$$\sup_{t\in[0,1]}|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|\leqslant W_n\quad(n\geqslant 0). \tag{2.13}$$

证 对任何

$$t\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]=\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right],$$

若 $t\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\subset\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$,由 $k=1,\cdots,2^n$,(2.11),(2.12),(2.3) 式得知

$$|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|$$

$$\overset{(2.11)}{=\!=\!=}\left|\left[(2^n t-k+1)Y\left(\frac{k}{2^n}\right)-(2^n t-k)Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]\right.$$

$$-\left[(2^{n+1}t-(2k-1)+1)Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right.$$

$$\left.\left.-(2^{n+1}t-(2k-1))Y\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right)\right]\right|$$

$$=\left|(2^n t-k+1)\left(Y\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)\right.$$

$$
\left.-(2^{n+1}t-2(k-1))Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|
$$

$$
\xlongequal{(5.3)}\left|(2^n t-k+1)\cdot 2\left(Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)-\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}\right)\right.
$$

$$
\left.-(2^{n+1}t-2(k-1))Y\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|
$$

$$
=\left|(2^{n+1}t-2k+2)\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}}Z_{2^n+k}\right|. \tag{2.14}
$$

若注意

$2^{n+1}t\in[2k-2,2k-1)$,则由(2.14)式得

$$
|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|\leqslant\frac{|Z_{2^n+k}|}{2^{\frac{n+2}{2}}}, \tag{2.15}
$$

$$
\sup_{t\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)}|X^n(t)-X^{(n+1)}(t)|\leqslant\frac{|Z_{2^n+k}|}{2^{\frac{n+2}{2}}}
$$

$$
(k=1,\cdots,2^n); \tag{2.16}
$$

若 $t\in\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]\subset\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$,仿(2.16)式可证:

$$
\sup_{t\in\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]}|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|\leqslant\frac{|Z_{2^n+k}|}{2^{\frac{n+2}{2}}}
$$

$$
(k=1,\cdots,2^n). \tag{2.17}
$$

故由(2.16),(2.17),(2.12)式得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,1]}|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|\\
&\quad=\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\sup_{t\in\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]}|X^{(n)}(t)-X^{(n+1)}(t)|\\
&\quad\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\frac{|Z_{2^n+k}|}{2^{\frac{n+2}{2}}}=W_n\quad(n\geqslant 0).
\end{aligned}
$$

引理2.2 令 $\Omega_0=\left\{\omega:\omega\in\Omega,\ \sum_{n=1}^{\infty}W_n(\omega)<\infty\right\}$,则 $P(\Omega_0)=1$.

证 由(2.12)式有

$$P(W_n > \lambda) \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} P(|Z_{2^n+k}| > 2^{\frac{n+2}{2}}\lambda)$$

$$= 2^n P(|Z_1| > 2^{\frac{n+2}{2}}\lambda)$$

$$= 2^{n+1}\int_{2^{\frac{n+2}{2}}\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\leqslant \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}}\int_{2^{\frac{n+2}{2}}\lambda}^{\infty} \frac{x}{\lambda 2^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n+2}{2}}\lambda} e^{-\frac{(\lambda 2^{\frac{n+2}{2}})^2}{2}}.$$

取 $\lambda_n = \frac{n}{2^{\frac{n+2}{2}}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(W_n > \lambda_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}} < \infty. \tag{2.18}$$

由 $\{Z_k\}$ 是相互独立的和(2.12)式知 $\{W_n\}$ 也是相互独立的. 因此由(2.18)式应用 Borel-Contelli 引理得知

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{W_n > \lambda_n\}) = 0. \tag{2.19}$$

但是，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$，所以 $P(\Omega_0) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} W_n < \infty\right) = 1$.

引理 2.3　存在 $\{X(t): t \in \mathbf{T}\}$，使得对任何 $\omega \in \Omega_0$，

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t,\omega) = X(t,\omega) \quad (\text{在 } t \in [0,1] \text{ 上一致}). \tag{2.20}$$

从而 $X(\cdot,\omega)$ 在$[0,1]$上连续，此外尚有

$$X\left(\frac{k}{2^m},\omega\right) = X^{(m)}\left(\frac{k}{2^m},\omega\right) = X^{(n)}\left(\frac{k}{2^m},\omega\right) = Y\left(\frac{k}{2^m}\right)$$

$$(m \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^m). \tag{2.21}$$

证　因为对任何 $\omega \in \Omega_0$，有

$$\sup_{t\in[0,1]} |X^{(n+m)}(t,\omega) - X^{(m)}(t,\omega)| \leqslant \sum_{k=m}^{n+m-1} W_k(\omega),$$

所以，由引理 2.2 立得(2.20)式.

因为当 $m \leqslant n, 0 \leqslant k \leqslant 2^m$，由 $X^{(n)}$ 的定义有

$$X^{(m)}\left(\frac{k}{2^m},\omega\right) = Y\left(\frac{k}{2^m},\omega\right) = Y\left(\frac{2^{n-m}k}{2^n},\omega\right)$$
$$= X^{(n)}\left(\frac{2^{n-m}k}{2^n},\omega\right) = X^{(n)}\left(\frac{k}{2^m},\omega\right),$$

所以(2.21) 式成立.

引理2.4 令 $\mathscr{D}_n = \left\{\frac{k}{2^n}:0 \leqslant k \leqslant 2^n\right\}$，$\mathscr{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{D}_n$，考虑概率空间 $(\Omega_0, \mathscr{E}_0, P)$ (其中 $\mathscr{E}_0 = \{\Lambda : \Lambda = \Omega_0 \cap \tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda} \in \mathscr{E}\}$)，则 $X(t) \in \mathscr{E}_0/\mathscr{B}^1$ $(t \in [0,1])$，$\{X(r): r \in \mathscr{D}\}$ 具有独立增量，$X(r) \sim N(0,r)$，$r \in \mathscr{D}$.

证 $X(t) \in \mathscr{E}_0/\mathscr{B}^1$ 是显然的. 而由(2.21) 式及 $Y(r) \sim N(0,r)$ 得知 $X(r) = Y(r) \sim N(0,r)$ $(r \in \mathscr{D})$. 由于当 $r_1, r_2 \in \mathscr{D}$ 时，$X(r_2) - X(r_1) = Y(r_2) - Y(r_1)$ 是 $\{Z_k : k \geqslant 1\}$ 中有限个 Z_k 的线性函数，而 $\{Z_k\}$ 是相互独立的且 $Z_k \sim N(0,1)$，所以 $X(r_2) - X(r_1)$ 也服从正态分布. 因此为证 $\{X(r): r \in \mathscr{D}\}$ 具有独立增量，即对任意 $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4$，$r_i \in \mathscr{D}$，$X(r_2) - X(r_1)$ 与 $X(r_4) - X(r_3)$ 独立，只需证明它们不相关，即

$$\operatorname{cov}([X(r_2) - X(r_1)],[X(r_4) - X(r_3)]) = 0$$
$$(r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4, r_i \in \mathscr{D}). \qquad (2.22)$$

又因为

$$\mathscr{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{D}_n, \ \mathscr{D}_n \subset \mathscr{D}_{n+1} \quad (n \geqslant 0),$$

所以又只需证明(2.22) 式对 $r_i \in \mathscr{D}_n$ $(i = 1,\cdots,4)$ 成立.

为此，先证明对一切 $n \geqslant 0$，有

$$\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k}{2^n}\right)Y\left(\frac{k+l}{2^n}\right)\right) = \frac{k}{2^n} \quad \left(l \geqslant 0, \frac{k}{2^n}, \frac{k+l}{2^n} \in \mathscr{D}_n\right) \tag{2.23}$$

当 $n = 0$ 时(2.23) 式显然成立. 设(2.23) 式对 n 成立，推证对 $n +$

1 亦成立，事实上，设 $l = 2m$，

若 $k = 2p$，则由归纳法假设有

$$E\left(Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k+l}{2^{n+1}}\right)\right) = E\left(Y\left(\frac{p}{2^n}\right)Y\left(\frac{p+m}{2^n}\right)\right)$$
$$= \frac{p}{2^n} = \frac{k}{2^{n+1}};$$

若 $k = 2p - 1$，则用 $Y\left(\frac{2p-1}{2^{n+1}}\right)$ 的递推公式(2.3)及 $\{Z_k\}$ 独立，$Z_k \sim N(0,1)$ 与归纳法假设可证：

$$E\left(Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k+l}{2^{n+1}}\right)\right)$$
$$= E\left(Y\left(\frac{2p-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{2(p+m)-1}{2^{n+1}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}E\left(\left[Y\left(\frac{p-1}{2^n}\right) + Y\left(\frac{p}{2^n}\right)\right]\left[Y\left(\frac{p+m-1}{2^n}\right) + Y\left(\frac{p+m}{2^n}\right)\right]\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{p-1}{2^n} + \frac{p-1}{2^n} + \frac{p}{2^n} + \frac{p}{2^n}\right) = \frac{k}{2^{n+1}}.$$

设 $l = 2m + 1$：

若 $k = 2p$，则用 $Y\left(\frac{2(p+m)+1}{2^{n+1}}\right)$ 的递推公式(2.3)及 $\{Z_k\}$ 独立，$Z_k \sim N(0,1)$ 与归纳法假设可证：

$$E\left(Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k+l}{2^{n+1}}\right)\right)$$
$$= E\left(Y\left(\frac{2p}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{2(p+m)+1}{2^{n+1}}\right)\right)$$
$$= E\left(Y\left(\frac{p}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{p+m}{2^n}\right) + Y\left(\frac{p+m+1}{2^n}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n} + \frac{p}{2^n}\right) = \frac{k}{2^{n+1}};$$

若 $k = 2p-1$,则有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{k+l}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{2p-1}{2^{n+1}}\right)Y\left(\frac{2(p+m)}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \boldsymbol{E}\left(Y\left(\frac{p+m}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(Y\left(\frac{p-1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{p}{2^n}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2^n}+\frac{p}{2^n}\right)=\frac{k}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

归纳法完成.

现在利用(2.23)式来证明(2.22)式.任取 $r_i \in \mathscr{D}_n$, $i=1,2,3,4$, $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4$.令

$$r_i = \frac{k+l_i}{2^n}\ (0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant l_4,\ 0 \leqslant k+l_i \leqslant 2^n),$$

则由(2.23)式有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}([X(r_4)-X(r_3)],[X(r_2)-X(r_1)])\\
&=\boldsymbol{E}\left(\left[Y\left(\frac{k+l_4}{2^n}\right)-Y\left(\frac{k+l_3}{2^n}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left[Y\left(\frac{k+l_2}{2^n}\right)-Y\left(\frac{k+l_1}{2^n}\right)\right]\right)\\
&=\boldsymbol{E}\left[Y\left(\frac{k+l_4}{2^n}\right)Y\left(\frac{l_2+k}{2^n}\right)-Y\left(\frac{k+l_3}{2^n}\right)Y\left(\frac{k+l_2}{2^n}\right)\right.\\
&\qquad\left.-Y\left(\frac{k+l_4}{2^n}\right)\cdot Y\left(\frac{k+l_1}{2^n}\right)+Y\left(\frac{k+l_3}{2^n}\right)Y\left(\frac{k+l_1}{2^n}\right)\right]\\
&=\frac{k+l_2}{2^n}-\frac{k+l_2}{2^n}-\frac{k+l_1}{2^n}+\frac{k+l_1}{2^n}=0.
\end{aligned}$$

引理 2.4 证毕.

下面我们用上述诸引理来证明 $\{X(t):t\in[0,1]\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega_0,\mathscr{F}_0,P)$ 上的 S.B[1].M.O..

(1) $X(t) \sim N(0,t)$, $t \in [0,1]$.

任取 $t \in [0,1]$，由于 $\mathscr{D} = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leqslant k \leqslant 2^n,\ n \geqslant 0 \right\}$ 在 $[0,1]$ 稠密，所以存在 $r_n \in \mathscr{D}$，使 $r_n \to t$，但由引理 2.3 得知 $X(\cdot,\omega)$ 在 t 连续 $(\omega \in \Omega_0)$，$X(r_n) = Y(r_n) \sim N(0, r_n)$，所以

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X(t)}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X(r_n)}) = \lim \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 r_n}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 t}{2}},$$

即

$$X(t) \sim N(0,t). \tag{2.24}$$

(2) $\{X(t): t \in [0,1]\}$ 具有独立增量.

任取 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$，$t_i \in [0,1]$，选 $r_1^{(n)} \leqslant r_2^{(n)} \leqslant r_3^{(n)} \leqslant r_4^{(n)}$，$r_i^{(n)} \in \mathscr{D}$，$r_i^{(n)} \to t_i$，则由引理 2.4 有 $X(r_4^{(n)}) - X(r_3^{(n)})$ 与 $X(r_2^{(n)}) - X(r_1^{(n)})$ 独立. 而由引理 2.3，对任何 $\omega \in \Omega_0$，$X(\cdot,\omega)$ 在 $[0,1]$ 连续，所以

$$X(t_4) - X(t_3) = \lim_{n\to\infty} [X(r_4^{(n)}) - X(r_3^{(n)})], \tag{2.25}$$

$$X(t_2) - X(t_1) = \lim_{n\to\infty} [X(r_2^{(n)}) - X(r_3^{(n)})]. \tag{2.26}$$

两串独立随机变量的极限当然独立.

(3) $X(\cdot,\omega)$ 在 $[0,1]$ 连续 $(\omega \in \Omega_0)$. 这在引理 2.3 中已证.

(4) $X(0,\cdot) \equiv Y(0) \equiv 0$. 故 $\{X(t): t \in [0,1]\}$ 是概率空间 $(\Omega_0, \mathscr{E}_0, P)$ 上的 $\mathrm{S.B^1.M.O.}$.

既然造出了概率空间 $(\Omega_0, \mathscr{E}_0, P)$ 上的 $\mathrm{S.B^1.M.O.}$ $\{X(t): t \in [0,1]\}$. 利用乘积空间的技巧，总可以造出某个概率空间 $(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^*)$ 上的一串相互独立的 $\mathrm{S.B^1.M.O.}$ $\{X^{\langle k\rangle}(t): t \in [0,1]\}$，$k = 1,2,\cdots$. 再令

$$X^*(t) = \begin{cases} X^{\langle 1\rangle}(t), & \text{当 } t \in [0,1], \\ X^{\langle 1\rangle}(1) + X^{\langle 2\rangle}(t-1), & \text{当 } t \in (1,2], \\ \vdots & \\ X^{\langle 1\rangle}(1) + \cdots + X^{\langle n-1\rangle}(1) & \\ \quad + X^{\langle n\rangle}(t-n+1), & \text{当 } t \in (n-1,n], \\ \vdots & \end{cases}$$

则$\{X^*(t):t\in[0,\infty)\}$是$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^*)$上的S.B^1.M.O..再一次运用乘积空间技巧,可造出概率空间$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})$上的S.B^d.M.O. $\{\widetilde{X}(t):t\in[0,\infty)\}$.显然,对任何$0<b\leqslant\infty$,$\{\widetilde{X}(t):t\in[0,b)\}$也是S.B^d.M.O..定理2.1证毕.

定理2.2 设$\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的S.B^1.M.O.,则存在$A\in\mathscr{F}$, $P(A)=0$,当$\omega\overline{\in}A$时$X(\cdot,\omega)$在$[0,\infty)$上无处可微.

证 只需证明存在$A\in\mathscr{F}$, $P(A)=0$,当$\omega\overline{\in}A$时,$X(\cdot,\omega)$在$[0,1)$无处可微即可.

任取定$\omega\in\Omega$.考虑$X(\cdot,\omega):[0,1)\to\mathbf{R}$.若存在$s\in[0,1)$,使$X(\cdot,\omega)$在$s$可微,则必有

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{X(t,\omega)-X(s,\omega)}{t-s}=X'(s,\omega)$$

为有限数,所以

$$\begin{aligned}&\{\omega:\omega\in\Omega,\text{存在 } s\in[0,1),\text{使 } X(\cdot,\omega)\text{ 在 } s\text{ 可微}\}\\ \subset&\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\omega:\omega\in\Omega,\text{存在 } s\in[0,1)\text{ 使}\lim_{t\downarrow s}\left|\frac{X(t,\omega)-X(s,\omega)}{t-s}\right|<k\right\}\\ \subset&\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega:\omega\in\Omega,\text{存在 } s\in[0,1),\delta=\delta(s,\omega)>0,\text{使}\\ &|X(t,\omega)-X(s,\omega)|\leqslant k\,|t-s|,\text{当 } s\leqslant t<s+\delta\}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

但是,当$\frac{4}{n}<\delta$, $ns<i\leqslant ns+1$时,有

$$\frac{i-1}{n}\leqslant s<\frac{i}{n}<\frac{i+1}{n}<\frac{i+2}{n}<\frac{i+3}{n}=\frac{4}{n}+\frac{i-1}{n}<\delta+s.\tag{2.28}$$

所以,由

$$|X(t,\omega)-X(s,\omega)|\leqslant k\,|t-s|\quad(\text{当 } s\leqslant t<s+\delta)\tag{2.29}$$

及(2.28)式可推出

$$\begin{aligned}
&\left|X\left(\frac{i+3}{n},\omega\right)-X\left(\frac{i+2}{n},\omega\right)\right| \\
&\quad\leqslant\left|X\left(\frac{i+3}{n},\omega\right)-X(s,\omega)\right| \\
&\qquad+\left|X\left(\frac{i+2}{n},\omega\right)-X(s,\omega)\right| \\
&\quad\leqslant k\left|\frac{i+3}{n}-s\right|+k\left|\frac{i+2}{n}-s\right| \\
&\quad\leqslant k\cdot\frac{4}{n}+k\cdot\frac{3}{n}=\frac{7k}{n}.
\end{aligned}\tag{2.30}$$

仿之可证

$$\left|X\left(\frac{i+2}{n},\omega\right)-X\left(\frac{i+1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{5k}{n}<\frac{7k}{n},\tag{2.31}$$

$$\left|X\left(\frac{i+1}{n},\omega\right)-X\left(\frac{i}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{3k}{n}<\frac{7k}{n}.\tag{2.32}$$

故当$\frac{4}{n}<\delta, ns<i\leqslant ns+1$时，

$$\begin{aligned}
&|X(t,\omega)-X(s,\omega)|\leqslant k\,|t-s|\quad(s\leqslant t<s+\delta) \\
&\quad\Longrightarrow\left|X\left(\frac{j}{n},\omega\right)-X\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n} \\
&\qquad\qquad\qquad(j=i+1,\cdots,i+3),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\{\omega:\omega\in\Omega,\ |X(t,\omega)-X(s,\omega)|\leqslant k\,|t-s|,\ s\leqslant t<s+\delta\} \\
&\quad\subset\bigcap_{n>\frac{4}{\delta}}\ \bigcup_{ns<i\leqslant ns+1}\ \bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\omega:\left|X\left(\frac{j}{n},\omega\right)-X\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\{\omega:\omega\in\Omega,\text{存在 } s\in[0,1),\ \delta=\delta(s,\omega)>0,\text{使} \\
&\quad|X(t,\omega)-X(s,\omega)|\leqslant k\,|t-s|,\text{当 } s\leqslant t<s+\delta\} \\
&\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\ \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n+1}\ \bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\omega:\left|X\left(\frac{j}{n},\omega\right)-X\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\},
\end{aligned}\tag{2.33}$$

所以若令

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n+1}\bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\omega:\left|X\left(\frac{j}{n},\omega\right)-X\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\},$$

则有

$$\{\omega:\omega\in\Omega,\text{存在 } s\in[0,1)\text{ 使 } X(\cdot,\omega)\text{ 在 } s\text{ 可微}\}\subset A. \tag{2.34}$$

但是

$$P(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n+1}\bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\left|X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\}\right), \tag{2.35}$$

由$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$具有独立平稳增量及$X(t)\sim N(0,t)$可知：

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n+1}\bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\left|X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\}\right)\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup P\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n+1}\bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\left|X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{i=1}^{n+1}P\left(\bigcap_{i+1\leqslant j\leqslant i+3}\left\{\left|X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right\}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j=i+1}^{i+3}P\left(X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{i=1}^{n+1}P\left(\left|X\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{7k}{n}\right)^3\\
&=\lim_{n\to\infty}\sup\,(n+1)\left[\int_{|y|\leqslant\frac{7k}{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{n}}}e^{-\frac{ny}{2}}dy\right]^3\\
&=\lim_{n\to\infty}\sup\,(n+1)\left[\int_{|y|<\frac{7k}{\sqrt{n}}}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}dy\right]^3
\end{aligned}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup\,(n+1)\left(\int_{|y|\leqslant\frac{7k}{\sqrt{n}}} \mathrm{d}y\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup\,(n+1)\left(\frac{14k}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0. \tag{2.36}$$

由(2.34),(2.35),(2.36)式得定理2.2.

定理 2.3 设$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$是S.B[1].M.O.,令

$$Y_n = \sum_{k=1}^{2^n}\left[X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2, \tag{2.37}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 1,\ [L^2],\ [\text{a.e.}]. \tag{2.38}$$

证 由命题2.3得知

$$\left[X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]\sim N\left(0,\frac{1}{2^n}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{2^n}\boldsymbol{E}\left(\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2\right) = 1.$$

因此

$$\boldsymbol{E}(|Y_n-1|^2) = \operatorname{var}(Y_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n}\operatorname{var}\left(\left[X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2\right)$$

$$= 2^{-2n}\sum_{k=1}^{2^n}\operatorname{var}\left(\left[\frac{X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2^n}}}\right]^2\right). \tag{2.39}$$

若令

$$Z_{n,k} = \left(X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)\Bigg/\sqrt{\frac{1}{2^n}}, \tag{2.40}$$

则

$$Z_{n,k}\sim N(0,1),\ \boldsymbol{E}(Z_{n,k}^2) = 1,\ \boldsymbol{E}(Z_{n,k}^4) = 3,$$

所以

$$\operatorname{var}(Z_{n,k}^2) = \boldsymbol{E}(Z_{n,k}^4) - \boldsymbol{E}(Z_{n,k}^2)^2 = 3 - 1 = 2. \quad (2.41)$$

将(2.40),(2.41)式代入(2.39)式,得

$$\boldsymbol{E}(|Y_n - 1|^2) = 2^{-2n} \cdot 2^n \cdot 2 = 2^{-n+1}.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(|Y_n - 1|^2) = 0$,即

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 1, [L^2].$$

但是,

$$P(|Y_n - 1| > \varepsilon) \leqslant \frac{\operatorname{var}(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2^{-n+1}}{\varepsilon^2},$$

所以由 Borel-Cantelli 引理得知$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 1$, [a.e.].

定理 2.4 设$\{X(t): t \in [0,\infty)\}$是 S.B[1].M.O., Y_n 如定理 2.3'所定义,则

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{2^n}\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right) - X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| = \infty, [\text{a.e.}]. \quad (2.42)$$

证 由 Y_n 的定义知

$$Y_n \leqslant \left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right) - X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|\right)\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{2^n}\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right) - X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|,$$

但 $X(\cdot,\omega)$ 在$[0,1]$上一致连续,所以

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|X\left(\frac{k}{2^n}\right) - X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| \equiv 0.$$

因此,由$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 1$, [a.e.],得知(2.42)式成立.

命题 2.7 设随机变量 Y 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$, 则 $\boldsymbol{E}(|Y|^\alpha) = \rho\sigma^\alpha$ ($\forall \alpha \in \mathbf{R}$),其中

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

证 直接计算立即可得命题 2.7.

定义 2.2 设$\{X_t: t \in \mathbf{T}\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机过程,$\mathbf{T}$ 可为开区间,可为闭区间,可为半开半闭区间,可为

有穷区间亦可为无穷区间.若

(1)　$X_t - X_s$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2(t-s)I)$ $(s,t\in\mathbf{T},$ $\sigma^2>0$, I 是d 维单位矩阵);

(2)　X 具有独立增量,即是对任何 $t_0<t_1<\cdots<t_k$, $t_i\in$ $\mathbf{T}$, $\{X_{t_i}-X_{t_{i-1}}:1\leqslant i\leqslant k\}$ 相互独立,则称 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是 **d 维 Brown 运动**.记之为 B^d.M..

若还有 $0\in\mathbf{T}$, $X_0\equiv 0$,则称 X 是**始于 0 的 d 维 Brown 运动**,记之为 B^d.M.O..

命题 2.8　设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 B^d.M.,则存在 X 的一个完全可分的修正$\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_t:t\in\mathbf{T}\}$,它几乎一切轨道 $\widetilde{X}(\cdot,\omega)$ 都是连续的,即存在 $A\in\mathscr{F}$, $P(A)=1$,使得对每个 $\omega\in A$, $\widetilde{X}(\cdot,\omega)$ 在 $\mathbf{T}$ 上都连续.

证　令 $X_t=(X_{t,1},\cdots,X_{t,d})$,对任何 $t\in\mathbf{T}$,任何 $1\leqslant k\leqslant d$,都有

$$\lim_{s\to t}\boldsymbol{E}(|X_{t,k}-X_{s,k}|^2)=\lim_{s\to t}\sigma^2|t-s|=0,$$

故$\{X_{t,k}:t\in[0,b)\}$ 是随机连续的,从而由第四章定理 1.1 得知:它存在一个完全可分的修正$\{\widetilde{X}_{t,k}:t\in\mathbf{T}\}$.又由命题2.7知存在常数 ρ 使

$$\boldsymbol{E}(|\widetilde{X}_{t,k}-\widetilde{X}_{s,k}|^\alpha)=\rho\sigma^\alpha|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}\quad(\forall\,\alpha>0)$$

(因为$(\widetilde{X}_{t,k}-\widetilde{X}_{s,k})\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$),所以用第四章定理1.3 (取 $\alpha>1$ 即可)得知:对几乎所有的 ω, $\widetilde{X}_{t,k}(\omega)$ 是 t 的连续函数.命题 2.8 得证.

附注 2.1　对 B^d.M. X 而言,相应的命题2.1至命题2.6都成立.

附注 2.2　类似于定理 2.1, B^d.M. 当然恒存在.

附注 2.3　设 X 是 B^1.M.,类似的定理 2.2、定理 2.3、定理 2.4 都成立.

附注 2.4 由于命题2.8成立,以后所言 B^d.M.,都假定是它的完全可分的修正,因而其几乎所有的轨道都是连续的.为简单计,不妨设其轨道都是连续的(通过把概率空间"净化",总可做到这点).

附注 2.5 所谓标准的始于0的取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Brown 运动 S.B^d.M.O.,就是一般的 Brown 运动 B^d.M. 当 $X_0 \equiv 0, \sigma^2 = 1$ 的特殊场合.

定义 2.3 令 Ω 为全部定义在$[0,\infty)$上取值于 $\mathbf{R}^d$ 的在零点函数值为0($\mathbf{R}^d$ 中之零向量亦用0表示)的连续函数,Ω 中的元素用 ω 表示,即

$$\Omega = \{\omega: \omega(\cdot):[0,\infty) \mapsto \mathbf{R}^d,\ \omega(\cdot)\text{ 连续},\ \omega(0) = 0\}.$$

再令X_t 为Ω 上的坐标函数,即 $X_t(\omega) = \omega(t)$ ($t \in [0,\infty)$, $\omega \in \Omega$),有时亦记 X_t 为$X(t)$, $X_t(\omega)$ 为 $X(t,\omega)$.

再令$\mathscr{F}$是使一切 X_t 可测的最小σ 代数,即

$$\mathscr{F} = \bigvee_{t\in[0,\infty)} X_t^{-1}(\mathscr{B}^d) = \sigma(X_t^{-1}(B): t \in [0,\infty),\ B \in \mathscr{B}^d),$$

其中 $\mathscr{B}^d$ 是d 维欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ 中的全体 Borel 集.

设$\{\widehat{X}(t): t \in [0,\infty)\}$ 是概率空间$(\widehat{\Omega},\widehat{\mathscr{F}},\widehat{P})$上的 B^d.M.O.,对任何正整数 m,任何 $B_i \in \mathscr{B}^d$, $i = 1,\cdots,m$ 和 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$,令 $J_m = \{t_1,\cdots,t_m\}$,定义

$$\begin{aligned}
&P_{J_m}([X(t_1) - X(t_0)] \in B_1,\cdots,[X(t_m) - X(t_{m-1})] \in B_m) \\
&= \widehat{P}([\widehat{X}(t_1) - \widehat{X}(t_0)] \in B_1,\cdots,[\widehat{X}(t_m) - \widehat{X}(t_{m-1})] \in B_m) \\
&= \prod_{i=1}^m \widehat{P}([\widehat{X}(t_i) - \widehat{X}(t_{i-1})] \in B_i) \\
&= \prod_{i=1}^m \widehat{P}(\widehat{X}(t_i - t_{i-1}) \in B_i) \\
&= \prod_{i=1}^m \int_{B_i} \left(e^{-\frac{|x|^2}{2(t_i - t_{i-1})\sigma^2}} \Big/ (2\pi\sigma^2(t_i - t_{i-1}))^{\frac{n}{2}}\right) dx, \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

其中, $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbf{R}^d$, $|x|^2=\sum_{k=1}^{d}x_k^2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d$.

由(2.43)式所定义的集合函数 P_{J_m} 显然可唯一地扩张到 $\sigma(X(t_1)-X(t_0),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_m)-X(t_{m-1}))=\sigma(X(t_1),\cdots,X(t_m))$ 上去,而成为一概率测度 P_{J_m}.

令 $\mathbf{T}=[0,\infty)$, $\varphi(\mathbf{T})$ 为 $\mathbf{T}$ 之一切有限子集, $E=\mathbf{R}^d$, $\mathscr{E}=\mathscr{B}^d$, $\mathscr{E}^S=\bigtimes_{t\in S}\mathscr{E}_t$, $\mathscr{E}_t\equiv\mathscr{E}$, $S\subset\mathbf{T}$. 任取 $J=\{t_1,\cdots,t_m\}\in\varphi(\mathbf{T})$. $A\in\mathscr{E}^J$,定义

$$\widetilde{P}_J(A)=P_J(X_J^{-1}(A)),\tag{2.44}$$

其中 $X_J=(X(t_1),\cdots,X(t_m))$. 易证 $\{\widetilde{P}_J:J\in\varphi(\mathbf{T})\}$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的一个投影测度系. 若定义

$$\widehat{P}(\pi_J^{-1}(A))=\widetilde{P}_J(A)\quad(A\in\mathscr{E}^J,\ J\in\varphi(\mathbf{T})),\tag{2.45}$$

则由第四章定理 3.1, $\widetilde{P}$ 是全体柱集构成的代数

$$\mathscr{E}_0^{\mathbf{T}}=\{\Lambda:\Lambda=\pi_J^{-1}(A),\ A\in\mathscr{E}^J,\ J\in\varphi(\mathbf{T})\}$$

上的概率测度,其中 π_J 是由第四章(3.1)式所定义的由 E^{T} 到 E^J 的投影变换,令

$$P(X_J^{-1}(A))=P_J(X_J^{-1}(A))=\widetilde{P}_J(A)=\widetilde{P}(\pi_J^{-1}(A))\tag{2.46}$$

$(A\in\mathscr{E}^J,\ J\in\varphi(\mathbf{T}))$,由 $\tilde{P}$ 是代数 $\mathscr{E}_0^J$ 上的概率测度易证 P 是代数

$$\mathscr{F}_0\equiv\{M:M=X_J^{-1}(A),\ A\in\mathscr{E}^J,\ J\in\varphi(\mathbf{T})\}$$

上的概率测度,故 P 可唯一地扩张到 σ 代数

$$\mathscr{F}=\bigvee_{t\in[0,\infty)}X_t^{-1}(\mathscr{B}^d)=\sigma(\mathscr{F}_0)$$

上去. 扩张后的概率测度仍用 P 表之,遂得概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$,称之为 **Wiener 概率空间**, P 称为 **Wiener 测度**.

Wiener 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的坐标过程 $\{X(t):t\in[0,\infty),\ X(t,\omega)=\omega(t)\}$ 是一个 B^d.M.O. ,因为由(2.43)式知定义2.2中的(1)和(2)成立,由 Ω 的定义知 $X_0\equiv 0$,所以 $\{X(t):$

$t \in [0,\infty)\}$ 是 B^d.M.O..

附注 2.6 若取定义 2.3 中的 $\{\hat{X}(t): t \in [0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}},\hat{P})$ 上的 S.B^d.M.O.,则定义 2.3 中得到的 Wiener 空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为**标准 Wiener 空间**,其上的坐标过程就是 S.B^d.M.O.. 正因为如此,有时称 B^d.M. 为 Wiener 过程,称 S.B^d.M.O. 为标准 Wiener 过程.

前面我们研究 Brown 的轨道性质时,仅研究了轨道的连续性、不可微性及无"有界变差性"等. 下面我们将较深入地研究一下 Brown 运动的轨道性质.

仍设 $\dim(\cdot)$, $\varphi\text{-}m(\cdot)$ 是第二章 §3 中所定义的 Hausdorff 维数与由 φ 决定的 Hausdorff 测度.

定义 2.4 设 μ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的具有紧支撑 K 的有限的 Borel 测度(当然具有可数可加性),$\alpha \geqslant 0$,称

$$I_\alpha(\mu) \triangleq \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{|x-y|^\alpha}(\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y)) \qquad (2.47)$$

为 μ 的 **α-能**;称

$$C_\alpha(K) \triangleq \sup\left\{\frac{1}{I_\alpha(\mu)}: \mu \text{ 是具有紧支撑 } K^* \subset K \text{ 的 Borel 概率测度}\right\} \qquad (2.48)$$

为 K 的 **α-容度**;称

$$\begin{aligned}\dim_C(K) &\triangleq \inf\{\alpha > 0: C_\alpha(K) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha > 0: C_\alpha(K) > 0\}\end{aligned}$$

为 K 的**容度维数**(约定 $\frac{1}{\infty} = 0$).

众所周知:由 Frostman 定理(参见[50]第一章定理 4.5)得

$$\dim_C(K) = \dim(K) \quad (\forall \text{ 紧集 } K \subset \mathbf{R}^d). \qquad (2.49)$$

和以前一样,仍用 $f(A)$ 表示函数 f 在 A 上之像集(A 是 f 的定义域中任一子集),$f^{-1}(B)$ 表示函数 f 在 B 的逆像集(B 是 f 的值域中的任一子集). 如果 $X = \{X(t): t \in \mathbf{T}\}$ 是以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态

空间的随机过程,$A \subset \mathbf{T}$, $B \subset E$,则定义 $X(A) \triangleq X(A)(\cdot)$, $X(A)(\omega) \triangleq \{X(t,\omega): t \in A\}$ $(\forall \omega \in \Omega)$;$X^{-1}(B) \triangleq X^{-1}(B)(\cdot)$,$X^{-1}(B)(\omega) \triangleq \{t \in \mathbf{T}: X(t,\omega) \in B\}$. 称 $X(A)$, $X^{-1}(B)$ 分别为 X 在 A 上之**像集**与在 B 上之**逆像集**. 显然,$X(A)$ 和 $X^{-1}(B)$ 都是随机集. 有时记

$$X(A)(\omega) = X(A,\omega), \quad X^{-1}(B)(\omega) = X^{-1}(B,\omega).$$

定理 2.5　设 $X = \{X(t): t \in [0,1]\}$ 是 B^d.M.O., $d \geqslant 2$, 则 $P(\dim(X([0,1])) = 2) = 1$.

证　首先我们指出:由 X 的轨道的连续性,用第一章命题5.1 可知,对任何 ω, $X([0,1])(\omega)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的紧集,所以,由 Frostman 定理可知

$$\dim(X([0,1])) \equiv \dim_C(X([0,1])). \tag{2.50}$$

(1)　推证

$$\dim_C(X([0,1])) \geqslant 2, \ [\text{a.e.}]. \tag{2.51}$$

为此,只需证明对任何 $1 < \alpha < 2$,有

$$C_\alpha(X([0,1])) > 0, \ [\text{a.e.}],$$

亦即只需证明:对几乎所有的 ω,存在 $X([0,1])$ 上的 Borel 概率测度 μ,使

$$I_\alpha(\mu) < \infty. \tag{2.52}$$

(C_α 与 I_α 分别由(2.48)与(2.47)所定义.)

事实上,由 $X_t - X_s$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2(t-s)I)$ 及命题 2.7 可知存在常数 c 使

$$\boldsymbol{E}(|X_t - X_s|^{-\alpha}) = c|t-s|^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.53}$$

把(2.53)两边积分得

$$\int_\Omega \left(\int_0^1\int_0^1 |X_t - X_s|^{-\alpha} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P = c\int_0^1\int_0^1 |t-s|^{-\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty.$$

所以

$$\int_0^1\int_0^1 |X_t - X_s|^{-\alpha} \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty, \ [\text{a.e.}]. \tag{2.54}$$

固定任意 $\omega \in \Omega$,令 $D(\omega)=X([0,1],\omega)$,

$$\mu_\omega(A)=\mathscr{L}_1(\{t\in[0,1]:X(t,\omega)\in A\}),\ A\in\mathscr{B}(D(\omega)),$$

其中 $\mathscr{L}_1$ 是一维 Lebesgue 测度,$\omega\in\Omega$.

由于 $X(\cdot,\omega)$ 连续,所以轨道 $X(\cdot,\omega)$ 可视为概率空间 $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\mathscr{L}_1)$ 上的取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量. 而 μ_ω 就是 $X(\cdot,\omega)$ 的分布,即

$$\mu_\omega=\mathscr{L}_1\circ(X(\cdot,\omega))^{-1}. \tag{2.55}$$

(μ_ω 是$X(\cdot,\omega)$的"逗留时测度")所以 μ_ω 是$D(\omega)$上的Borel概率测度($\forall\,\omega\in\Omega$).

由(2.55)和(2.54)可得

$$\begin{aligned}I_\alpha(\mu_\omega)&=\int_{D(\omega)}\int_{D(\omega)}|x-y|^{-\alpha}\mu_\omega(\mathrm{d}x)\mu_\omega(\mathrm{d}y)\\&\cdot\int_{D(\omega)}\int_{D(\omega)}|x-y|^{-\alpha}\mathscr{L}_1(X(t,\omega)\in\mathrm{d}x)\mathscr{L}_1(X(s,\omega)\in\mathrm{d}y)\\&=\int_0^1\int_0^1|X(t,\omega)-X(s,\omega)|^{-\alpha}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&<\infty\quad(\text{对几乎所有的 }\omega\in\Omega\text{ 及任意 }1<\alpha<2).\end{aligned}\tag{2.56}$$

由(2.56)知

$$\dim_C(X([0,1]))\geqslant 2,\ [\text{a.e.}]. \tag{2.57}$$

(2) 推证

$$\dim_C(X([0,1]))\leqslant 2,\ [\text{a.e.}]. \tag{2.58}$$

为此,只需证明对任意 $\alpha>2$,有

$$s^\alpha\text{-}m(X([0,1]))<\infty,\ [\text{a.e.}]. \tag{2.59}$$

事实上,任取 $\alpha>2$,有 $0<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{2}$,由 B^d.M.O. 的 Hölder 连续性(参见[50] 第二章命题 1.3) 知:对几乎所有的 ω,存在常数 $c>0,\ \delta>0$(均不依赖 ω),使得

$$|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|\leqslant ch^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$(0\leqslant t\leqslant 1,\ t+h\leqslant 1,\ 0\leqslant h\leqslant\delta).$$

因此由上式即得

$$X([t,t+h])\subset B(X(t),ch^{\frac{1}{\alpha}}),$$

其中 $B(x,r)$ 表示以 x 为中心、以 r 为半径之开球. 所以,若取 $\frac{1}{m}<\delta$, 由上式立得

$$X([0,1])=\bigcup_{j=1}^{m}X\left(\left[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right]\right)$$

$$\subset\bigcup_{j=1}^{m}B\left(X\left(\frac{j-1}{m}\right),cm^{-\frac{1}{\alpha}}\right),\ [\text{a.e.}].\qquad(2.60)$$

若令 $\mathscr{B}(d)$ 为 $\mathbf{R}^d$ 中一切开球,则有常数 $K>0$ 使

$$\begin{aligned}&s^{\alpha}\text{-}m(X([0,1]))\\&\leqslant K\lim_{m\to\infty}\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}[\operatorname{diam}(B_i)]^{\alpha}:B_i\in\mathscr{B}(d),\\&\qquad\bigcup_i B_i\supset X([0,1]),\ \operatorname{diam}(B_i)\leqslant 2cm^{-\alpha}\Big\}\\&\leqslant K\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{diam}\left(B\left(X\left(\frac{j-1}{m}\right),cm^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right)^{\alpha}\\&=K\lim_{m\to\infty}m(2cm^{-\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}=K(2c)^{\alpha}<\infty,\ [\text{a.e.}].\end{aligned}$$

此即(2.59)成立,从而(2.58)成立.

由(2.50),(2.51),(2.58)即得定理 2.5.

事实上,我们还有比定理 2.5 更强的结果.

定理 2.6　在定理 2.5 的条件下,总有

$$P(\dim X(A))=2\dim A,\qquad(2.61)$$

对[0,1]中任何 Borel 集 A 均成立) = 1.

证明参见[50]第二章定理 2.3.

我们知道:若 $X=\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ 是 $\mathrm{B}^1.\mathrm{M.O.}$,则对几乎所有的轨道 $X(\cdot,\omega)$ 来说,它穿越任一水平线都有无穷多次,即 $\{t\in[0,\infty):X(t,\omega)=x\}$ 是无穷集. 这个无穷集究竟有多"大"? 下面的定理精确地回答了这一问题. 实际上,它的结论回答的问题比我们所提的还要广.

定理2.7 设 $X=\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ 是 B^1.M.O.，B 是 $\mathbf{R}$ 中任一 Borel 集，则

$$P\left(\dim(X^{-1}(B))=\frac{1+\dim(B)}{2}\right)=1. \qquad (2.62)$$

特别地，当 $B=\{x\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的单点集时，$X^{-1}(B)=\{t:X(t)=x\}$ 就是 X 穿越水平线 x 的时间集合. (2.62) 告诉我们：这个集合的 Hausdorff 维数是 $\frac{1}{2}$（对几乎所有的轨道 $X(\cdot,\omega)$）.

证明参见[50]第二章定理4.3.

关于Brown运动轨道性质，在此不再详细讨论了. 有兴趣的读者可参阅[50]及其后所列的参考文献.

§3 Lévy 过程与无穷可分律

定义3.1 称取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量 X 是**无穷可分的**，如果对任何正整数 n，都有 n 个相互独立的具有公共分布的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$，使 $X=X_1+\cdots+X_n$；称定义在 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 上的概率测度 μ 是**无穷可分的**，如果对任何正整数 n，都存在定义在 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 上的概率测度 μ_n，使 μ 等于 μ_n 的 n 重卷积：$\mu=\mu_n*\cdots*\mu_n$；称定义在 $\mathbf{R}^d$ 的特征函数 f 是**无穷可分的**，如果对任何正整数 n，都存在特征函数 f_n，使 $f=f_n^n$.

显然，随机变量无穷可分时，其分布与特征函数都是无穷可分的；无穷可分特征函数无处为0.

定义3.3 称定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机过程 $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是 **Lévy 过程**，如果它具有平稳独立增量，即对任何 $t_0<t_1<\cdots<t_n$，$t_i\in\mathbf{T}$，$\{X_{t_i}-X_{t_{i-1}}:1\leqslant i\leqslant n\}$ 相互独立，且 $X_{s+t}-X_s$ 之分布不依赖 s. 此定义中的 $\mathbf{T}$ 可为开区间，可为闭区间，可为半开半闭区间，可为有穷区间亦可为无穷区间.

显然,前两节研究的Poisson过程和Brown运动都是Lévy过程的特例.

为简单起见,本节讨论的 Lévy 过程$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$,恒设$\mathbf{T}=[0,b)$,b 可为实数,亦可为 ∞,且 $X_0\equiv 0$.

命题3.1　对Lévy过程$\{X_t:t\in[0,b)\}$而言,X_t是无穷可分的($\forall t\in[0,b)$).

证　任取正整数 n,总有 $X_t=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\frac{it}{n}}-X_{\frac{(i-1)t}{n}}\right)$,而$\left\{X_{\frac{it}{n}}-X_{\frac{(i-1)t}{n}}:1\leqslant i\leqslant n\right\}$独立同分布,所以 X_t 是无穷可分的.

定理 3.1　$\mathbf{R}^d$ 上的特征函数$f(u)$是无穷可分的充要条件是$f(u)=\mathrm{e}^{-\psi(u)}$,其中

$$\psi(u)=\mathrm{i}(a,u)+\frac{1}{2}uSu'$$
$$+\int_{\mathbf{R}^d}\left[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,u)}+\frac{\mathrm{i}(x,u)}{1+|x|^2}\right]\Pi(\mathrm{d}x),\qquad(3.1)$$

其中 $a=(a_1,\cdots,a_d)\in\mathbf{R}^d$, S 是 d 维对称非负定矩阵,Π 是$\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 上的测度,$\Pi(\{0\})=0$ 且

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\Pi(\mathrm{d}x)<\infty,\qquad(3.2)$$

u' 是$u=(u_1,\cdots,u_d)$的转置,(x,u)表 x 与 u 之内积,$|x|$是$\mathbf{R}^d$ 中 x 的欧氏范数.

易证 $\psi(u)$ 由(3.1)和(3.2)确定的充要条件是

$$\psi(u)=\mathrm{i}(\alpha,u)+\frac{1}{2}uSu'$$
$$+\int_{\mathbf{R}^d}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,u)}+\mathrm{i}(x,u)\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}]\Pi(\mathrm{d}x),\quad(3.3)$$

$$\int_{\mathbf{R}^d}(1\wedge|x|^2)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty.\qquad(3.4)$$

称(3.1)或(3.2)为**Lévy-Khintchine公式**,称 Π 为ψ 或f 的**Levy测度**.

我们只就 $d=1$ 的场合证明定理3.1(参见后面的定理3.2).一般情况亦可类似地证明.

定义 3.3 设 $\{X_{n,k}:1\leqslant k\leqslant k_n,\ n\geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一族取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机变量,且 $\{X_{n,k}:1\leqslant k\leqslant k_n\}$ 独立 $(n\geqslant 1)$,如果对任何 $\varepsilon>0$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}P(|X_{n,k}|\geqslant\varepsilon)=0, \tag{3.5}$$

则称 $\{Z_{n,k}\}$ 是**一致渐近可忽略体系**,或称之具有一致渐近可忽略性(uniformly asymptotic negligibility),记之为 u.a.n. 体系.

命题 3.2 下面6个条件等价:

(1) $\{x_{n,k}:1\leqslant k\leqslant k_n,\ n\geqslant 1\}$ 是 u.a.n. 体系;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathrm{Re}(1-f_{n,k}(t))=0$

(在 t 的任一有限区间上一致成立);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|1-f_{n,k}(t)|=0$

(在 t 的任一有限区间上一致成立);

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|1-f_{n,k}(t)|=0\ (t\in\mathbf{R}^d)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}\mathrm{Re}(1-f_{n,k}(t))=0\ (t\in\mathbf{R}^d)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}F_{n,k}(\mathrm{d}x)=0$,

其中 $\mathrm{Re}(Z)$ 表示 Z 的实部,$f_{n,k}$ 和 $F_{n,k}$ 分别表示随机变量 $X_{n,k}$ 的特征函数及分布.

直接计算立即可证明此命题.(亦可参看[27]第四章命题3.1,那里的证明是对 $d=1$,但对 d 是任一正整数,证明仍然成立.)

下面我们引进一族特征函数:

$$f(u)=\mathrm{e}^{-\psi(u)}\quad(u\in\mathbf{R}), \tag{3.6}$$

$$\psi(u)=\mathrm{i}au+\int_{\mathbf{R}}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}+\frac{\mathrm{i}ux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Psi(\mathrm{d}x). \tag{3.7}$$

其中 a 是任一实数，Ψ 是 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 上任一有限测度. 记这族特征函数为 $\mathscr{D}$. 如 $f \in \mathscr{D}$ 由(3.6)及(3.7)所确定，则记 $f = \{a, \Psi\}$.

命题 3.3(唯一性、封闭性、连续性)

(1)　任取 $f \in \mathscr{D}$，则存在唯一一个实数 a 及 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 上唯一一个有限测度 Ψ，使 $f = \{a, \Psi\}$.

(2)　若 $f_n = \{a_n, \Psi_n\} \in \mathscr{D}$, $a_n \to a$, $\Psi_n \xrightarrow{w} \Psi$，则 $f_n \to \{a, \Psi\} \in \mathscr{D}$.

(3)　若 $f_n = \{a_n, \Psi_n\} \in \mathscr{D}$, $f_n \to f$, f 是特征函数，则 $a_n \to a$, $\Psi_n \xrightarrow{w} \Psi$, $f = \{a, \Psi\} \in \mathscr{D}$.

证明参见[27]定理 3.1 及定理 3.2.

我们称 u.a.n. 体系 $\{X_{n,k}\}$ 的特征函数 $\{f_{n,k}\}$ 或分布 $\{F_{n,k}\}$ 亦为 u.a.n. 体系.

下面我们再引进几族定义在 $\mathbf{R}$ 上的特征函数. 令

$\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$;

$\mathscr{D}_2 = \{$一切无穷可分特征函数$\}$;

$$\mathscr{D}_3 = \left\{ f(u) = \prod_{k=1}^{k_n} f_{n,k}(u)\ (\forall\, n \geqslant 1) : \{f_{n,k}\} \text{ 是 u.a.n. 体系} \right\};$$

$$\mathscr{D}_4 = \left\{ f(u) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_n u} \prod_{k=1}^{k_n} f_{n,k}(u) : \right.$$
$$\left. \{f_{n,k}\} \text{ 是 u.a.n. 体系}, A_n \in \mathbf{R} \right\};$$

$\mathscr{D}_5 = \{f(u) = \mathrm{e}^{-\psi(u)} : \psi(u)$ 由(3.1),(3.2)所确定$\}$;

$\mathscr{D}_6 = \{f(u) = \mathrm{e}^{-\psi(u)} : \psi(u)$ 由(3.3),(3.4)所确定$\}$.

定理 3.2　$\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_3 = \mathscr{D}_4 = \mathscr{D}_5 = \mathscr{D}_6$.

证　$\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_2$. 这可由

$$\{a, \Psi\} = \left(\left\{ \frac{a}{n}, \frac{1}{n}\Psi \right\} \right)^n \quad (n \geqslant 1)$$

直接推出.

$\mathscr{D}_2 \subset \mathscr{D}_3$. 任取 $f \in \mathscr{D}_2$，用 f 的无穷可分性知：存在特征函数

$f_n \to 1$，使 $f = f_n^n$ ($\forall n \geqslant 1$). 取 $k_n \equiv n$，$f_{n,k} = f_n$ ($1 \leqslant k \leqslant k_n = n$)，则 $f = \prod_{k=1}^{k_n} f_{n,k}$. 又因为

$$\lim_{n\to\infty} |f_{n,k}(t) - 1| = |f_n(t) - 1| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

所以 $\{f_{n,k}\}$ 是 u.a.n. 体系，从而 $f \in \mathscr{D}_3$.

$\mathscr{D}_3 \subset \mathscr{D}_4$. 这是显然的.

$\mathscr{D}_4 \subset \mathscr{D}_1$. 参见[27]第四章定理 4.1.

为证 $\mathscr{D}_4 = \mathscr{D}_5 = \mathscr{D}_6$，只需注意(3.7)右端之被积函数在0点的函数值定义为

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - e^{iux} + \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{2}u^2,$$

则(3.7)右端之被积函数有界连续. 再定义

$$v(A) = \int_{A-\{0\}} \frac{1+x^2}{x^2}\Psi(\mathrm{d}x), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),$$

则得 $\mathscr{D}_4 = \mathscr{D}_5$. 而 $\mathscr{D}_5 = \mathscr{D}_6$ 是显然的. 定理 3.2 得证.

注意：定理 3.2 说明(3.7)式是 Lévy-Khintchine 公式的另一种形式.

命题 3.4 对于任意取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$，存在完全可分的修正 $\widetilde{X}$ 使其几乎所有的轨道 $\widetilde{X}(\cdot,\omega)$ 都是右连续的且具有左极限.

证明参见[50]第四章注 1.2.

定理 3.3 任给一个取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$，均存在由(3.3)和(3.4)所确定的 $\psi(u)$，使

$$\boldsymbol{E}(e^{i(u,X_t)}) = e^{-t\psi(u)} \quad (t \in [0,\infty),\ u \in \mathbf{R}^d). \tag{3.8}$$

反之，任给一个由(3.3)和(3.4)所确定的 $\psi(u)$，恒存在一个取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 满足(3.8)且其跳过程 $\{\Delta X_t \triangleq X_t - X_{t-} : t \geqslant 0\}$ 是以 Π 为特征测度的 Poisson 点过程.

证 任给一个取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$，由于

X_1 是无穷可分的随机变量，所以存在一个由(3.1)和(3.2)所定义的 $\psi(u)$，使

$$E(e^{i(u,X_1)}) = e^{-\psi(u)},$$

从而对任何有理数 r，有

$$E(e^{i(u,X_r)}) = e^{-r\psi(u)}. \tag{3.9}$$

但是 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 的几乎所有的轨道 $X(\cdot,\omega)$ 都是右连续的，所以对任何 $t \in [0,\infty)$，在(3.9)中对 $r \downarrow t$（r 取有理数）取极限即得(3.8).

反之，任给一个由(3.3)和(3.4)式确定的 $\psi(u)$，可以构造一个 S. B^d. M. O. $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$，其一切轨道连续（参见定理2.1）. 令 $X_t^{(1)} = B_t\sqrt{S} - \alpha t$ $(t \geqslant 0)$，则 $X^{(1)} = \{X_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ 是一切轨道连续的 Lévy 过程而且 $X_t^{(1)}$ 的特征函数为

$$E(e^{i(u,X_t^{(1)})}) = e^{-t\psi^{(1)}(u)},$$

$$\psi^{(1)}(u) = i(\alpha, u) + \frac{1}{2}uSu'. \tag{3.10}$$

再构造一个与 $X^{(1)}$ 独立的具有特征测度 Π 的 Poisson 点过程：

$$\Delta = \{\Delta_t : t \geqslant 0\}.$$

令

$$\Delta_t^{(2)} = \begin{cases} \Delta_t, & \text{当 } |\Delta_t| \geqslant 1, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases} \tag{3.11}$$

则 $\Delta^{(2)} = \{\Delta_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ 是一个以 $\Pi^{(2)}(dx) = \mathbf{1}_{\{|x| \geqslant 1\}}\Pi(dx)$ 为特征测度的 Poisson 点过程. 由于 $\Delta_t^{(2)}$ 至多在可数多个 t 上非0，所以可令

$$X_t^{(2)} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} \Delta_t^{(2)} \quad (t \geqslant 0). \tag{3.12}$$

可证：$X^{(2)} = \{X_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ 是一个轨道右连续且有左极限的 Lévy 过程，它与 $X^{(1)}$ 独立，$X^{(2)}$ 的特征函数为

$$E(e^{i(u,X_t^{(2)})}) = e^{-t\psi^{(2)}(u)}, \tag{3.13}$$

$$\psi^{(2)}(u) = \int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{i(u,x)}) \Pi^{(2)}(dx). \tag{3.14}$$

再令

$$\Delta_t^{(3)} = \begin{cases} \Delta_t, & \text{当} \ |\Delta_t| < 1, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases} \tag{3.15}$$

则 $\Delta^{(3)} = \{\Delta_t^{(3)} : t \geqslant 0\}$ 是以 $\Pi^{(3)}(dx) = \mathbf{1}_{\{|x|<1\}} \Pi(dx)$ 为特征测度的 Poisson 点过程. 对每个 $\varepsilon > 0$, 考虑

$$X_t^{(\varepsilon,3)} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} \mathbf{1}_{\{\varepsilon < |\Delta_s| < 1\}} \cdot \Delta_s - t \int_{\mathbf{R}^d} x \mathbf{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \Pi(dx), \tag{3.16}$$

可证: $X^{(\varepsilon,3)} = \{X_t^{(\varepsilon,3)} : t \geqslant 0\}$ 是一个轨道右连续并有左极限的 Lévy 过程, 且有特征函数

$$\boldsymbol{E}(e^{i(u, X_t^{(\varepsilon,3)})}) = e^{-t\psi^{(\varepsilon,3)}(u)}, \tag{3.17}$$

$$\psi^{(\varepsilon,3)}(u) = \int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{i(u,x)} + i(u,x)) \mathbf{1}_{\{\varepsilon < |x| < 1\}} \Pi(dx). \tag{3.18}$$

此外, 对任何 $\varepsilon > 0$, 任何 $\eta \in (0, \varepsilon)$, 有

$$\boldsymbol{E}\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s^{(\eta,3)} - X_s^{(\varepsilon,3)}|^2 \right) \leqslant 4t \int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 \mathbf{1}_{\{\eta < |x| < \varepsilon\}} \Pi(dx), \tag{3.19}$$

(详见 [2] p.8.) 而 (3.19) 右端当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 0 (因为 $\int (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty$), 所以 $\{X^{(\varepsilon,3)} : \varepsilon > 0\}$ 在范数

$$\| Y \| = \boldsymbol{E}(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |Y_s|^2)^{\frac{1}{2}}$$

下是一 Cauchy 列. 令

$$X^{(3)} = \lim_{\varepsilon \to 0} X^{(\varepsilon,3)}.$$

可以证明: $X^{(3)}$ 是轨道右连续且有左极限的 Lévy 过程, 以及有特征函数

$$E(e^{i(u,X_t^{(3)})}) = e^{-t\psi^{(3)}(u)}, \tag{3.20}$$

$$\psi^{(3)}(u) = \int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{i(u,x)} + i(u,x))\mathbf{1}_{\{|X|<1\}} \Pi(dx). \tag{3.21}$$

由于 $X^{(i)}$产生的 σ 代数在 $\Delta^{(i)}$产生的 σ 代数之内($i=2,3$). 而用命题 1.3 知 $\Delta^{(2)}$产生的 σ 代数与 $\Delta^{(3)}$产生的 σ 代数独立,所以 $X^{(2)}$与 $X^{(3)}$独立. 又由于 $X^{(1)}$与 Δ 独立,所以 $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$相互独立. 令 $X=X^{(1)}+X^{(2)}+X^{(3)}$,即 $X=\{X_t=X_t^{(1)}+X_t^{(2)}+X_t^{(3)}:t\geqslant 0\}$,则 X 是轨道右连续且有左极限的 Lévy 过程,而且其特征函数为 $E(e^{i(u,X_t)})=e^{-t\psi(u)}$. 由于 $X^{(1)}$轨道连续,所以由(3.12)、(3.16)及 $X^{(3)}$的定义得

$$\begin{aligned}\Delta X_t = X_t - X_{t-} &= (X_t^{(2)} - X_{t-}^{(2)}) + (X_t^{(3)} - X_{t-}^{(3)}) \\ &= \Delta_t \mathbf{1}_{\{|\Delta_t|\geqslant 1\}} + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Delta_t \mathbf{1}_{\{\varepsilon<|\Delta_t|<1\}} = \Delta_t,\end{aligned}$$

而 $\Delta=\{\Delta_t:t\geqslant 0\}$ 由其构造即为以 Π 为特征测度的 Poisson 点过程. 定理 3.3 证毕.

附注 3.1 若在定理 3.3 中令

$\mu(dx) = \Pi^{(2)}(dx)$, $\mu_1(dx) = \mu(dx)/\mu(\mathbf{R}^d)$, $\lambda = \mu(\mathbf{R}^d)$, $f(u)$ 是 μ_1 对应之特征函数,则

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}(u) &= \int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{i(u,x)})\mu(\mathbf{R}^d)\mu_1(dx) \\ &= \lambda(1 - f(u)),\end{aligned}$$

所以 $X^{(2)} = \{X_t^{(2)}:t\geqslant 0\}$之特征函数为

$$E(e^{i(u,x)}) = e^{-\lambda t(f(u)-1)}.$$

注意从(1.13) 即可看出:$X^{(2)}$ 是强度为 λ 的复合 Poisson 过程. 因此,由定理 3.3 看出:每一个 Lévy 过程均可分解成三个独立的 Lévy过程之和,其中一个,$X^{(1)}$ 是S. B^d. M. O. 的仿射变换(其轨道连续);第二个,$X^{(2)}$ 是强度为 λ 的复合 Poisson 过程(其轨道右连续且有左极限,且在间断点上的跃度 $\geqslant 1$);第三个,$X^{(3)}$ 是轨道右

连续且有左极限的 Lévy 过程,且其轨道在间断点的跃度 < 1. 显然这种分解是唯一的(视随机等价的随机过程无区别的意义下).

附注 3.2 设 $X = \{X_t : t \in [0, \infty)\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程,于是 X_t 的特征函数为

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u, X_t)}) = \mathrm{e}^{-t\psi(u)},$$

$\psi(u)$ 由(3.1),(3.2)(或(3.3),(3.4))所确定. 用 X 的具有平稳独立增量的性质,X 的有限维分布完全由 $\psi(u)$ 所决定. 因此 $\psi(u)$ 是刻画 X 的概率性质的一个关键因素. 我们称 $\psi(u)$ 是 X 的特征函数的指数,称(3.1)(或(3.3))中的 Π 为 X 的 Lévy 测度,称(3.1)(或(3.3))中的 uSu' 为 X 的 **Gaussian 成分**.

定义 3.4 称取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机过程 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ 是**有界变差的**,如果对几乎所有的轨道 $X(\cdot, \omega)$,在任何有界区间上都是有界变差的.

定理 3.4 取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ 是有界变差的充要条件是:

(1) 其 Gaussian 成分为 0,即 $S = 0$;

(2) 其 Lévy 测度 Π 满足条件:

$$\int_{\mathbf{R}^d} (1 \wedge |x|) \Pi(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{3.22}$$

证 设 $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ 如定理 3.3 所定义. 记 X 在 $[0, t]$ 上的全变差为 $V(X, [0, t])$.

充分性. 设条件(1),(2) 成立. 由条件(1) 得 $X_t = -\alpha t + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$. 所以欲证 X 是有界变差的,只需证明 $X^{(2)} + X^{(3)}$ 是有界变差的. 而

$$V(X^{(2)} + X^{(3)}, [0, t]) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} |\Delta(X^{(2)} + X^{(3)})_s| = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} |\Delta X_s|.$$

而由[2] 第 0 章第 5 节的指数公式可知:

$$\sum_{0 \leqslant s \leqslant t} |\Delta X_s| < \infty \ (\forall\, t > 0) \ [\text{a.e.}] \Longleftrightarrow (3.22) \text{ 式成立}.$$

所以,由条件(1) 和(2) 可得 X 是有界变差的.

必要性. 设 X 是有界变差的. 由于 $\sum_{0\leqslant s\leqslant t}|\Delta X_s|$ 是 X 在 $[0,t]$ 上的诸间断点上的跃度之和,当然有

$$\sum_{0\leqslant s\leqslant t}|\Delta X_s|\leqslant V(X,[0,t])<\infty\ (\forall t>0)\ [\text{a.e.}],$$

从而(3.22) 式成立. 又

$$\begin{aligned}V(X^{(1)},[0,t])&\leqslant V(X,[0,t])+V(X^{(2)}+X^{(3)},[0,t])\\&=V(X,[0,t])+\sum_{0\leqslant s\leqslant t}|\Delta X_s|\\&<\infty\ (\forall t>0)\ [\text{a.e.}],\end{aligned}$$

而 B^d.M.O.不是有界变差的,所以 $S=0$. 定理证毕.

系 3.1　若 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的有界变差的 Lévy 过程,$\psi(u)$ 是其特征函数的指数. 则

(1)　$\psi(u)$ 可表示为

$$\psi(u)=-\mathrm{i}(D,u)+\int_{\mathbf{R}^d}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,u)})\Pi(\mathrm{d}x),$$

其中 $D=-\left(\alpha+\int_{|x|<1}x\Pi(\mathrm{d}x)\right)$;

(2)　X 可分解为

$$X_t=tD+\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\Delta_s\quad(t\geqslant 0),$$

其中 $\Delta=\{\Delta_t:t\geqslant 0\}$ 是以 Π 为特征测度的 Poisson 点过程.

证　(1)　由定理3.4知 $S=0$ 且 $\int(1\wedge|x|)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty$, 所以 $\psi(u)$ 可表示为(1) 中的形式.

(2)　仿照定理3.3的证明并利用 $\psi(u)$ 有(1) 中的表达式即可证明 X 有(2) 中的分解式.

系 3.2　设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程.

(1)　若 X 是复合 Poisson 过程,则 X 是有界变差的;

(2)　若 X 是有界变差的,则 X 是复合 Poisson 过程的充要条件是漂移系数 $D=0$ 且 Lévy 测度 Π 是有限的.

证 (1) 是显然的.

(2) 设 X 是有界变差的 Lévy 过程,由系 3.1,$\psi(u)$ 可表示为

$$\psi(u)=-\mathrm{i}(D,u)+\int_{\mathbf{R}^d}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,u)})\Pi(\mathrm{d}x).$$

而由命题 1.2 知复合 Poisson 过程的特征函数的指数为

$$\int_{\mathbf{R}^d}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,u)})\mu(\mathrm{d}x)\quad(\mu \text{ 是有限测度}).$$

比较上述两表达式即知(2) 成立.

作为这一节的结束,我们再介绍一下随机过程的常返性与暂留性.

定义 3.5 称取值于度量空间(E,ρ) 的随机过程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是**点常返的**,如果$\{t\geqslant 0:X_t=X_0\}$ 是无界集;称 X 是**常返的**,如果对 X_0 的任一邻域 G, $\{t\geqslant 0:X_t\in G\}$ 是无界集,反之称 X 是暂留的.

显然,点常返随机过程必是常返随机过程.

定理 3.5 若 X 是 Lévy 过程,$\psi(u)$ 是 X 的特征函数的指数,则 X 是常返的充要条件是

$$\int_{|u|<1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\psi(u)}\right)\mathrm{d}u=\infty. \tag{3.23}$$

证 参见[50]第三章命题2.1.((3.23) 中的 $\psi(u)$ 就是那里的 $-\psi(Z)$. $\mathrm{Re}(\cdot)$ 表示复数取实部.)

§4 Stable 过程

本节研究一类特殊的 Lévy 过程,它的特征函数指数 $\psi(u)$ 具有更具体的分析表达式,亦即它具有更多的概率特性.

定义 4.1 称取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是 α 阶(或指数为 α 的)**Stable(稳定)过程**,如果特征函数 $\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u,X_t)})=$

$e^{-t\psi(u)}$ 的指数 $\psi(u)$ 为

$$\psi(u) = \mathrm{i}(a,u) + \lambda |u|^{\alpha} \int_{S_d} W_{\alpha}(u,\theta)\mu(\mathrm{d}\theta), \tag{4.1}$$

其中 $0 < \alpha \leqslant 2$, $a \in \mathbf{R}^d$ 为固定点,λ 是正常数,$(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 中内积, $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^d$ 中欧氏范数,且 $S_d = \{u \in \mathbf{R}^d : |u| = 1\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的单位球表面,μ 是 S_d 上的 Borel 概率测度,

$$W_{\alpha}(u,\theta) = \left[1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(u,\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\left|\left(\frac{u}{|u|},\theta\right)\right|^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1), \tag{4.2}$$

$$W_{\alpha}(u,\theta) = \left|\left(\frac{u}{|u|},\theta\right)\right| + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}(u,\theta)\log|(u,\theta)| \quad (\alpha = 1), \tag{4.3}$$

特别地,若 $\psi(u) = \lambda |u|^{\alpha}$,则称 X 是 **α 阶对称 Stable 过程**;当 (4.1) 中 $a = 0$ 时,称 X 是**严格 Stable 过程**;称 1 阶稳定过程为 **Cauchy 过程**. 注意:2 阶稳定过程就是 B^d.M.O..

下面我们引进一个很重要的概念——Scaling 性质(乘量性质).

定义 4.2　设 $Y = \{Y_t : t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机过程. 称 Y 具有 α 阶(或指数为 α 的)**Scaling 性质**, 如果对任何正实数 $\beta > 0$, Y 的分布与 $\{\beta^{-\frac{1}{\alpha}} Y_{\beta t} : t \geqslant 0\}$ 的分布相同.

命题 4.1　设 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 Lévy 过程,则

(1)　X 具有 α 阶 Scaling 性质的充要条件是:$X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$ ($\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ 表示依分布相等),$t \geqslant 0$;

(2)　若 X 是 α 阶严格 Stable 过程,则 X 具有 α 阶 Scaling 性质.

证　(1)　设 X 具有 α 阶 Scaling 性质,任取 $t \geqslant 0$,取 $\beta = \dfrac{1}{t}$,则 $X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} X_{\beta t} = t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$. 反之,若 $X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$ ($\forall\, t \geqslant 0$),则任取

$\beta>0$,有 $\beta^{-\frac{1}{\alpha}}X_{\beta t}\stackrel{d}{=}\beta^{-\frac{1}{\alpha}}(\beta t)^{\frac{1}{\alpha}}X_1=t^{\frac{1}{\alpha}}X_1\stackrel{d}{=}X_t$,即 X 具有 α 阶 Scaling 性质(因为 Lévy 过程 X 的分布由 X_1 的分布唯一决定).

(2) 由于 X 是 α 阶严格 Stable 过程,所以其特征函数的指数 $\psi(u)$ 如(4.1) ~ (4.3) 所定义,且(4.1) 中的 $a=0$. 由(4.1) ~ (4.3) 可知: $\psi(t^{\frac{1}{\alpha}}u)=t\psi(u)\ (\forall t\geqslant 0)$,从而 $X_t\stackrel{d}{=}t^{\frac{1}{\alpha}}X_1$. 故 X 具有 α 阶 Scaling 性质.

命题 4.2 设 $X=\{X_t: t\geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 α 阶 Stable 过程.

(1) 当 $\alpha\neq 1$ 时, X 是常返的充要条件是 $\alpha\geqslant d$;

(2) 当 $d\geqslant 2$ 时, Cauchy 过程是暂留的;

(3) 当 $d=1$ 时, 对称的 Cauchy 过程是常返的, 不对称的 Cauchy 过程是暂留的.

证 由定理 3.4, Lévy 过程是常返的充要条件是(3.22) 成立. 直接计算可证命题 4.2 成立.

命题 4.3 设 $X=\{X_t: t\geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 的严格 Stable 过程, 则 X_t 的分布总有密度 $\rho(t,x)$, 即

$$P(X_t\in \mathrm{d}x)=\rho(t,x)\mathrm{d}x\quad(\forall t\in[0,\infty)).$$

证明参见[50] 第三章 p. 109.

为了使符号简单起见, 我们再详细地介绍取值于 $\mathbf{R}$ 的 Stable 过程的性质.

定义 4.3 称实值随机变量 ξ 是 **Stable 变量**, 如果对任一正整数 k 及任意的独立同分布的实值随机变量列 $\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$, 只要 ξ_1 与 ξ 分布相同, 就存在实数 b_k 及正实数 a_k, 使 $a_k\xi+b_k$ 与 $\sum_{i=1}^{k}\xi_i$ 的分布相同. 特别地, 若 $b_k=0$, 则称 ξ 是**严格 Stable 变量**.

(严格)Stable 变量的分布与特征函数分别称为(严格)Stable 分布与 Stable 特征函数.

定理 4.1 设 ξ 是实值的随机变量, $f(u)$ 是 ξ 的特征函数, 则

下列陈述等价：

(1)　ξ 是 Stable 变量；

(2)　对任何正整数 n，总存在正的常数 $c_n>0$ 和实数 d_n，使得

$$f(u)^n = e^{id_n u} f(c_n u); \tag{4.4}$$

(3)　存在特征函数 $g(u)$ 及实数列 $\{B_n\}$ 和正实数列 $\{A_n\}$，$A_n \to \infty$，使

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} e^{-iB_n u} g\left(\frac{u}{A_n}\right)^n; \tag{4.5}$$

(4)　对任何正实数 $a>0,\ b>0$，总存在正实数 $c>0$ 及实数 d，使

$$f(au)f(bu) = e^{idu} f(cu); \tag{4.6}$$

(5)　$f(u) = e^{-\psi(u)}$，其中

$$\psi(u) = \begin{cases} iau + \lambda |u|^{\alpha}\left(1 - i\theta(\mathrm{sgn}\ u)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), \\ \qquad 当\ \alpha \neq 1,\ 0<\alpha\leqslant 2; \\ iau + \lambda |u|\left(1 - i\theta(\mathrm{sgn}\ u)\dfrac{2}{\pi}\log|u|\right), \\ \qquad 当\ \alpha = 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 a,θ,λ 是常数，$\lambda>0$，$|\theta|\leqslant 1$. 称 α 为 X(或 f) 的阶.

证　(1)$\Longleftrightarrow$(2) 由定义 4.3 立即可得. 而当 $f(u)$ 是退化分布的特征函数时，(2) ~ (5) 显然都成立. 所以为证此定理，只需对 $f(u)$ 为非退化的特征函数时，证明(2)$\Longleftrightarrow$(3)$\Longleftrightarrow$(4)$\Longleftrightarrow$(5).

(2)$\Longrightarrow$(3). 设(2) 成立. 则

$$f(u) = e^{-iud_n/c_n}\cdot f\left(\frac{u}{c_n}\right)^n \quad (\forall\, n\geqslant 1). \tag{4.8}$$

若能证明 $c_n \to \infty$，则取

$$g(u) = f(u),\ A_n = c_n,\ B_n = d_n/c_n,$$

即可见(3) 成立. 事实上，由(4.8) 可知 $f(u)$ 是无穷可分特征函

数,从而 $f(u)$ 无处为 0. 所以,由(4.8)得

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{u}{c_n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}|f(u)|^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

假设 $c_n \not\to \infty$,则可取 $\{c_n\}$ 的子序列 $\{c_{n_k}\}$ 使 $c_{n_k} \to c$ 是有限数.
故

$$|f(u)| = \lim_{k\to\infty}\left|f\left(\frac{cu}{c_{n_k}}\right)\right| = 1 \quad (\forall u \in \mathbf{R}).$$

这与 $f(u)$ 的非退化性矛盾. 所以 $c_n \to \infty$,从而(3)成立.

(3)$\Longrightarrow$(4). 设(3)成立. 由 $A_n \to \infty$ 知

$$\left\{f_{n,k}(u) = g\left(\frac{u}{A_n}\right): 1 \leqslant k \leqslant k_n = n,\ n \geqslant 1\right\}$$

是 u.a.n. 体系,因此,由[27]第六章定理 2.1 得知(4)成立.

(4)$\Longrightarrow$(2). (2)是(4)的特例.

(4)$\Longleftrightarrow$(5). 参见[27]第六章 p.189.

至此,定理 4.1 证毕.

类似定理 4.1,我们还有

定理4.2 设 ξ 是实值随机变量,$f(u)$ 是 ξ 的特征函数,则下列陈述等价:

(1) ξ 是严格 Stable 变量;

(2) 对任何正整数 n,总存在正的常数 $c_n > 0$,使

$$f(u)^n = f(c_n u); \tag{4.4$'$}$$

(3) 存在特征函数 $g(u)$ 及正实数列 $\{A_n\}$, $A_n \to \infty$,使

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{u}{A_n}\right)^n; \tag{4.5$'$}$$

(4) 对任何正实数 $a > 0$, $b > 0$,总存在正实数 $c > 0$,使

$$f(au)f(bu) = f(cu); \tag{4.6$'$}$$

(5) $f(u) = \mathrm{e}^{-\psi(u)}$,其中

$$\psi(u)=\begin{cases}\lambda\,|u|^{\alpha}\left(1-\mathrm{i}\theta(\operatorname{sgn} u)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), \\ \qquad 当\ \alpha\neq 1,\ 0<\alpha\leqslant 2; \\ \lambda\,|u|\left(1-\mathrm{i}\theta(\operatorname{sgn} u)\dfrac{2}{\pi}\log|u|\right), \\ \qquad 当\ \alpha=1,\end{cases} \tag{4.7$'$}$$

其中 θ,λ 是常数,$\lambda>0$, $|\theta|\leqslant 1$. 称 α 为 f(或 X) 的阶.

附注4.1　当 $\mathbf{R}^d=\mathbf{R}$ 时,(4.1),(4.2),(4.3)所定义的 $\psi(u)$ 就是(4.7) 所确定的 $\psi(u)$. 特别地,当 $\mathbf{R}^d=\mathbf{R}$, $a=0$ 时,(4.1),(4.2),(4.3) 所定义的 $\psi(u)$ 就是(4.7)′ 中所确定的 $\psi(u)$. 这就是说:实值 Stable 过程 $X=\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 的特征函数指数 $\psi(u)$ 由(4.7)所确定,每一个 X_t 都是Stable变量;实值严格Stable过程 $X=\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 的特征函数指数 $\psi(u)$ 由(4.7)′ 所确定,每一个 X_t 都是严格 Stable 变量.

定义4.4　设 $\{X_k:k=1,2,\cdots\}$ 是具有公共分布 F 的独立随机变量序列,f 是 F 所对应的特征函数,X^* 是 α 阶Stable变量,f^* 是 X^* 之特征函数. 称 $\{X_k\}$(或者 F,或者 f) 属于指数为 $\alpha\in(0,2]$ (或 α 阶) 的**稳定吸引场内**,如果存在实数列 $\{B_n\}$ 和正实数列 $\{A_n\}$, $A_n\uparrow\infty$,使

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B_n u}f\left(\frac{u}{A_n}\right)^n=f^*(u)\quad(u\in\mathbf{R}). \tag{4.9}$$

特别地,若(4.9) 中的 $B_n=0\,(\forall\,n\geqslant 1)$ 而且 X^* 是 α 阶严格 Stable 变量,则称 $\{X_k\}$(或 F,或者 f) 属于 α 阶**严格稳定吸引场内**.

§5　从属过程(Subordinator)

在本章 §3 讨论一般的 Lévy 过程与其特征函数的 Lévy-Khintchine公式时,我们发现(参见定理3.3):一般 Lévy过程 X 由 3 个相互独立的特殊的 Lévy 过程所构成

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}.$$

$X^{(1)}$ 是 B^d.M.O. 通过仿射变换而得到的，其轨道连续；$X^{(2)}$ 是复合 Poisson 过程，其轨道右连续且有左极限；$X^{(3)}$ 是 Lévy 过程，其轨道右连续且有左极限而且在间断点上的跃度 <1.

在这一节中，我们将根据 Lévy 过程的轨道性质研究一类很重要的特殊的 Lévy 过程.

设 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是取值于 $\mathbf{R}$ 的 Lévy 过程，X 的特征函数的指数 $\psi(u)$ 由下列 Lévy-Khintchine 公式确定：

$$\psi(u) = \mathrm{i}\alpha u + \frac{1}{2}su^2 + \int_{\mathbf{R}}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu} + \mathrm{i}xu\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(\mathrm{d}x), \tag{5.1}$$

其中 $\alpha \in \mathbf{R}$, s 是非负实数，Π 是 $\mathbf{R} - \{0\}$ 上的 Borel 测度，满足

$$\int_{\mathbf{R}}(1 \wedge |x|^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty.$$

命题 5.1 设 X 是取值于 $\mathbf{R}$ 的 Lévy 过程，其特征函数的指数由(5.1) 所决定. 则

(1)
$$\lim_{|u|\to\infty} u^{-2}\psi(u) = \frac{s}{2}; \tag{5.2}$$

(2) 若 X 是有界变差(从而 $s=0$ 且(3.22) 成立)，(5.1) 可以表示为

$$\psi(u) = -\mathrm{i}Du + \int_{\mathbf{R}}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu})\Pi(\mathrm{d}x), \tag{5.1$'$}$$

其中

$$D = -\left(\alpha + \int_{|x|<1} x\Pi(\mathrm{d}x)\right) \tag{5.3}$$

称为 X 的**漂移**(drift) **系数**. 则

$$\lim_{|u|\to\infty} u^{-1}\psi(u) = -\mathrm{i}D; \tag{5.4}$$

(3) X 是复合 Poisson 过程的充要条件是其特征函数的指数 $\psi(u)$ 是有界函数.

证 (1) 显然

$$\lim_{|u|\to+\infty} u^{-2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}+\mathrm{i}xu\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})=0\quad(\forall x\in\mathbf{R}).\tag{5.5}$$

而且由

$$|1-\cos\theta|\leqslant 2(1\wedge\theta),\ |\theta-\sin\theta|\leqslant 2(|\theta|\wedge|\theta|^3),$$

可推出

$$\left|u^{-2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}+\mathrm{i}xu\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\right|\leqslant 4(1\wedge x^2).\tag{5.6}$$

由(5.5)、(5.6)及$\int(1\wedge|x|^2)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty$,用Lebesgue控制收敛定理立即可得

$$\lim_{|u|\to\infty}|u|^{-2}\int_{\mathbf{R}-\{0\}}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}+\mathrm{i}xu\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(\mathrm{d}x)=0.\tag{5.7}$$

由(5.7)和(5.1)立即可得(5.2).

(2)　仿(1)可证(2).

(3)　设X是强度为λ的复合Poisson过程,由命题1.2知其特征函数为

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_t})=\mathrm{e}^{\lambda t(f(u)-1)},$$

其中$f(u)$是某一随机变量之特征函数.所以$\psi(u)=-\lambda(f(u)-1)$,故ψ有界.

反之,若ψ有界,由(2)知$D=0$,又由(1)知$s=0$.于是ψ的实部为

$$\mathrm{Re}(\psi(u))=\int_{\mathbf{R}-\{0\}}(1-\cos xu)\Pi(\mathrm{d}x).\tag{5.8}$$

但是对任何$t>0$, $x\in\mathbf{R}$,恒有

$$1-\mathrm{e}^{-tx^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}}(1-\cos\xi x)\mathrm{e}^{-\xi^2/2t}\mathrm{d}\xi,\tag{5.9}$$

由(5.8)、(5.9)并用Fubini定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}-\{0\}}&(1-\mathrm{e}^{-tx^2/2})\Pi(\mathrm{d}x)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\xi^2/2t}\mathrm{Re}(\psi(\xi))\,\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\sup\{\mathrm{Re}(\psi(\xi)):\xi\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

在(5.10)中令 $t\to\infty$ 得知 Lévy 测度 Π 是有限的(因 ψ 有界). 总之

$$\psi(u)=\int_{\mathbf{R}}(1-e^{ixu})\mu(dx)\cdot\Pi(\mathbf{R}),\qquad(5.11)$$

其中 μ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 概率测度,由(5.11)及命题1.2中(1.13)知 X 是强度为 $\Pi(\mathbf{R})$ 的复合 Poisson 过程.

定义 5.1 称取值于$[0,\infty)$的轨道单增的 Lévy 过程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 为**从属过程**(Subordinator). 既是从属过程又是 Stable 过程的 Lévy 过程称为**稳定从属过程**(Stable Subordinator).

命题 5.2 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是 Subordinator, $\psi(u)$ 是其特征函数的指数,则

(1) X 是有界变差的;

(2) 其 Lévy 测度 Π 的支撑含于$[0,\infty)$,且

$$\int_{[0,\infty)}(1\wedge x)\Pi(dx)<\infty;\qquad(5.12)$$

(3) $\psi(u)$ 可表示为

$$\psi(u)=-iuD+\int_{[0,\infty)}(1-e^{ixu})\Pi(dx)\quad(u\in\mathbf{R}).\qquad(5.13)$$

证 由 X 取值于$[0,\infty)$且轨道单增立即可得命题 5.2.

$\psi(u)$ 和 $e^{-t\psi(u)}=\boldsymbol{E}(e^{iuX_t})$都是由实空间到复平面的映射. 把它们解析开拓到上半复平面上去. 于是我们可令

$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\psi(iu)\\&=uD+\int_{[0,\infty)}(1-e^{-xu})\Pi(dx)\quad(u\geqslant 0).\end{aligned}\qquad(5.14)$$

于是若令 $\overline{\Pi}(t)=\Pi((t,\infty))$,则有

$$\varphi(u)=uD+u\int_0^\infty e^{-tu}\overline{\Pi}(t)dt\quad(u>0),\qquad(5.15)$$

$$\boldsymbol{E}(e^{-uX_t})=e^{-t\varphi(u)}\quad(t\geqslant 0,\ u>0),\qquad(5.16)$$

作为一般 Lévy 过程的特例的 Subordinator $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 的概率规律,可以用由 Lévy-Khintchine 公式表述的形如(5.13)的特征

函数的指数 $\psi(u)$ 来刻画. 经过上面的讨论, X 的概率规律亦可用由 Lévy-Khintchine 公式的另一种表述的形如(5.15)的 Laplace 指数 $\varphi(u)$ 来刻画.

定义 5.2 对 Subordinator $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 来说,(5.15)中的 $\overline{\Pi}(t)\triangleq \Pi((t,\infty))$ 称为 X 的 **Lévy 测度 Π 的尾**, $\varphi(u)$ 称为 X 的 **Laplace 指数**, 公式(5.15)称为 X 的 **Lévy-Khintchine 公式的 Laplace 形式**.

对 Subordinator 来说,我们常用 Laplace 指数 $\varphi(u)$ 来替代特征函数指数 $\psi(u)$,常用 Lévy-Khintchine 的 Laplace 形式来替代以前的 Lévy-Khintchine 公式.

例 5.1 Poisson 过程 X 是 Subordinator. 其 Laplace 指数为

$$\varphi(u)=\lambda(1-e^{-u}),\quad \lambda \text{ 是 } X \text{ 的强度}.$$

例 5.2 Stable Subordinator X (作为特殊的 Stable 过程,它的指数 α 必然属于$(0,1]$, 因为 Subordinator 要满足(5.12)式)的 Laplace 指数为

$$\varphi(u)=u^{\alpha}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}(1-e^{ux})x^{-1-\alpha}dx, \tag{5.17}$$

$\alpha\in(0,1]$ 是 X 作为 Stable 过程的阶, $\Gamma(\cdot)$ 是通常的 Γ 函数.

$\alpha=1$ 的场合是退化情形,此时 $X_t\equiv t$ (因为此时 $E(e^{uX_t})=e^{t\psi(iu)}=e^{t\varphi(u)}=e^{tu}$),所以一般不予讨论,只讨论 $\alpha\in(0,1)$ 的场合.

下面我们再介绍一些有关 Subordinator 穿越水平线的分布及其轨道的增长速度. 这些结果仅加以介绍,不予证明. 有兴趣的读者请参阅[2]第三章 §2, §3, §4.

定义 5.3 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是一个 Subordinator, $x\geqslant 0$,称

$$T(x)\triangleq T_{(x,\infty)}\triangleq \inf\{t\geqslant 0:X_t>x\}$$

为 X **上穿水平线 x 的首时**.

定义 5.4 称由$(0,\infty)$到$(0,\infty)$的 Borel 可测函数 f 在 $0+$ (相应地在 ∞)是**慢变化的**,如果对任何 $\lambda>0$,有

$$\lim_{x\downarrow 0}(f(\lambda x)/f(x)) = 1 \quad (\text{相应地}\lim_{x\uparrow\infty}(f(\lambda x)/f(x)) = 1).$$

可证：f 在 $0+$ 是慢变化的充要条件是存在两个由 $(0,\infty)$ 到 $\mathbf{R}$ 的有界可测函数 g_1 和 g_2，使

$$f(x) = \exp\left\{g_1(x) + \int_1^x \frac{g_2(y)}{y}\mathrm{d}y\right\},$$

$$\lim_{x\uparrow 0} g_1(x) = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x\uparrow 0} g_2(x) = 0.$$

f 在 ∞ 是慢变化的充要条件也与上面类似，只是把极限 $x\uparrow 0$ 换为 $x\to\infty$.

称由 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的 Borel 可测函数 f 在 $0+$ (相应地在 ∞) 是**正则变化的**，如果对任何 $\lambda>0$，有

$$\lim_{x\downarrow 0}(f(\lambda x)/f(x)) = c \in (0,\infty)$$

(相应地，$\lim_{x\to\infty}(f(\lambda x)/f(x)) = c \in (0,\infty)$).

可证：如果 f 在 $0+$ (相应地在 ∞) 是正则变化的，则存在实数 α，使对任何 $\lambda>0$，有

$$\lim_{x\downarrow 0}(f(\lambda x)/f(x)) = \lambda^\alpha$$

(相应地，$\lim_{x\to\infty}(f(\lambda x)/f(x)) = \lambda^\alpha$).

这时称 f 在 $0+$ 是 **α 阶正则变化的**(相应地，在 ∞ 是 α 阶正则变化的).

命题 5.3 对任何 Subordinator $X=\{X_t: t\geqslant 0\}$ 来说，恒有 $\lim_{t\to\infty}X_t=\infty$ [a.e.]，从而 X 是暂留的.(当然要假定 X 的漂移系数 D 与 Lévy 测度 Π 不同时为 0，如果 $D=0=\Pi$，则 $X_t\equiv 0$，这是无意义的退化情形.)

证 当 D 与 Π 不同时为 0 时，由(5.15)知 X 的 Laplace 指数 $\varphi(u)>0$ ($\forall u>0$). 再用(5.16)知

$$0 = \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t\varphi(u)} = \boldsymbol{E}(\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-uX_t}).$$

所以 $\lim_{t\to\infty}X_t=\infty$, [a.e.]. 再用暂留的定义即知 X 是暂留的.

命题 5.4 设 Subordinator $X=\{X_t: t\geqslant 0\}$ 的漂移系数 D 与

Lévy 测度 Π 不同时为 0，$\overline{\Pi}$ 是尾，即 $\overline{\Pi}(t)=\Pi((t,\infty))$，$I(x)=\int_0^x \overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t$，$\varphi$ 是 X 的 Laplace 指数，则

(1) $\boldsymbol{E}(T(x))\approx 1/\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$；

(2) $\varphi(x)/x\approx I\left(\frac{1}{x}\right)+D$，

此处 $T(x)$ 是定义 5.3 中所定义的 X 上穿水平线 x 的首时.

命题 5.5 设 Subordinator X 的漂移系数 $D=0$，Lévy 测度 $\Pi\neq 0$，则对任何 $x>0$，都有

$$P(X_{T(x)}>x)=1. \tag{5.18}$$

命题 5.6 设 Subordinator X 的漂移系数 $D>0$，则存在函数 $u:[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$，连续且 $u(0+)=\frac{1}{D}$，使

$$P(X_{T(x)}=x)=D\cdot u(x)\quad(\forall x>0). \tag{5.19}$$

命题 5.7 设 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是任一 Subordinator，其 Laplace 指数为 φ，则下列诸陈述等价：

(1) 当 $x\to\infty$（相应地 $x\to 0+$）时，$x^{-1}X_{T(x)-}$ 依分布收敛；

(2) 当 $x\to\infty$（相应地 $x\to 0+$）时，$x^{-1}\boldsymbol{E}(X_{T(x)-})$ 收敛于 $\alpha\in[0,1]$；

(3) φ 在 $0+$（相应地在 ∞）是 $\alpha(\in[0,1])$ 阶正则变化的.

当上面三条中任一条成立（从而三条皆成立）时，(1) 中的极限分布 F 根据 α 确定如下：

$$F(A)=\begin{cases}\delta_0(A), & \text{当 } \alpha=0,\\ \delta_1(A), & \text{当 } \alpha=1,\\ \displaystyle\int_A \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{d}s, & \text{当 } \alpha\in(0,1)\end{cases}$$

$(A\in\mathscr{B}([0,1]))$，$\delta_x(A)=0$ 或 1 由 $x\overline{\in}A$ 或 $x\in A$ 而定），

$$F([0,\infty)-[0,1])=0\quad(\forall\alpha\in[0,1]).$$

第六章　可数状态的马尔可夫链

马尔可夫过程，是随机过程中历史最悠久且充满活力的一类随机过程.自 20 世纪初俄罗斯数学家 A. A. Марков 等人开始研究马尔可夫过程以来，可以说久盛不衰.它有极为深厚的理论基础，如拓扑学、函数论、泛函分析、近世代数和几何学；又有广泛的应用空间，如近代物理、随机分形、公用事业中的服务系统、电子信息、计算技术等等.

马尔可夫过程 $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 根据其状态空间 $(E, \mathscr{E})$、时间域 $\mathbf{T}$ 及其概率特性来分类，有各种类型的马尔可夫过程.本章作为马尔可夫过程论的开始，仅研究一类最简单的马尔可夫过程——可数状态的马尔可夫链，亦即其状态空间 E 是可数集，时间域为 $\mathbf{T} = \{0,1,2,\cdots\}$.

§1　定义及基本概念

定义 1.1　设 E 是一个可数集，定义在 $E \times E$ 上的非负实值的矩阵 $P = (p_{i,j},\ i,j \in E)$ 称为**转移矩阵**，简称**转移阵**，如果 P 满足：

(1)　$p_{i,j} \geqslant 0 \quad (i,j \in E)$；

(2)　$\sum\limits_{j \in E} p_{i,j} = 1 \quad (\forall\, i \in E)$.

设 E 是可数集，$\mathbf{T} = \{0,1,2,\cdots\}$.定义乘积空间 $\Omega^* = E^{\mathbf{T}} \triangleq \bigtimes\limits_{t \in \mathbf{T}} E_t$，$E_t = E\ (\forall\, t \in \mathbf{T})$．$\Omega^*$ 中的元素用 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \cdots)$ 表示.任取 $A \subset E$，$n \in \mathbf{T}$，记

$$\begin{bmatrix} n \\ A \end{bmatrix} = \{\omega \in \Omega^* : \omega(n) \in A\}, \tag{1.1}$$

特别地,若 A 是单点集$\{j\}$,则记

$$\begin{bmatrix} n \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

若 $A_k \subset E \ (k = 1,\cdots,n)$, $i_k \in \mathbf{T} \ (k = 1,\cdots,n)$,则记

$$\bigcap_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i_k \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1, & \cdots, & i_n \\ A_1, & \cdots, & A_n \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

定义一族由 Ω^* 到 Ω^* 的推移算子$\{\theta_n : n \in \mathbf{T}\}$ 如下:

$$\theta_n(\omega)(m) = \omega(n+m) \quad (\omega \in \Omega^*, \ m,n \in \mathbf{T}). \tag{1.4}$$

令

$$\mathscr{F}^* = \sigma\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} : n \in \mathbf{T}, \ j \in E\right) \tag{1.5}$$

是$\left\{\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} : n \in \mathbf{T}, \ j \in E\right\}$所产生的$\sigma$ 代数. 定义

$$P^i\left(\begin{bmatrix} 0, & 1, & \cdots, & n \\ i_0, & i_1, & \cdots, & i_n \end{bmatrix}\right) = \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}, \tag{1.6}$$

则由第四章定理3.2, P^i 可以唯一地扩张到σ 代数$\mathscr{F}^*$ 上去而得一个概率空间$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$ $(i \in E)$,称之为由 P 导出的马尔可夫(或 P 链的)概率空间.

命题1.1　在定义 1.1 的条件下,恒有:

(1)　$\theta_n^{-1}\begin{bmatrix} m \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ A \end{bmatrix}$ $(\forall A \subset E, \ m,n \in \mathbf{T})$;

(2)　$\theta_n^{-1}\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}^*$ $(\forall n \in \mathbf{T})$,即是 θ_n 是由$(\Omega^*, \mathscr{F}^*)$ 到$(\Omega^*, \mathscr{F}^*)$ 的可测映射$(n \in \mathbf{T})$;

(3)　若记

$$\begin{aligned} {(i_1,\cdots,i_n) \atop A} &= \begin{bmatrix} (i_1,\cdots,i_n) \\ A \end{bmatrix} \\ &= \{\omega \in \Omega^* : (\omega(i_1),\cdots,\omega(i_n)) \in A\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$(i_k \in \mathbf{T}, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \ A \in E^n, \ n \geqslant 1)$,

$$P^i(A \cap B) = P^i(A, B), \tag{1.8}$$

则

$$P^i\left(\begin{matrix}(0,1,\cdots,n-1) \\ A\end{matrix}, \begin{matrix}n \\ j\end{matrix}, \theta_{n+1}^{-1}(B)\right)$$

$$= P^i\left(\begin{matrix}(0,1,\cdots,n-1) \\ A\end{matrix}, \begin{matrix}n \\ j\end{matrix}\right) P^j(\theta_1^{-1}(B)) \tag{1.9}$$

$(i \in E,\ n \geqslant 1,\ A \subset E^n,\ B \in \mathscr{F}^*,\ j \in E)$.

证 由定义 1.1,直接计算即可得命题 1.1.

方程式(1.9)称为**马尔可夫性**.

定义 1.2 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是任一概率空间,E 为可数集,$\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \cdots\}$为时间参数集,$\{X_n : n \in \mathbf{T}\}$是一族定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上取值于 E 的随机变量(即是对任何 $n \in \boldsymbol{T}$, $j \in E$,有$\{X_n = j\} \in \mathscr{F}$),如果对任意的 $n \geqslant 2$, $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$,及任意 $i_1, \cdots, i_n \in E$,均有

$$P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

$$= P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \tag{1.10}$$

(当(1.10)左边有意义时),则称$\{X_n : n \in \mathbf{T}\}$是一个**离散时间可数状态的马尔可夫过程**,简称**可数状态的马尔可夫链**. E 称为其状态空间. 如果存在一个转移阵 $P = (p_{i,j},\ i,\ j \in E)$,使

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{i,j} \quad (i, j \in E),$$

(当左边有意义时),则称$\{X_n : n \in \mathbf{T}\}$是**具有时齐的转移概率的可数状态的马尔可夫链**,简称**可数状态的时齐的马尔可夫链**. 本章所研究的,都是这类马尔可夫链. P 称为$\{X_n : n \in \mathbf{T}\}$的转移阵,$\{P(X_0 = i) : i \in E\}$称为其初始分布.

容易证明:(1.10)等价于下述两条件中任何一条:

(1) $P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})$

$$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \tag{1.11}$$

$(n \geqslant 1,\ i_0, i_1, \cdots, i_n \in E)$.

(2) $P(X_{t_\nu}=i_\nu,\ n\leqslant\nu\leqslant n+m \mid X_{t_\nu}=i_\nu,\ 0\leqslant\nu<n)$

$$=P(X_{t_\nu}=i_\nu,\ n\leqslant\nu\leqslant n+m \mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \tag{1.12}$$

$(n\geqslant 1,\ 0\leqslant t_0\leqslant t_1<\cdots<t_{n+m},\ t_i\in\mathbf{T},\ i_0,i_1,\cdots,i_{n+m}\in E)$.

定理1.1 （存在性定理） 设E为可数集,$\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots\}$, $P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是转移阵,$\{\mu_i:i\in E\}$是一个概率分布(即$\mu_i\geqslant 0,\sum_{i\in E}\mu_i=1$),则存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的以$E$为状态空间的以$\{\mu_i:i\in E\}$为初始分布的以$P$为转移阵的时齐的马尔可夫链$\{X_n:n\geqslant 0\}$.

证 用第四章定理3.2立即可证得此定理成立.

定义1.3 设$\mathbf{T},E,P,(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^i)$ $(i\in E)$如定义1.1.

(1) n步转移概率$p_{i,j}^{(n)}$及n步转移阵$P^{(n)}$为

$$p_{i,j}^{(n)}\triangleq P^i\left(\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}\right)\quad(n\geqslant 0,\ i,j\in E); \tag{1.13}$$

$$P^{(n)}\triangleq(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)\quad(n\geqslant 0). \tag{1.14}$$

(2) 由i出发n步后初达j的概率$f_{i,j}^{(n)}$为

$$f_{i,j}^{(n)}\triangleq P^i\left(\begin{bmatrix}1, & \cdots, & n-1, & n\\ j^c, & \cdots, & j^c, & j\end{bmatrix}\right), \tag{1.15}$$

其中$j^c=E-\{j\},\ i,j\in E,\ n\geqslant 1$.

(3) 由i出发经有限步达j的概率$f_{i,j}^*$为

$$f_{i,j}^*\triangleq P^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}\quad(i,j\in E). \tag{1.16}$$

(4) 初达时间$T_j(\omega)$为

$$T_j(\omega)\triangleq\begin{cases}1, & 若\ \omega\in\begin{bmatrix}1\\ j\end{bmatrix},\\ n, & 若\ \omega\in\begin{bmatrix}1, & 2, & \cdots, & n-1, & n\\ j^c, & j^c, & \cdots, & j^c, & j\end{bmatrix}\quad(n>1),\\ \infty, & 若\ \omega\in\begin{bmatrix}1, & 2, & \cdots\\ j^c, & j^c, & \cdots\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{1.17}$$

(5)　平均再现时间 $m_{i,i}$ 为

$$m_{i,i} \triangleq \begin{cases} \infty, & 若\ f_{i,i}^{*} < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)}, & 若\ f_{i,i}^{*} = 1. \end{cases} (i \in E) \tag{1.18}$$

(6)　无穷次返回 j 的概率 $g_{i,j}$ 为

$$g_{i,j} \triangleq p^{i}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) \quad (i,j \in E). \tag{1.19}$$

(7)　$$P_{i,j}(\lambda) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} \lambda^{n} (i,j \in E, |\lambda| < 1). \tag{1.20}$$

(8)　$$F_{i,j}(\lambda) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} \lambda^{n} (i,j \in E, |\lambda| < 1). \tag{1.21}$$

下面我们研究 P 链的概率空间 $(\Omega^{*}, \mathscr{F}^{*}, P^{i})$ $(i \in E)$ 的上述诸特征量的关系.

命题 1.2　(1)　$g_{i,j} = f_{i,j}^{*} g_{j,j} \quad (i,j \in E)$;

(2)　$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(n-m)} \quad (i,j \in E, n \geqslant 1)$;

(3)　$P_{i,j}(\lambda) = \delta_{i,j} + F_{i,j}(\lambda) P_{j,j}(\lambda) \quad (|\lambda| < 1)$,

$$P_{j,j}(\lambda) = \frac{1}{1 - F_{j,j}(\lambda)} \quad (|\lambda| < 1) \quad (i,j \in E).$$

证　用上述诸量之定义并用 (1.9), 直接计算即可证命题 1.2.

命题 1.3　(1)　$f_{i,j}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} = F_{i,j}(1) = \lim_{\lambda \to 1-} F_{i,j}(\lambda)$;

(2)　$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{\lambda \to 1-} P_{i,j}(\lambda)$;

(3)　$\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{j,j}^{*}}$　(约定 $\frac{1}{0} = \infty$);

(4)　$$m_{j,j} = \begin{cases} \infty, & 当\ f_{j,j}^{*} < 1, \\ F_{j,j}'(1), & 若\ f_{j,j}^{*} = 1. \end{cases}$$

证　用定义,直接计算可证命题 1.3.

命题 1.4　若 $g_{i,i}=1,\ f_{i,j}^{*}>0$,则 $g_{i,j}=1$.

证　因为

$$
\begin{aligned}
g_{i,j} &= P^{i}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) \\
&\geqslant P^{i}\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) \\
&= P^{i}\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix}\right)-P^{i}\left(\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right) \\
&= g_{i,i}-\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

而 $s>m>0$ 时,用(1.9)有

$$
\begin{aligned}
&P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right) \\
&\leqslant \sum_{t=s}^{\infty}P^{i}\left\{\begin{bmatrix} m, & \cdots, & s-1, & s, & \cdots, & t-1, & t \\ j^{c}, & \cdots, & j^{c}, & i^{c}, & \cdots, & i^{c}, & i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=t+1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right\} \\
&\overset{(1.9)}{=\!=}\ \sum_{t=s}^{\infty}P^{i}\left\{\begin{bmatrix} m, & \cdots, & s-1, & s, & \cdots, & t-1, & t \\ j^{c}, & \cdots, & j^{c}, & i^{c}, & \cdots, & i^{c}, & i \end{bmatrix}\right\}(1-f_{i,j}^{*}) \\
&\leqslant P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{s-1}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right)(1-f_{i,j}^{*}).
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

在(1.23)中先令 $s\to\infty$,再令 $m\to\infty$ 得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right) \\
&\qquad\leqslant (1-f_{i,j}^{*})\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}P^{i}\left(\bigcup_{t=s}^{\infty}\begin{bmatrix} t \\ i \end{bmatrix},\ \bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j^{c} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

由(1.22)和(1.24)及 $(1-f_{i,j}^{*})<1$,可得 $g_{i,j}=g_{i,i}=1$.

引理 1.1　设 $\{a_n: n\geqslant 0\}$ 是非负实数序列,且非全零,再设实数序列 $\{b_n: n\geqslant 0\}$ 有极限 b (b 可以是 $\pm\infty$). 若

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu}=0,
\tag{1.25}
$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu}=\lim_{n\to\infty}b_n=b. \tag{1.26}$$

证 由引理假设总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=n-N+1}^{n}a_\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu}=0\quad(对任意 N>1). \tag{1.27}$$

充分利用(1.27) 分 b 为有限或无穷两种场合,直接计算可证(1.26) 成立.

附注 1.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$,或$\{a_n\}$有界且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\infty$,则(1.25) 必成立.

命题 1.5 对任何 $i,j\in E$,总有:

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}p_{i,j}^{(k)}\Big/\sum_{k=0}^{n}p_{j,j}^{(k)}\right)=f_{i,j}^{*}; \tag{1.28}$$

(2) $$g_{i,j}=f_{i,j}^{*}\lim_{n\to\infty}(f_{j,j}^{*})^{n}, \tag{1.29}$$

从而 $g_{i,j}$ 非 0 即为 $f_{i,j}^{*}$, $g_{j,j}$ 非 0 即 1,且

$$“g_{j,j}=1\Longleftrightarrow f_{j,j}^{*}=1”; \tag{1.30}$$

(3) $$f_{i,j}^{*}=p_{i,j}+\sum_{k\neq j}p_{i,k}f_{k,j}^{*}.$$

证 (1) 用命题 1.2 (2) 及引理 1.1 直接计算可证(1).

(2) 令

$$g_{i,j}(m)=P^{i}\left(\bigcup_{1\leqslant n_1<\cdots<n_m}\bigcap_{s=1}^{m}\begin{bmatrix}n_s\\ j\end{bmatrix}\right)\quad(m\geqslant 1), \tag{1.31}$$

则由(1.9) 有

$$g_{i,j}(m+1)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{i,j}^{(k)}g_{j,j}(m)=f_{i,j}^{*}g_{j,j}(m). \tag{1.32}$$

若注意：$g_{i,j}(1) = f_{i,j}^*$，$\lim\limits_{m\to\infty} g_{i,j}(m) = g_{i,j}$，则对 m 用归纳法可证

$$g_{i,j}(m+1) = f_{i,j}^*(f_{j,j}^*)^n. \tag{1.33}$$

所以 $g_{i,j} = \lim\limits_{m\to\infty} g_{i,j}(m) = f_{i,j}^* \lim\limits_{m\to\infty}(f_{j,j}^*)^m$.

(3) 用(1.9)，直接计算可证(3).

§2 状态的分类及判别准则

令 $\mathbf{T} = \{0,1,2,\cdots\}$，$E$ 为可数集，$P = (p_{i,j}, i,j \in E)$ 为 E 上的转移阵. 称 E 为 P(或者为 P 链)的**状态空间**，称 E 中任一点 i 为 P 之**状态**. 在这一节中将要对 E 进行分类. 由于分类的依据仅仅是 P，所以概率空间和 P 链可以隐而不现，至多只参考 §1 中构造的 P 链的概率空间$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$就够了.

在这一节中，$\mathbf{T}, E, P, (\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$ 总是给定的，并沿用 §1 的符号.

定义 2.1 称状态 i 可达 j(记之为 $i \rightsquigarrow j$)，如果存在正整数 m，使 $p_{i,j}^{(m)} > 0$. 若 $i \rightsquigarrow j, j \rightsquigarrow i$，则称 i,j 互通，记之为 $i \leftrightsquigarrow j$. 如果 $f_{j,j}^* < 1$，则称 j 是**暂留状态**，全体暂留状态用 N 表之. 若 $f_{j,j}^* = 1$，则称 j 是**常返状态**，全体常返状态用 R 表之. 若常返状态 j 满足 $m_{j,j} < \infty$，则称 j 是**正状态**，反之称 j 为**零状态**，全体正状态用 R^+ 表之，全体零状态用 R^0 表之. 于是

$$E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+.$$

命题 2.1 $i \rightsquigarrow j \Longleftrightarrow f_{i,j}^* > 0$; $i \leftrightsquigarrow j \Longleftrightarrow f_{i,j}^* f_{j,i}^* > 0$.

证 由 $\sup\limits_n p_{i,j}^{(n)} \leqslant f_{i,j}^* \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}$ 即得命题.

命题 2.2 $j \in N \Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} < \infty$.

证 由命题 1.3 即得命题 2.2.

命题 2.3 若 $f_{i,i}^* = 1,\ f_{i,j}^* > 0\ (i \neq j)$,则

(1) 存在正整数 m 及正数 c,使

$$p_{j,j}^{(m+n)} \geqslant c p_{i,i}^{(n)} \quad (n \geqslant 0);$$

(2) $f_{i,i}^* = f_{i,j}^* = f_{j,i}^* = f_{j,j}^* = 1$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} = \infty$.

证 (1) 因 $f_{i,j}^* > 0$,故存在 $M \geqslant 1$ 使 $\alpha = p_{i,j}^{(M)} > 0$. 用(1.9)及命题1.5有

$$\begin{aligned}
\alpha &= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}\right) \\
&= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}, \bigcup_{n>M}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\right) + P^i\left(\begin{bmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & i^c, & i^c, & \cdots \end{bmatrix}\right) \\
&= P^i\left(\begin{bmatrix} M \\ j \end{bmatrix}\right) P^j\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\right) + P^i\left(\begin{bmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & i^c, & i^c, & \cdots \end{bmatrix}\right) \\
&\leqslant \alpha f_{j,i}^* + P^i\left(\bigcap_{n=M+1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ i^c \end{bmatrix}\right) \\
&\leqslant \alpha f_{j,i}^* + P^i\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ i^c \end{bmatrix}\right) \\
&= \alpha f_{j,i}^* + (1 - g_{i,i}) = \alpha f_{j,i}^*.
\end{aligned}$$

由 $\alpha > 0,\ 0 \leqslant f_{j,i}^* \leqslant 1$,得 $f_{j,i}^* = 1$. 所以存在 M' 使 $\beta = p_{j,i}^{(M')} > 0$. 于是 $p_{j,j}^{(M'+n+M)} \geqslant p_{j,i}^{(M')} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(M)} = \alpha\beta p_{i,i}^{(n)}$. 故取 $m = M + M'$, $c = \alpha\beta$ 即为所求. (1) 得证.

(2) 因为 $f_{i,i}^* = 1$,所以 $i \in R$,由命题2.2知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$,再用(1)得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} = \infty$,从而 $j \in R$,故 $f_{j,j}^* = 1$. 总之我们由 $f_{i,i}^* = 1,\ f_{i,j}^* > 0$ 推出了 $f_{j,j}^* = 1,\ f_{j,i}^* = 1$. 当然由 $f_{j,j}^* = 1,\ f_{j,i}^* = 1$ 亦可推出 $f_{i,j}^* = 1,\ f_{i,i}^* = 1$. (2) 证毕. 由命题2.2及1.5得(3).

定义 2.2 设 $Q = (q_{i,j},\ i, j \in E)$ 是 E 上之矩阵, $E_1 \subset E$,

称 $Q_1 = (q_{i,j}, i,j \in E_1)$ 为 $\boldsymbol{Q}$ **on** $\boldsymbol{E}_1$.(对于行(列)向量,亦有类似定义.)

定理 2.1 $E = N \cup R = N \cup (R^0 \cup R^+)$, P 有如下形式:

	N	R^0	R^+
N	Q	Q_0	Q_+
R^0	0	P_0	0
R^+	0	0	P_+

即是 P on $R^0 = P_0$, P on $R^+ = P_+$, P on $N = Q$, $Q_0 = (p_{i,j}, i \in N, j \in R^0)$, $Q_+ = (p_{i,j}, i \in N, j \in R^+)$, $p_{i,j} = 0\ (i \in R^0, j \overline{\in} R^0)$, $p_{i,j} = 0\ (i \in R^+, j \overline{\in} R^+)$. P_0, P_+ 分别为定义在 R^0, R^+ 上之转移阵.

证 (1) 若 $i \in R$,即 $f^*_{i,i} = 1$.若 $f^*_{i,j} > 0$,则由命题2.3有 $f^*_{i,j} = 1$,即 $j \in R$.这就证明了:

$$i \in R,\ j \in N \Longrightarrow f^*_{i,j} = 0 \Longrightarrow p_{i,j} = 0.$$

(2) 若 $i \in R^+$ (从而 $f^*_{i,i} = 1$, $m_{i,i} < \infty$), $f^*_{i,j} > 0$,则由命题 2.3 知:$f^*_{j,j} = f^*_{j,i} = f^*_{i,j} = 1$,且存在正整数 m 及正数 c,使

$$p^{(n+m)}_{j,j} \geqslant c p^{(n)}_{i,i} \quad (\text{一切 } n \geqslant 0).$$

再用命题 1.2 及 1.3 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_{j,j}} &= (F'_{j,j}(1))^{-1} = \lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)P_{j,j}(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{j,j}\lambda^n \\ &\geqslant \lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)c\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{i,i}\lambda^{n+m} = \frac{c}{m_{i,i}} > 0,\end{aligned}$$

所以 $j \in R^+$.这就证明了:

$$i \in R^+,\ j \overline{\in} R^+ \Longrightarrow f^*_{i,j} = 0 \Longrightarrow p_{i,j} = 0.$$

(3) 若 $i \in R^0$, $f^*_{i,j} > 0$,则由命题 2.3 (1) 有 $f^*_{j,i} = 1$.假设 $j \in R^+$,则由(2) 知 $i \in R^+$,矛盾,所以这就证明了:

$$i \in R^0,\ j \in R^+ \Longrightarrow f^*_{i,j} = 0 \Longrightarrow p_{i,j} = 0.$$

综合以上三步,定理2.1得证.

下面我们对 R^0(R^+ 亦类似)再分类.如定义2.1,对于任何 $i,j \in R^0$,"$i \sim j \Longleftrightarrow f^*_{i,j}f^*_{i,j} > 0$".显然关系"$\sim$"定义在 R^0 上是一等价关系,即具有(i)自返性($i \in R^0 \Longrightarrow i \sim i$);(ii)对称性($i,j \in R^0,\ i \sim j \Longrightarrow j \sim i$);(iii)传递性($i,j,k \in R^0,\ i \sim j,\ j \sim k \Longrightarrow i \sim k$).所以按关系$\sim$可以把 R^0 分成一些互不相交的等价类:

$$R^0 = R^0_1 + R^0_2 + \cdots.$$

由命题2.3得知若 $i,j \in R^0_n$,则 $f^*_{i,j} = 1$,若 $i \in R^0_m,\ j \in R^0_n$,$m \neq n$,则 $f^*_{i,j} = 0$.由此,我们得到:

定理 2.2 $E = N \cup R = N \cup (R^0 \cup R^+)$
$= N \cup (\bigcup\limits_m R^0_m) \cup (\bigcup\limits_n R^+_n)$,

P 具有下述形状:

	N	R^0_1	R^0_2	$\cdots$	R^+_1	R^+_2	$\cdots$
N	0	$Q_{0,1}$	$Q_{0,2}$	$\cdots$	$Q_{+,1}$	$Q_{+,2}$	$\cdots$
R^0_1	0	$P_{0,1}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$
R^0_2	0	0	$P_{0,2}$	$\cdots$	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
R^+_1	0	0	0	$\cdots$	$P_{+,1}$	0	$\cdots$
R^+_2	0	0	0	$\cdots$	0	$P_{+,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	

即是 P on $R^0_m = P_{0,m}$,P on $R^+_n = P_{+,n}$,P on $N = Q$,$Q_{0,m} = (p_{i,j},\ i \in N,\ j \in R^0_m)$,$Q_{+,n} = (p_{i,j},\ i \in N, j \in R^+_n)$,$p_{i,j} = 0\ (i \in R^0_m,\ j \overline{\in} R^0_m)$,$p_{i,j} = 0\ (i \in R^+_n,\ j \overline{\in} R^+_n)$,$P_{0,m}, P_{+,n}$ 分别为 R^0_m, R^+_n 上之转移阵.每一个 R^0_m(R^+_n)都称为一个"零类"(正类).零类和正类统称为常返类.N 中每一状态自成一个类.

定义 2.3　称 E 的非空子集 J 是**封闭的**，如果 $i \in J$，$j \overline{\in} J \Longrightarrow p_{i,j} = 0$（即 $i \in J \Longrightarrow \sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$）.

定义 2.4　对任何 $J \subset E$，记 $f_{i,J}^{(n)} = p^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & n-1, & n \\ J^c, & \cdots, & J^c, & J \end{bmatrix}\right)$，

$f_{i,J}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,J}^{(n)} = p^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right)$，$p_{i,J}^{(n)} = p^i\left(\begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right) = \sum_{j \in J} p_{i,j}^{(n)}$，

$\hat{J} = \{i : i \in E,\ f_{i,J}^* = 0\}$.

命题 2.4　设 J 和 $\hat{J}$ 都是 E 的非空子集，则（ⅰ）$\hat{J}$ 封闭；（ⅱ）$\hat{J} \cap J^c$ 亦封闭.

证　（ⅰ）设 $i \in \hat{J}$，$j \overline{\in} \hat{J}$，则 $p_{i,j} f_{j,J}^* \leqslant f_{i,J}^* = 0$，$f_{j,J}^* > 0$，所以 $p_{i,j} = 0$，此即 $\hat{J}$ 封闭.

（ⅱ）取 $i \in \hat{J}$.（a）若 $j \overline{\in} \hat{J}$，则由（ⅰ），$p_{i,j} = 0$.（b）若 $j \in J$，则 $p_{i,j} \leqslant f_{i,J}^* = 0$. 综合(a)、(b)可知：

$$\sum_{j \in \hat{J} \cap \bar{J}} p_{i,j} = 1.$$

故 $\hat{J} \cap J^c$ 封闭.

命题 2.5　对任何 $i \in E$，$\{j : j \in E,\ f_{i,j}^* > 0\}$ 封闭.

证　设 $k \in \{j : j \in E,\ f_{i,j}^* > 0\}$，$l \overline{\in} \{j : j \in E,\ f_{i,j}^* > 0\}$，则 $f_{i,l}^* = 0$；$f_{i,k}^* > 0$，从而 $f_{k,l}^* = 0$，故 $p_{k,l} = 0$.

定义 2.5　称 E 是可约的（或 P 是可约的），若 E 有封闭的真子集 J，反之称 E 是不可约的.

命题 2.6　E 不可约的充要条件是 $f_{i,j}^* > 0$ $(i, j \in E)$.

证　充分性显然，必要性只需注意：若 $f_{i_0,j_0}^* = 0$，则 $\{j : j \in E,\ f_{i_0,j}^* > 0\}$ 是 E 的封闭真子集.

系 1　若存在 $i_0 \in E$，使 $f_{i_0,j}^* f_{j,i_0}^* > 0$ $(j \in E)$，则 E 是不可

约的.

定义 2.6 设 $i \in E$, $i \sim i$,称 $\{n: p_{i,i}^{(n)} > 0,\ n \geqslant 1\}$ 的最大公因子 G.C.D. $\{n: p_{i,i}^{(n)} > 0,\ n \geqslant 1\}$ 为 i 之周期,记之为 d_i.

命题 2.7 若 $f_{j,i}^* > 0$, $f_{i,j}^* > 0$,则 $d_i = d_j$.

证 由假设有 $i \sim i$, $j \sim j$, $i \sim j$,所以 d_i, d_j 均有定义且存在正整数 s 和 t 使 $p_{i,j}^{(s)} p_{j,i}^{(t)} > 0$. 于是: $p_{j,j}^{(n)} > 0 \Longrightarrow p_{i,i}^{(s+n+t)} \geqslant p_{i,j}^{(s)} p_{j,j}^{(n)} p_{j,i}^{(t)} > 0 \Longrightarrow d_i$ 能整除$(s+n+t)$. 但由 $p_{j,j}^{(n)} > 0$ 可推出 $p_{j,j}^{(2n)} > 0$,故又有 $p_{j,j}^{(i)} > 0 \Longrightarrow d_i$ 能整除$(s+2n+t)$. 总之有

$$p_{j,j}^{(n)} > 0 \Longrightarrow d_i \text{ 能整除 } n.$$

所以 d_i 能整除 d_j,由 d_i, d_j 地位之对称性得 $d_i = d_j$.

命题说明 $i \in N$, $f_{i,i}^* > 0 \Longrightarrow d_i$ 有定义;$i, j \in R_n^+ (R_m^0)$ $\Longrightarrow d_i, d_j$ 有定义且相等.

下面再把每一个 R_m^0(或 R_n^+)分成循环子类.

由命题 2.7 知:任取 $i \in R_m^0$, d_i 有定义,且不依赖 $i \in R_m^0$. 故可定义 d_i 为类R_m^0 之周期,用 $d^0(m)$ 表示,以说明它仅与 R_m^0 有关而与 $i \in R_m^0$ 无关. 若 $d^0(m) = 1$,则说 R_m^0 无周期.

命题 2.8 设 $f_{i,j}^* f_{j,i}^* > 0$. 则

(i) $p_{i,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n)} > 0 \Longrightarrow d_i \mid (m+n)$ ($d \mid k$ 表d 能整除k);

(ii) $p_{i,j}^{(n_1)} p_{i,j}^{(n_2)} > 0 \Longrightarrow d_i \mid (n_1 - n_2)$;

(iii) 存在 $M(i)$,使 $p_{i,i}^{(md_i)} > 0$ $(m \geqslant M(i))$;

(iv) 存在 r_j,使 $p_{i,j}^{(n)} > 0 \Longrightarrow n = r_j \pmod{d_i}$;

(v) 存在 $K(i)$,使 $n \geqslant K(i) \Longrightarrow p_{i,j}^{(nd_i + r_j)} > 0$.

证 (i) $p_{i,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n)} > 0 \Longrightarrow p_{i,i}^{(m+n)} > 0 \Longrightarrow d_i \mid (m+n)$.

(ii) 由 $f_{j,i}^* > 0$ 知:存在 $\nu \geqslant 1$ 使 $p_{j,i}^{(\nu)} > 0$. 所以由 $p_{i,j}^{(n_1)} p_{i,j}^{(n_2)} > 0$ 得 $p_{i,j}^{(n_1)} p_{j,i}^{(\nu)} > 0$, $p_{i,j}^{(n_2)} p_{i,j}^{(\nu)} > 0$. 用(i)得 $d_i \mid (n_1 + \nu)$, $d_i \mid (n_2 + \nu)$,从而 $d_i \mid (n_1 - n_2)$.

(iii)　由 d_i 的定义知:存在 $n_1,\cdots,n_k$,使

$$\prod_{s=1}^{k} p_{i,i}^{(n_s)} > 0, \quad d_i = \text{G.C.D.}\{n_1,\cdots,n_k\}.$$

用数论中一条初等定理得知: 存在 $M(i)$, 当 $m \geqslant M(i)$ 时有 $md_i = \sum_{s=1}^{k} c_s n_s$($c_s$ 是正整数). 所以

$$p_{i,i}^{(md_i)} \geqslant \prod_{s=1}^{k} (p_{i,i}^{(n_s)})^{c_s} > 0 \quad (m \geqslant M(i)).$$

(iv)　由(ii)即得(iv).

(v)　由 $f_{i,j}^* > 0$ 及(iv)得知存在 $m'd_i + r_j$,使 $p_{i,j}^{(m'd_i+r_j)} > 0$. 由(iii),取 $K(i) = m' + M(i)$ 即为所求.

定义2.7　设 E 是不可约的,d 为其周期(由命题2.7,E 中任一状态 i 之周期 d_i 不依赖 i,故可以 d_i 为 E(或者 P) 之周期),若 $d > 1$,令 $H_{i,j} = \text{G.C.D.}\{n \mid p_{i,j}^{(n)} > 0,\ n \geqslant 1\}$,若 $d \mid H_{i,j}$,则称 i,j 具有关系 $\approx$,记作 $i \approx j$. 若 $d = 1$,则称 E(或者 P) 是无周期.

命题2.9　定义2.7中确定的关系 $\approx$ 是一个等价关系.

证　(1)　自返性,由 $d = H_{i,i}$ 即得 $i \approx i$.

(2)　对称性,设 $i \approx j$,任取 m,使 $p_{i,j}^{(m)} > 0$,于是 $d \mid m$. 又由命题2.8 (i) 知:若 $p_{j,i}^{(n)} > 0$,则 $d \mid (m+n)$,所以 $d \mid n$,从而 $d \mid H_{j,i}$,即 $j \approx i$.

(3)　传递性,设 $i \approx j,\ j \approx k$,任取 s,t,使 $p_{i,j}^{(s)} > 0,\ p_{j,k}^{(t)} > 0$. 于是 $d \mid s,\ d \mid t$,而由命题2.8 (ii) 知 $p_{i,k}^{(n)} > 0$ (因 $p_{i,k}^{(s+t)} > 0$) $\Longrightarrow n = s + t \pmod d$.

再注意 $d \mid (s+t)$ 得:$p_{i,k}^{(n)} > 0 \Longrightarrow n = 0 \pmod d$. 此即 $i \approx k$.

命题2.10　设 E 不可约,$i \approx j$,则 $d = H_{i,j}$.

证　设 $H_{i,j} = \delta$,任取 t,使 $p_{i,j}^{(t)} > 0$,按命题2.8 (iii) 可取

m_0 使 $p_{j,j}^{(m_0 d)} p_{j,j}^{((m_0+1)d)} > 0$，于是

$$p_{i,j}^{(t+m_0 d)} p_{i,j}^{(t+(m_0+1)d)} > 0,$$

所以 $\delta \mid (t+m_0 d)$，$\delta \mid (t+(m_0+1)d)$，从而 $\delta \mid d$，而 $i \approx j \Longrightarrow d \mid \delta$，所以 $d = \delta$.

命题 2.11 设 E 不可约，则“$p_{i,j_1}^{(m_1)} p_{i,j_2}^{(m_2)} > 0$，

$$m_1 = m_2 \pmod d \Longrightarrow j_1 \approx j_2".$$

证 设 $p_{i,j_1}^{(m_1)} p_{i,j_2}^{(m_2)} > 0$，$m_1 = m_2 \pmod d$，则由命题 2.8 (ⅱ) 知：$p_{j_1,j_2}^{(n)} > 0 \Longrightarrow p_{i,j_2}^{(n+m_1)} > 0 \Longrightarrow m_1 + n = m_2 \pmod d$ $\Longrightarrow n = 0 \pmod d$，故 $j_1 \approx j_2$.

命题 2.12 设 E 不可约，周期为 d，则关系 $\approx$ 恰巧把 E 分为 d 个不交的循环类：$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_d$，$i,j$ 同属于一个循环类 C_r 的充要条件是 $i \approx j$，而且“$i \in C_r$，$j \overline{\in} C_{r+1} \Longrightarrow p_{i,j} = 0$”(从而 $p_{i,j}^{(s)} > 0$，$i \in C_r$，$j \in C_q \Longrightarrow q - r = s \pmod d$).

证 不妨设 $d > 1$，由于 $\approx$ 是一个等价关系，所以可以把 E 分成若干个不交的循环类，使 i,j 同属于一个循环类的充要条件是 $i \approx j$. 故为证命题，只需证明两点：(1) 循环类的个数恰为 d；(2) $i \in C_r$，$j \overline{\in} C_{r+1} \Longrightarrow p_{i,j} = 0$ (注：记 $C_m = C_r$ 当 $1 \leqslant r \leqslant d$，$m = r \pmod d$).

(1) 先证循环类之个数不超过 d，反之，必有状态 $i_0, i_1, \cdots, i_d$，使 i_s 与 i_t 无关系 $\approx$ $(s \neq t,\ 0 \leqslant s,\ t \leqslant d)$，取 $m_1, \cdots, m_d$ 使 $\prod_{k=1}^{d} p_{i_0,i_k}^{(m_k)} > 0$，由命题 2.11 有 $m_s \neq m_t \pmod d$ $(1 \leqslant s, t \leqslant d,\ s \neq t)$，由命题 2.8 (ⅲ) 再取 m_0，使 $p_{i_0,i_0}^{(m_0 d)} > 0$. 用命题 2.11 又有 $m_s \neq m_0 d \pmod d$ $(1 \leqslant s \leqslant d)$，而 d 个正整数 $\{m_s : 1 \leqslant s \leqslant d\}$ 每一个都不能被 d 整除，又互不同余，是不可能的，这就证明了循环类的个数不超过 d.

于是可令 $E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_d$，再证每个 C_r 非空，由命题2.10知：i 与 j 属于同一类 $\Longrightarrow p_{i,j} = 0$，现在各个类中取一非空者，认为这是 C_1，任取 $i_1 \in C_1$，由

$$1 = \sum_{j \in E} p_{i_1,j} = \sum_{j \in \bigcup_{k=2}^{d} C_k} p_{i_1,j}$$

得知存在 $i_2 \in \bigcup_{k=2}^{d} C_k$，使 $p_{i_1,i_2} > 0$，就认为含 i_2 者为 C_2，若 $d = 2$，则终止，设 $d > 2$，由命题2.10知 $p_{i_1,j}^{(2)} = 0\ (j \in C_1)$，又 $p_{i_1,i_2} > 0$，$p_{i_1,j}^{(2)} \geqslant p_{i_1,i_2} p_{i_2,j}$，所以 $p_{i_2,j} = 0\ (j \in C_1)$，而 $p_{i_2,j} = 0\ (j \in C_2)$，故

$$1 = \sum_{j \in E} p_{i_2,j} = \sum_{j \in \bigcup_{k=3}^{d} C_k} p_{i_2,j}$$

因此存在 $i_3 \in \bigcup_{k=3}^{d} C_k$，使 $p_{i_2,i_3} > 0$，就认为含 i_3 者为 C_3，若 $d = 3$ 则终止，若 $d > 3$，再仿上做下去，d 次以后得到 d 个状态 $i_1, \cdots, i_d$，使 $i_k \in C_k (1 \leqslant k \leqslant d)$，且 $\prod_{k=1}^{d=1} p_{i_k,i_{k+1}} > 0$.(1) 证毕.

(2)　再证 $i \in C_r$，$j \overline{\in} C_{r+1} \Longrightarrow p_{i,j} = 0$.

设 $i \in C_\alpha$，$j \in C_\beta$，$p_{i,j} > 0$，推证 $\beta = \alpha + 1 \pmod d$，事实上，不妨令 $\beta \geqslant \alpha$，因 $i \approx i_\alpha$，$j \approx i_\beta$（i_k 是(1)中找出的，故有 $p_{i_k,i_{k+1}} > 0$)，所以存在 m 及 m' 使 $p_{i,i_\alpha}^{(md)} > 0$，$p_{i_\beta,j}^{(m'd)} > 0$，因此，

$$p_{i,j}^{(md+\beta-\alpha+m'd)} \geqslant p_{i,i_\alpha}^{(md)} p_{i_\alpha,i_{\alpha+1}} \cdots p_{i_{\beta-1},i_\beta} p_{i_\beta,j}^{(m'd)} > 0,$$

但又有 $p_{i,j} > 0$，所以由命题2.8(ii)有 $md + \beta - \alpha + m'd = 1 \pmod d$，所以 $\beta = \alpha + 1 \pmod d$.

定理2.3　设 E 不可约，周期为 d，则 E 可分成 d 个互不相交的非空的循环类：$E = \bigcup_{k=1}^{d} C_k$，这时 P 有如下形式($d > 1$ 时)：

	C_1	C_2	C_3	$\cdots$	C_{d-1}	C_d
C_1	0	$\widehat{P}_1$	0	$\cdots$	0	0
C_2	0	0	$\widehat{P}_2$	$\cdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
C_{d-1}	0	0	0	$\cdots$	0	$\widehat{P}_{d-1}$
C_d	$\widehat{P}_d$	0	0	$\cdots$	0	0

$P^{(d)}=\widetilde{P}=(\widetilde{p}_{i,j},\ i,j\in E)$有如下形式

	C_1	C_2	C_3	$\cdots$	C_d
C_1	$\widetilde{P}_1$	0	0	$\cdots$	0
C_2	0	$\widetilde{P}_2$	0	$\cdots$	0
C_3	0	0	$\widetilde{P}_3$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
C_d	0	0	0	$\cdots$	$\widetilde{P}_d$

即是$\widetilde{P}$ on $C_\alpha=\widetilde{P}_\alpha$是转移阵，$\widetilde{p}_{i,j}=0\ (i\in C_\alpha,\ j\overline{\in}C_\alpha)$，$\alpha=1,2,\cdots,d$，此外$\widetilde{P}_\alpha$是不可约的，无周期的.

证 只证$\widetilde{P}$ on $C_\alpha=\widetilde{P}_\alpha$是不可约无周期的转移阵(其他论断前面诸命题已证).

任取$i\in C_\alpha$，若$\widetilde{p}_{i,j}>0$，即$p_{i,j}^{(d)}>0$，则必有$j_1,\cdots,j_{d-1}$，使$p_{i,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{d-1},j}>0$，所以由命题2.12有$j_1\in C_{\alpha+1},\cdots,j_{d-1}\in C_{\alpha+d-1}$，所以$j\in C_{\alpha+d}=C_\alpha$，可见"$i\in C_\alpha,\ j\overline{\in}C_\alpha\Longrightarrow\widetilde{p}_{j,j}=0$"，此即$\widetilde{P}_\alpha$是转移阵.

任取$i,j\in C_\alpha$，由E不可约知：存在m，使$p_{i,j}^{(m)}>0$，因i,j同属于一个循环类，故必有$m=rd$，所以$\widetilde{p}_{i,j}^{(r)}=p_{i,j}^{(rd)}=p_{i,j}^{(m)}>0$，

所以 $\widetilde{P}$ on C_a 是不可约的.

最后证明 $\widetilde{P}$ on C_a 是无周期的.任取 $i \in C_a$,由命题2.8(iii)必存在 m_0,使 $p_{i,i}^{(m_0 d)} > 0$, $p_{i,i}^{((m_0+1)d)} > 0$,此即 $\widetilde{p}_{i,i}^{(m_0)} > 0$, $\widetilde{p}_{i,i}^{(m_0+1)} > 0$,所以G.C.D. $\{m : \widetilde{p}_{i,i}^{(m)} > 0\} = 1$.至此,定理证毕.

由定理2.2,对任意 E,可分解成 $E = N \cup (\bigcup_m R_m^0) \cup (\bigcup_n R_n^+)$,由于 P on $R_m^0 = P_{0,m}$ 是不可约的(P on $R_n^+ = P_{+,n}$ 亦然),若令 R_m^0 (R_n^+)之周期为 $d^0(m)$ ($d^+(n)$),则由定理2.3,R_m^0(R_n^+)恰可分为 $d^0(m)$ ($d^+(m)$)个循环类 $R_m^0 = \bigcup_{t=1}^{d^0(m)} R_m^0(t)$($R_n^+ = \bigcup_{t=1}^{d^+(n)} R_n^+(t)$),$P_{0,m}^{d^0(m)}$,$P_{+,n}^{d^+(n)}$ 是不可约无周期的转移阵,且

“$p_{i,j}^{(r)} > 0,\ i \in R_m^0(s), j \in R_m^0(t) \Longrightarrow t - s = r \pmod{d^0(m)}$”.

定理2.4　对任意 E,有

(1)　$i \in R \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \Longleftrightarrow f_{i,i}^* = 1 \Longleftrightarrow g_{i,i} = 1$;

$i \in R^+ \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty,\ F_{i,i}'(1) < \infty \Longleftrightarrow f_{i,i}^* = 1,$

$F_{i,i}'(1) < \infty \Longleftrightarrow g_{i,i} = 1,\ F_{i,i}'(1) < \infty$;

(2)　$i \in R,\ i \sim j \Longrightarrow f_{i,i}^* = f_{i,j}^* = f_{j,i}^* = f_{j,j}^* = 1,\ g_{i,i} = g_{i,j} = g_{j,i} = g_{j,j} = 1$.

证　由命题1.3,1.5,2.3立即得定理2.4.

注　在本章中,矩阵(特别地,向量)的大小的比较、极限等等,都是逐元意义下的.例如 $Q^{(n)} = (q_{i,j}^{(n)},\ i,j \in E)$,则 $Q^{(1)} \geqslant Q^{(2)}$ 定义为 $q_{i,j}^{(1)} \geqslant q_{i,j}^{(2)}$ ($\forall i,j \in E$),$\lim_{n\to\infty} Q^{(n)}$ 定义为 $(\lim_{n\to\infty} q_{i,j},\ i,j \in E)$.零矩阵(向量)亦用0表示.对矩阵常分块表示,例如 $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $Q = (q_{i,j},\ i,j \in E)$有时表示为

$$Q = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \end{array},$$

$$Q_{s,t} = (q_{i,j},\ i \in E_s,\ j \in E_t),\quad 1 \leqslant s,t \leqslant 2.$$

§3 遍历性理论

在这一节中,恒设 E 是可数集,$P = (p_{i,j}, i,j \in E)$ 是 E 上的转移阵,$P^n = P^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)},\ i,j \in E)$ 是 n 步转移阵,$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^i)$ $(i \in E)$ 是如 §1 中所定义的 P 链的概率空间,本节研究的主要内容是:$\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ 存在的充要条件是什么?当此极限存在时,如何求?有何性质?以及状态的区分等等.

引理3.1 设$\{f_n: n \geqslant 1\}$,$\{p_n: n \geqslant 0\}$是两个非负实数序列,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \leqslant 1$, $p_n \leqslant 1$, $p_0 = 1$,且

$$p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu} \quad (n \geqslant 1), \tag{3.1}$$

则 G.C.D. $\{n: f_n > 0,\ n \geqslant 1\}$ = G.C.D. $\{n: p_n > 0,\ n \geqslant 1\}$.

证 令 $s = \min\{n: f_n > 0,\ n \geqslant 1\}$,则 $s = \min\{n: p_n > 0, n \geqslant 1\}$. 再令 d'_N = G.C.D. $\{n: f_n > 0,\ s \leqslant n \leqslant N\}$, d''_N = G.C.D. $\{n: p_n > 0,\ s \leqslant n \leqslant N\}$ $(N \geqslant s)$. 显然 $d'_s = s = d''_s$. 设 $d'_N = d''_N$,推证:$d'_{N+1} = d''_{N+1}$. 事实上,

$$p_{N+1} = \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu p_{N+1-\nu} + f_{N+1},$$

若 $f_{N+1} > 0$,则 $p_{N+1} > 0$,所以由归纳法假设得

d'_{N+1} = G.C.D. $\{d'_N: N+1\}$ = G.C.D. $\{d''_N: N+1\} = d''_{N+1}$;

若 $f_{N+1} = 0 = p_{N+1}$,则类似地有 $d'_{N+1} = d''_{N+1}$;若 $f_{N+1} = 0$, $p_{N+1} > 0$,则存在 ν, $1 \leqslant \nu \leqslant N$,使 $f_\nu p_{N+1-\nu} > 0$. 因此

$$d'_N \mid \nu,\ d''_N \mid (N+1-\nu),$$

从而由 $d'_N = d''_N$ 得 $d'_N \mid (N+1)$, $d''_N \mid (N+1)$，所以 $d'_{N+1} = d'_N = d''_N = d''_{N+1}$. 总之，恒有 $d'_{N+1} = d''_{N+1}$（对一切 $N \geqslant s$）. 引理证毕.

定理 3.1 若 i 是常返状态，其周期为 d_i，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(nd_i)} = d_i / m_{i,i} \tag{3.2}$$

（其中 $m_{i,i}$ 是平均再现时间，当 $b = \pm\infty$，a 是实数时，此后恒定义 $\dfrac{a}{b} = 0$）.

证 由于 i 是固定的，简记 $p_{i,i}^{(n)}, f_{i,i}^{(n)}, d_i, m_{i,i}$ 为 p_n, f_n, d, m. 显然 $\{f_n : n \geqslant 1\}$, $\{p_n : n \geqslant 0\}$ 满足引理 3.1 的条件. 令 $r_n = \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu \ (n \geqslant 0)$，则

$$r_0 p_n = p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{\nu-1} - r_\nu) p_{n-\nu},$$

从而 $\sum\limits_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} r_\nu p_{n-1-\nu}$ 不依赖 $n \geqslant 0$，但 $r_0 p_0 = 1$，所以

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} \equiv 1 \quad (n \geqslant 0), \tag{3.3}$$

令 $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} p_{nd} = \limsup\limits_{n\to\infty} p_n$. 必有 $\{n_k\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k d} = \lambda$.

用(3.1) 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ 可证：

$$\text{“}f_s > 0,\ \lim_{k\to\infty} p_{m_k} = \lambda \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} p_{m_k - s} = \lambda\text{”}.$$

所以，反复利用上述推理可证：“$t = \sum\limits_{j=1}^{l} c_j s_j$，$c_j, s_j$ 正整数，

$$f_{s_j} > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} p_{n_k d - t} = \lambda\text{”}.$$

用引理 3.1 及 d 之定义得知存在 s_j, $f_{s_j} > 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$，使 $d = \text{G.C.D.}\{s_1, \cdots, s_l\}$，所以由数论的一条初等定理可知：存在 s_0 使“$s \geqslant s_0 \Longrightarrow sd = \sum\limits_{j=1}^{l} c_j s_j$”. 因此，$\lim\limits_{k\to\infty} p_{(n_k - s)d} = \lambda \ (s \geqslant s_0)$. 以 $n =$

$(n_k - s_0)d$ 代入(3.3)并注意 $p_\nu = 0$ (当 $\nu \neq 0 \pmod d$),有

$$\sum_{\nu=0}^{n_k - s_0} r_{\nu d} p_{(n_k - s_0 - \nu)d} = 1.$$

当 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d} < \infty$ 时,在上式中令 $k \to \infty$ 并应用控制收敛定理(注意 $\lim_{k\to\infty} p_{(n_k - s)d} = \lambda,\ s \geqslant s_0$)可得

$$\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d} = 1.$$

而当 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d} = \infty$ 时易证 $\lambda = 0$. 总之恒有

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}}.$$

又因为 $f_\nu = 0$ (当 $\nu \neq 0 \pmod d$),所以

$$r_{\nu d} = \frac{1}{d} \sum_{j=\nu d}^{\nu d + d - 1} r_j,$$

从而 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d} = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{\infty} r_j = \frac{m}{d}$. 所以 $\lambda = \frac{d}{m}$. 若令 $\beta = \liminf_{n\to\infty} p_{nd}$,仿之可证 $\beta = \frac{d}{m}$. 定理证毕.

系 1 设 i, j 同属于某个周期为 d 的常返类 R_m^0(或 R_n^+), $R_m^0 = R_m^0(1) \cup \cdots \cup R_m^0(d)$, $i \in R_m^0(s)$, $j \in R_m^0(t)$,则

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd+r)} = \begin{cases} 0, & 若\ r \neq t - s \pmod d, \\ \dfrac{d}{m_{j,j}}, & 若\ r = t - s \pmod d. \end{cases} \tag{3.4}$$

证 当 $r \neq (t - s) \pmod d$ 时,系 1 的论断显然成立. 当 $r = (t - s) \pmod d$ 时,由命题 2.3 有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{i,j}^{(\nu d + r)} = 1.$$

再注意: $p_{i,j}^{(\nu)} = 0$ (当 $\nu \neq 0 \pmod d$),故

$$p_{i,j}^{(nd+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{n} f_{i,j}^{(\nu d+r)} p_{j,j}^{(nd-\nu d)}, \tag{3.5}$$

在(3.5)中令 $n \to \infty$ 并应用引理1.1、定理3.1即得(3.4)中第2式. 系1得证.

对于任何周期为 d 的状态 j,总令

$$f_{i,j}^{*}(r) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=r \pmod d}}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}.$$

定理3.2 (1) 若 j 不是正状态,则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0\ (\forall i \in E)$;

(2) 若 j 是正状态,周期为 d_j,平均再现时间为 $m_{j,j}$,且

(a) 若 i 是常返状态但与 j 不在同一类中,则

$$p_{i,j}^{(n)} = 0 \quad (\forall n \geqslant 1);$$

(b) 若 i 与 j 同属于一个正类,$i \in R_n^+(s)$, $j \in R_n^+(t)$,则 $p_{i,j}^{(n)} = 0$ (当 $n \neq t - s \pmod d$),而

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = \frac{d_j}{m_{j,j}} \quad (当\ r = t - s \pmod d);$$

(c) 若 i 是暂留状态,则对一切 r,有

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = f_{i,j}^{*}(r) \frac{d_j}{m_{j,j}}.$$

证 由命题1.2、2.2及定理3.1系1即得(1). 由定理2.2得(2)(a). 由定理3.1系1得(2)(b). 由(3.5)式及引理1.1和定理3.1得(2)(c).

定理3.3 对任何 $i,j \in E$,总有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)} = \pi_{i,j} \tag{3.6}$$

存在,其中 $\pi_{i,j} = f_{i,j}^{*}/m_{j,j}$(当 j 是暂留状态时,定义 $m_{j,j} = \infty$). 称 $\Pi = (\pi_{i,j},\ i,j \in E)$ 为 P 的**遍历极限**.

证 由定理3.2立即可得定理3.3.

定理3.4 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 存在的充要条件是每个正状态的周期都

是 1. 如果条件成立,则 $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \Pi = (\pi_{i,j}, i,j \in E)$, $\pi_{i,j}$ 由定理 3.3 所定义.

证 由定理 3.2 和定理 3.3 即得本定理.

下面我们研究 Π 的性质及求法.

命题 3.1 $\forall i \in E, j \in R_n^+$($R_n^0$ 亦类似),有

$$f_{i,j}^* = f_{i,R_n^+}^* \quad (f_{i,R_n^+}^* \text{ 之定义见定义 } 2.4). \tag{3.7}$$

证

$$f_{i,R_n^+}^* = \sum_{k=1}^{\infty} P^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k \\ (R_n^+)^c, & \cdots, & (R_n^+)^c, & R_n^+ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k, & k+1, & k+2, & \cdots \\ (R_n^+)^c, & \cdots, & (R_n^+)^c, & R_n^+, & j^c, & j^c, & \cdots \end{bmatrix}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} P^i\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k \\ (R_n^+)^c, & \cdots, & (R_n^+)^c, & R_n^+ \end{bmatrix}, \bigcup_{m=k+1}^{\infty}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\right). \tag{3.8}$$

用(1.9)并注意 $f_{j,j}^* = 1\ (j \in R_n^+)$ 可证(3.8)右方第一项为 0,而第二项等于

$$P^i\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\begin{bmatrix} 1, & \cdots, & k-1, & k \\ (R_n^+)^c, & \cdots, & (R_n^+)^c, & R_n^+ \end{bmatrix} \cap \bigcup_{m=k+1}^{\infty}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\leqslant P^i\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\right) = f_{i,j}^*.$$

所以 $f_{i,R_n^+}^* \leqslant f_{i,j}^*$,而小于号不能成立. 命题得证.

命题 3.2 $\Pi = \Pi P = P\Pi = \Pi^2$.

证 用控制收敛定理可得

$$P\Pi = P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1} P^{(\nu)}\right)\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}P\right) = \Pi.$$

用 Fatou 引理可得

$$\Pi P = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right)P \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu+1)}\right) = \Pi,$$

若令

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

则 $\Pi P\mathbf{1} = \Pi\mathbf{1}$,故上式不等号不可能成立,所以$\Pi P = \Pi$.

由 $\Pi = \Pi P$ 得$\Pi = \Pi P^{(n)}\ (n \geqslant 0)$,所以 $\Pi = \Pi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right)$ $(n \geqslant 1)$,令 $n \to \infty$ 并用控制收敛定理可得

$$\Pi = \lim_{n\to\infty}\Pi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right) = \Pi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}\right) = \Pi^2.$$

命题证毕.

定理 3.5　记

$$E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+ = N \cup (\bigcup_m R_m^0) \cup (\bigcup_n R_n^+),$$

则 Π 具有下述形式:

	N	R^0	R_1^+	R_2^+	R_3^+	$\cdots$
N	0	0	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$\cdots$
R^0	0	0	0	0	0	$\cdots$
R_1^+	0	0	$B(1)$	0	0	$\cdots$
R_2^+	0	0	0	$B(2)$	0	$\cdots$
R_3^+	0	0	0	0	$B(3)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

即 $\pi_{i,j} = 0\ (i \in E,\ j \in N \cup R^0)$, $A(m) = (\pi_{i,j},\ i \in N,\ j \in R_m^+)$, $B(n) = \Pi$ on R_n^+, $\pi_{i,j} = 0\ (i \overline{\in} (N \cup R_n^+),\ j \in R_n^+)$. 若记 $\pi'(n) = \left(\frac{1}{m_{j,j}},\ j \in R_n^+\right)$是以$\frac{1}{m_{j,j}}$ 为分量、定义域为 R_n^+ 的行向量,$a(m) = (f_{i,R_m^+}^*,\ i \in N)$是以 $f_{i,R_m^+}^*$ 为分量、定义域为 N 的列向量, 则有 $B(n) = \mathbf{1}\pi'(n)$, $A(m) = a(m)\pi'(m)$,此外还有 $B(n)\mathbf{1} = \mathbf{1}$,即是 $B(n)$ 是行行一样的每个元素都大于0的转移阵.

证 用定理3.2及命题3.1,为证此定理,只需证明$B(n)\mathbf{1}=\mathbf{1}$即可.事实上,由命题3.2,$\Pi=\Pi^2$得$B(n)=B(n)^2$,即$\mathbf{1}\pi'(n)=(\mathbf{1}\pi'(n)(\mathbf{1}\pi'(n)))=\mathbf{1}(\pi'(n)\mathbf{1})\pi'(n)=(\pi'(n)\mathbf{1})(\mathbf{1}\pi'(n))$,由$\mathbf{1}\pi'(n)$每一元素均为正知$\pi'(n)\mathbf{1}=1$,故$B(n)\mathbf{1}=(\mathbf{1}\pi'(n))\mathbf{1}=\mathbf{1}(\pi'(n)\mathbf{1})=\mathbf{1}$.定理证毕.

定义 3.1 称$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$是**准转移阵**,如果$q_{i,j}\geqslant 0$,$\sum_{k\in E}q_{i,k}\leqslant 1\ (i,j\in E)$.称准转移阵$Q$具有$\Pi$结构,如果$E$可分成不交子集的并:$E=G\cup F_1\cup F_2\cup\cdots$($G$或$F_n$可为空集),使$Q$具有下述形状:

	G	F_1	F_2	$\cdots$
G	0	$C(1)q'(1)$	$C(2)q'(2)$	$\cdots$
F_1	0	$\mathbf{1}q'(1)$	0	$\cdots$
F_2	0	0	$\mathbf{1}q'(2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

其中$C(m)$是以G为定义域、分量为非负实数的列向量,$q'(n)$是以F_n为定义域、分量为非负实数的行向量,且$q'(n)\mathbf{1}=1$.

显然,若Q具有Π结构,则必有$Q^2=Q$(注意$q'(n)\mathbf{1}=1$).又由定理3.5,Π是具有Π结构的(取$G=N\cup R^0$, $F_n=R_n^+$, $q'(n)=\pi'(n)$, $C(m)=\begin{pmatrix}a(m)\\0\end{pmatrix}$).

命题 3.3 若$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$是准转移阵,则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}=\widetilde{\Pi}$存在且具有$\Pi$结构($Q^{\nu}$是$Q$的$\nu$次幂).

证 令Δ是E外之一点,$E_\Delta=E\cup\{\Delta\}$($\{\Delta\}$表示由Δ构成的单点集),$b=\mathbf{1}-Q\mathbf{1}$,则$Q_\Delta=\begin{pmatrix}Q & b\\0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}$是定义在$E_\Delta$上的转移阵.由定理3.5知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}Q_{\Delta}^{\nu}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}Q^{\nu} & b_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

存在且有 Π 结构，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}$ 存在也有 Π 结构.

命题 3.4　Q 是准转移阵且 $Q=Q^2$ 的充要条件是 Q 具有 Π 结构.

证　充分性由 Π 结构之定义即得. 必要性由 $Q=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}Q^{\nu}$ 及命题 3.3 即得.

命题 3.5　$f_{i,J}^{*}(i\in E,J\subset E)$ 具有下列性质：

(1)　$f_{i,\phi}^{*}=0,\ f_{i,E}^{*}=1\ (i\in E)$；

(2)　$J_1\subset J_2\Longrightarrow f_{i,J_1}^{*}\leqslant f_{i,J_2}^{*}$；

(3)　$f_{i,J}^{*}$ 对 J 具有完全半可加性；

(4)　$\{J_\nu\}$ 是不交封闭集 $\Longrightarrow f_{i,\bigcup\limits_{\nu}J_\nu}^{*}=\sum\limits_{\nu}f_{i,J_\nu}^{*}$；

(5)　若 $J\subset E$ 固定，则或 $f_{i,J}^{*}=1$ (对一切 $i\in E$)，或 $\inf\limits_{i\in J}f_{i,J}^{*}=0$.

证　(1)、(2) 显然成立.

$$(3)\quad f_{i,\bigcup\limits_{\nu}J_\nu}^{*}=P^{i}\left(\bigcup_{n}\begin{bmatrix}n\\ \bigcup\limits_{\nu}J_\nu\end{bmatrix}\right)=P^{i}\left(\bigcup_{\nu}\bigcup_{n}\begin{bmatrix}n\\ J_\nu\end{bmatrix}\right),\tag{3.9}$$

所以 $f_{i,\bigcup\limits_{\nu}J_\nu}^{*}\leqslant\sum\limits_{\nu}f_{i,J_\nu}^{*}$.

(4)　若 $\{J_\nu\}$ 不交封闭，则当 $\mu\neq\nu$ 时，

$$P^{i}\left(\left(\bigcup_{n}\begin{bmatrix}n\\ J_\nu\end{bmatrix}\right)\cap\left(\bigcup_{n}\begin{bmatrix}n\\ J_\mu\end{bmatrix}\right)\right)=0,$$

故由 (3.9) 即得 (4).

(5)　由 (1.9) 得

$$1-f_{i,J}^{*}=P^{i}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\ J^{c}\end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j \in J^c} P^i \left\{ \begin{bmatrix} 1, & \cdots, & n-1, & n \\ J^c, & \cdots, & J^c, & j \end{bmatrix} \right\} P^j \left\{ \begin{bmatrix} 1, & 2, & \cdots \\ J^c, & J^c, & \cdots \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sum_{j \in J^c} P^i \left\{ \begin{bmatrix} 1, & \cdots, & n-1, & n \\ J^c, & \cdots, & J^c, & j \end{bmatrix} \right\} (1 - f_{j,J}^*)$$

$$\leqslant P^i \left(\bigcap_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} k \\ J^c \end{bmatrix} \right) (1 - \inf_{j \in J^c} f_{j,J}^*),$$

令 $n \to \infty$ 即得:$1 - f_{i,J}^* \leqslant (1 - f_{i,J}^*)(1 - \inf_{i \in J} f_{j,J}^*)$, (5) 得证.

令 $\gamma = \Pi \mathbf{1}$,则

$$\gamma = \begin{matrix} N \\ R^0 \\ R^+ \end{matrix} \begin{pmatrix} \sum_m a(m) \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

即是 γ on $N = \sum_m a(m)$, γ on $R^0 = 0$, γ on $R^+ = \mathbf{1}$, $a(m)$,Π 之定义见定理 3.5.

本书中恒用$(m)_J$ 表示定义域为J、分量有界的列向量全体;$(l)_J$ 表示定义域为J、诸分量之绝对值之和收敛的行向量的全体.若 $J = E$,则简记$(m)_E$、$(l)_E$ 为(m)、(l).用 $e_i(e_i')$ 表示对应于 i 的分量为 1、其他分量为 0 的列(行)向量,其维数视需要而定.

命题 3.6 $\{e_i'\gamma : i \in E\}$ 或无 0 或有无穷多个 0.

证 若 R^0 不空,则 P on R^0 是转移阵,而 $\lim_{n \to \infty} (P^{(n)} \text{on } R^0) = 0$,故 R^0 必为无穷集,由(3.10) 知$\{e_i'\gamma : i \in E\}$ 有无穷多个 0.

若 R^0 是空集,再设$\{i : e_i'\gamma = 0,\ i \in E\} \neq \varnothing$.由(3.10) 和命题 3.5(4) 及定理 3.5 知:当 $i \in N$ 时有$e_i'\gamma = \sum_m f_{i,R_m^+}^* = f_{i,R^+}^*$.所以由(3.10) 及 R^0 是空集知:

$$\varnothing \neq \{i : e_i'\gamma = 0,\ i \in E\} = \{i : e_i'\gamma = 0,\ i \overline{\in} R^+\}$$

$$= \{i : f_{i,R^+}^* = 0,\ i \overline{\in} R^+\} = \widehat{R}^+ \ (R^+)^c$$

($\widehat{R}^+$ 之定义见定义 2.4).若 R^+ 是空集,则 $e_i'\gamma \equiv 0\ (i \in E)$,命题

3.6 成立，若 R^+ 非空，用命题 2.4 知 $\widehat{R}^+(R^+)^c$ 为封闭集，故 P on $(\widehat{R}^+(R^+)^c)$ 是转移阵，若注意 $\widehat{R}+(R^+)^c\subset N$（因 R^0 是空集）知

$$\lim_{n\to\infty}(P \text{ on } \widehat{R}^+(R^+)^c)^n=\lim_{n\to\infty}(P^{(n)}\text{on } \widehat{R}^+(R^+)^c)=0,$$

所以 $\widehat{R}^+(R^+)^c$ 是无穷集，命题 3.6 证毕.

命题 3.7　下列陈述等价：

(1)　Π 是转移阵；

(2)　$R^0=\varnothing$, $f^*_{i,R^+}=1\ (i\in N)$；

(3)　$\inf\{e'_i\gamma: i\in E\}>0$.

证　由(3.10)及 $e'_i\gamma=f^*_{i,R^+}(i\in N)$ 知(1)$\Longleftrightarrow$(2). 而(1)$\Longrightarrow$(3)显然，下面证明(3)$\Longrightarrow$(2). 若(3)成立，则 $R^0=\varnothing$,

$$\inf_{i\in N}f^*_{i,R^+}=\inf_{i\in(R^+)^c}f^*_{i,R^+}>0,$$

用命题 3.5 (5) 得 $f^*_{i,R^+}=1$（对一切 $i\in E$），故(2)成立.

由命题 3.1、3.7 及定理 3.3 知："$\Pi=\mathbf{1}\pi'$, $\pi'\mathbf{1}=1$, $\pi'\geqslant 0$ $\Longleftrightarrow R^0=\varnothing$，恰有一正类，且 $f^*_{i,R^+_1}=1\ (i\in N)$."

定义 3.2　称转移阵 P（或对应的 P 链）是**无耗损的**，如果 Π 是转移阵；反之称 P 是**耗损的**.

引理 3.2　设 $\alpha'(n)=(\alpha_0(n),\alpha_1(n),\cdots)$, $\alpha'=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots)$, $\alpha'(n)\geqslant 0$, $\alpha'(n)\mathbf{1}=1\ (n\geqslant 1)$,

$$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha'(n)=\alpha'$. 若下列两条件之一成立：

(1)　$\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)=0$;

(2)　$\alpha'(n)\beta\leqslant c\ (n\geqslant 1)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\infty$, $\beta\geqslant 0$,

则 $\alpha'\mathbf{1}=1$.

证 设(1) 成立,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 k_0,使

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{i=k_0}^{\infty}\alpha_i(n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再用 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha'(n)=\alpha'$ 得:存在 N_0 使 $|\alpha_i(N_0)-\alpha_i|<\dfrac{\varepsilon}{2k_0}$ $(i=1,2,\cdots,k_0)$. 所以

$$\alpha'\mathbf{1}\geqslant\sum_{i=1}^{k_0}\alpha_i\geqslant\sum_{i=1}^{k_0}\left(\alpha_i(N_0)-\frac{\varepsilon}{2k_0}\right)$$

$$\geqslant 1-\sum_{i=k_0}^{\infty}\alpha_i(N_0)-\frac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon.$$

由 ε 之任意性得 $\alpha'\mathbf{1}\geqslant 1$,再用 Fatou 引理得 $\alpha'\mathbf{1}=1$.

设(2) 成立. 则 $c\geqslant\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)\beta_i\geqslant(\inf\limits_{i\geqslant k}\beta_i)\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)$, 故 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{i=k}^{\infty}\alpha_i(n)\leqslant c/\inf\limits_{i\geqslant k}\beta_i$,由(2) 即得(1). 引理 3.2 证毕.

定理 3.6 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$,

$$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix}\geqslant 0,$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\infty$, $P\beta\leqslant\beta$,则 P 是无耗损的.

证 任取 $i\in E$ 固定,令 $\alpha'(n)=e_i'\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}P^{\nu}\right)$, $\alpha'=e_i'\Pi$, 用引理 3.2 (2) 即得 $\alpha'\mathbf{1}=1$,故 $\Pi\mathbf{1}=\mathbf{1}$. 定理得证.

定理 3.7 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$,

$$\beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\end{pmatrix}\geqslant 0,$$

α 是正实数, $P\beta<\infty$, $e_i'P\beta\leqslant e_i'\beta-\alpha$ (除去 E 中有限个 i),则 P 是无耗损的.

证　由假设知:存在 $b>0$ 使 $P\beta\leqslant\beta+b\mathbf{1}$,故 $P^{(n)}\beta<\infty$ $(n\geqslant1)$. 再用假设,存在 $c>0$ 及一个列向量 α, α 只有有限个分量为 1 其他为 0,使 $P\beta\leqslant\beta-\alpha\mathbf{1}+c\alpha$. 由 $P\beta+\alpha\mathbf{1}\leqslant\beta+c\alpha$ 得

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)P\beta+\alpha\mathbf{1}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\beta+c\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\alpha.$$

注意 $P^{(n)}\beta<\infty$ $(n\geqslant1)$ 可得:

$$\alpha\mathbf{1}\leqslant\frac{1}{n}P\beta-\frac{1}{n}P^{(n+1)}\beta+c\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}\right)\alpha.$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\alpha\mathbf{1}\leqslant c\Pi\alpha\leqslant c\Pi\mathbf{1}=c\gamma$. 故 $\inf\{e_i'\gamma:i\in E\}\geqslant\frac{a}{c}>0$,所以由命题 3.7 知 P 是无耗损的.

定义 3.3　称分布行 $\beta'(\beta'\geqslant0,\ \beta'\mathbf{1}=1)$ 是转移阵 P (或对应的 P 链) 的**平稳分布**或**不变测度**或**谐测**,如果 $\beta'P=\beta'$.

称"$x'P=x',\ x'\in(l),\ x'\geqslant0$"为**左方程**.

定理 3.8　下列 4 条陈述等价:

(1)　*方程"$x'P=x',\ x'\in(l)$"有非 0 解;*

(2)　*有正状态存在;*

(3)　*左方程有非 0 解;*

(4)　*P 有平稳分布存在.*

证　先考察"$x'P=x',\ x'\in(l)$"的通解. 用控制收敛定理可得:若 $x'P=x',\ x'\in(l)$,则 $x'\Pi=x',\ x'\in(l)$. 再用定理 3.5 得:x' on $(N\cup R^0)$ 为 0,若记 x' on R_n^+ 为 s_n',则再用定理 3.5 有

$$x'=(0,0,s_1',s_2',\cdots)=(0,0,s_1',s_2',\cdots)\Pi$$

$$=(0,0,s_1',s_2',\cdots)\begin{pmatrix}0&0&a(1)\pi'(1)&a(2)\pi'(2)&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\\0&0&\mathbf{1}\pi'(1)&0&\cdots\\0&0&0&\mathbf{1}\pi'(2)&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix}$$

$$=(0,0,s_1\pi'(1),s_2\pi'(2),\cdots),$$

即 x' on $(N\cup R^0)=0$, x' on $R_n^+=s_n\pi'(n)$, $s_n=s_n'\mathbf{1}$, $\sum_n|s_n|<\infty$.

反之,任给满足上述要求之 x',必满足 $x'P=x'$, $x'\in(l)$,故"$x'P=x'$, $x'\in(l)$"之通解为

$$\begin{array}{l} \quad\quad\ N\quad R^0\quad\quad R_1^+\quad\quad\quad R_2^+\quad\quad \cdots \\ \begin{cases} x'=(0,\ 0,\ s_1\pi'(1),\ s_2\pi'(2),\ \cdots), \\ \sum_n|s_n|<\infty. \end{cases} \end{array} \tag{3.11}$$

(1)⟹(2). 由通解之形状即得.

(2)⟹(3). 在(3.11)中取 $s_1>0$, $s_i=0\ (i>1)$ 即为左方程之非0解.

(3)⟹(4). 设 x' 是左方程之非0解,取 $\beta'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'$ 即为 P 之平稳分布.

(4)⟹(1),显然.

定理3.9 *若 P 是不可约的,则*

(1) 左方程只有零解 ⟹ $\Pi=0$;

(2) 左方程有非零解 ⟹ $\Pi=\mathbf{1}\pi'$,其中 $\pi'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'$, x' 是左方程之唯一非零解(常因子除外), $E=R_1^+$,且 π' 是 P 的唯一的平稳分布.

证 (1) 由左方程只有零解,用定理3.8知:无正状态,故 $\Pi=0$.

(2) 由左方程有非零解知有正状态存在,而 P 不可约,故 $E=R_1^+$. 故左方程之非0解为: $x'=s_1\pi'(1)$, $s_1>0$,而 $\Pi=\mathbf{1}\pi'(1)$,故

$$\Pi=\mathbf{1}\left(\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'\right).$$

由 $\Pi P=\Pi$ 知 $\pi'=\pi'(1)$ 是 P 的唯一的平稳分布.

对一般的转移阵 P 而言(可能是可约的),解左方程,其通解

必为0的地方对应的状态就是$N \cup R^0$,其余的地方就是R_1^+, R_2^+, $\cdots$,而且 $\pi'(n)$ 也得出了. 根据定理 3.5 Π 的结构, 只需求出 $a(m)$, Π 就完全求出了.下述定理就回答了 $a(m)$ 的求法.

定理 3.10 对任何转移阵 P 而言,

$$\begin{matrix} N \\ R^0 \\ \bigcup_{s<m} R_s^+ \\ R_m^+ \\ \bigcup_{s>m} R_s^+ \end{matrix} \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

是

$$《P\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leqslant y \leqslant 1》$$

的最小解.

证 由 $P\Pi = \Pi$ 并应用定理3.5 Π 的结构再注意 $\pi'(m) > 0$ 即可发现它是解. 再证最小性. 任取上述方程的一个解

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1},$$

必有

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} P^{\nu}\right)\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

令 $n \to \infty$ 并用 Fatou 引理及定理 3.5 Π 的结构可得

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant \Pi \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant \Pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

至此，Π 的求法及 $N \cup R^0$ 与 $\bigcup_n R_n^+$ 的区分已经解决. 本节最后一个问题就是要区分 N 与 R^0.

命题 3.8 任取 $J \subset E$, $J \neq \varnothing$, $A = P \text{ on } J$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = a$ 存在;

(2) $Aa = a$, 且 a 是《$Ay = y$, $0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$》的最大解;

(3) $a_i = e_i' a = 1 - f_{i,J}^*$ $(i \in J)$;

(4) 令 $\tilde{a}_i = a_i$ $(i \in J)$, $\tilde{a}_i = 0$ $(i \in J^c)$, $\tilde{a} = (\tilde{a}_i,\ i \in E)$, 则 $e_i'(P\tilde{a}) = 1 - f_{i,J^c}^*(i \in E)$.

证 任取 $i \in J$, 则由测度 P^i 的定义有

$$e_i'(A^n \mathbf{1}) = P^i\left(\bigcap_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} k \\ J \end{bmatrix}\right),$$

故(1)、(3) 得证. 再证(2). 用控制收敛定理得 $Aa = A \lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n+1}\mathbf{1} = a$. 若 $Ay = y$, $0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$, 则 $y = A^n y \leqslant A^n \mathbf{1}$, 从而 $y \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} A^n \mathbf{1} = a$, (2) 得证. 最后证(4). 用(3) 有

$$\begin{aligned} 1 - f_{i,\bar{J}}^* &= P^i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right) = \sum_{j\in J} p_{i,j} P^j\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix}\right) \\ &= \sum_{j\in J} p_{i,j}(1 - f_{i,J^c}^*) = \sum_{j\in J} p_{i,j}(e_j' a) \\ &= \sum_{j\in E} p_{i,j}\tilde{a}_j = e_i'(P\tilde{a}). \end{aligned}$$

命题 3.9 下列陈述等价:

(1) $f_{i,J^c}^* \equiv 1$ $(i \in E)$;

(2) $f_{i,J^c}^* = 1$ $(i \in J)$;

(3) $a = 0$ (a 之定义见命题3.8);

(4) 《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》只有0解.

证　(1)$\Longrightarrow$(2) 显然. (2)$\Longrightarrow$(3), 只需注意 $e_i'a = 1 - f^*_{i,J^c}$ $(i \in J)$. (3)$\Longrightarrow$(4),设 y 为方程之解,不妨令 $Ay = y,\ 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$,由命题3.8 (2) 有 $0 \leqslant y \leqslant a$,而今设 $a = 0$,故 $y = 0$, (4) 成立. (4)$\Longrightarrow$(1),由(4)成立,再用命题3.8 (2) 得 $a = 0$,从而 $P\tilde{a} = 0$. 但 $e_i'P\tilde{a} = 1 - f^*_{i,J}$ $(i \in E)$,所以 $f^*_{i,J^c} \equiv 1$ $(i \in E)$.

系1　设 A 为状态 j 之余阵,即是 $A = P$ on $(E - \{j\})$,则下列陈述等价:

(1) $f^*_{i,j} \equiv 1$ $(i \in E)$;

(2) $f^*_{i,j} = 1$ $(i \neq j)$;

(3) $a = 0$ $(a = \lim\limits_{n \to \infty} A^n \mathbf{1})$;

(4) 《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》只有0解.

定理3.11　任取状态 j,设 A 为 j 之余阵,则

(1) 《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》只有0解 $\Longrightarrow j$ 是常返状态;

(2) 《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》有非0解,且 P 不可约 $\Longrightarrow j$ 是暂留状态.

证　由命题3.9系1中(1)$\Longleftrightarrow$(4) 即得本定理的(1). 再证(2). 若 P 不可约, j 是常返状态,则 $f^*_{i,j} \equiv 1$ $(i \in E)$,再用命题3.9的系知《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》只有0解,(2) 证毕.

我们称《$Py = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》为右方程. 如 A 为 j 之余阵,即 $A = P$ on $(E - \{j\})$,则称《$Ay = y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》为 j 右方程,引进

条件(LC);左方程有非0解;

条件$(\mathrm{RC})_j$: j 右方程有非0解;

条件(RC):右方程有非0解;

$(\overline{\mathrm{LC}})$($(\overline{\mathrm{RC}})$, $\overline{(RC)_j}$) 表示(LC)((RC), $(\mathrm{RC})_j$) 之逆条件.

定理 3.12 设 P 不可约,则

(1) $(\mathrm{LC}) \Longleftrightarrow E = R_1^+ \Longrightarrow \overline{(\mathrm{RC})}_j$ (对一切 $j \in E$);

(2) $\overline{(\mathrm{LC})}, \overline{(\mathrm{RC})}_j$(对某个 $j \in E$)$\Longleftrightarrow \overline{(\mathrm{LC})}, \overline{(\mathrm{RC})}_j$(对一切 $j \in E$)$\Longleftrightarrow E = R_1^0$;

(3) $(\mathrm{RC})_j$(对某个 $j \in E$)$\Longleftrightarrow (\mathrm{RC})_j$(对一切 $j \in E$)$\Longleftrightarrow E = N$.

证 由定理 3.11 及左方程之通解的形式即得定理 3.12.

定理 3.13 下列陈述等价:

(1) E 不是一个常返类;

(2) 《$Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)$》有非常向量解;

(3) 《$Py \leqslant y,\ y \geqslant 0$》有非常向量解.

(常向量者,即诸分量相等之向量.)

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 先设 E 有暂留状态. 不妨令 $E = \{0,1,2,\cdots\}$, 0 是暂留状态. 取

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_{1,0}^* \\ f_{2,0}^* \\ \vdots \end{pmatrix},$$

由命题 1.5 (3) 有

$$P\tilde{y} = \begin{pmatrix} f_{0,0}^* \\ f_{1,0}^* \\ \vdots \end{pmatrix} \leqslant \tilde{y}.$$

显然 $f_{i,0}^*$ $(i \geqslant 1)$ 不能全是 1 (否则由命题 3.9 的系得 $f_{0,0}^* = 1$,这与 0 是暂留状态矛盾),而且由 $f_{0,0}^* < 1$ 知 $P\tilde{y} \neq \tilde{y}$. 总之,当 E 有暂留状态时,

$$《Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m),\ Py \neq y》$$

有非常向量解 $\tilde{y}$.

再设 E 无暂留状态,由(1) 成立和 E 至少含两个常返类,不妨

令 R_1^+, R_2^+ 非空,取向量 y^* 满足:$e_i'y^* = c_1 \geqslant 0\ (i \in R_1^+)$, $e_i'y^* = c_2 \geqslant 0\ (j \in R_2^+)$, $c_1 \neq c_2$, $e_k'y^* = 0\ (k \in E - R_1^+ \cup R_2^+)$, 则 $Py^* = y^*$.故

$$《Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ y \in (m)》$$

有非常向量解 y^*, (1) ⟹ (2) 证毕.

(2)⟹(3) 显然.

(3)⟹(1). 令 $E = \{0,1,2,\cdots\}$, $\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{i,j},\ i,j \in E)$, $\widetilde{p}_{0,0} = 1$, $\widetilde{p}_{0,j} = 0\ (j \geqslant 1)$, $\widetilde{p}_{i,j} = p_{i,j} (i \geqslant 1,\ j \in E)$, $\widetilde{\Pi} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} \widetilde{P}^{(\nu)}$, $A = P$ on $(E - \{0\}) = \widetilde{P}$ on $(E - \{0\})$,则

$$\widetilde{P}^{(n)} e_0 = \widetilde{P}^{(n)}\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ A^n\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

由命题 3.8 (1) 及(3) 得(取$\{0\}$ 为那儿的 J^c):

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{P}^{(n)} e_0 = \widetilde{y}\quad (\widetilde{y}\ 之定义见前).$$

从而 $\widetilde{\Pi} e_0 = \widetilde{y}$.下面证明:$\widetilde{y}$ 是《$Py \leqslant y,\ y \geqslant 0,\ e_0'y = 1$》的最小解.$\widetilde{y}$ 是解在(1) ⟹(2) 的证明中已证.再证最小性,若 $y \geqslant 0$, $e_0'y = 1$, $y \geqslant Py$,则 $y \geqslant \widetilde{P}y \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{P}^{(n)}y$, 从而

$$y \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\widetilde{P}^{(\nu)}\right)y,$$

令 $n \to \infty$ 用 Fatou 引理得 $y \geqslant \widetilde{\Pi}y \geqslant \widetilde{\Pi}e_0 = \widetilde{y}$.最小性证毕.现在设(3) 成立,即存在 $y \geqslant 0$, $y \geqslant Py$, y 是非常向量.不妨令$e_0'y > e_1'y$,又不妨令$e_0'y = 1 > e_1'y$ (否则以$e_0'y$ 除此向量).由 $\widetilde{y}$ 之最小性知 $\widetilde{y} \leqslant y$,更有 $f_{1,0}^* = e_1'\widetilde{y} \leqslant e_1'y < 1$,所以 E 不是一个常返类.定理证毕.

定理 3.14　下列陈述等价;

(1)　E 有暂留状态;

(2) 《$Py \leqslant y$, $y \geqslant 0$, $y \in (m)$, $Py \neq y$》有解;

(3) 《$Py \leqslant y$, $y \geqslant 0$, $Py \neq y$》有解.

证 "(1)$\Longrightarrow$(2) 在定理 3.13 的(1)$\Longrightarrow$(2) 中已证.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" 显然成立.

(3)$\Longrightarrow$(1). 设 $y \geqslant Py$, $y \geqslant 0$, $Py \neq y$. 作

$$P^* = \text{diag}([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)P\text{diag}([1+e_i'y],\ i \in E),$$

其中 $\text{diag}(q_i,\ i \in E)$ 表示对角矩阵,主对角线上对应于 i 的元素为 q_i) 则$e_i'P^{(\nu)}e_i = e_i'(P^*)^\nu e_i$ $(\nu \geqslant 0,\ i \in E)$,且

$$\begin{aligned} P^*\mathbf{1} &= \text{diag}([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)P(\mathbf{1}+y) \\ &\leqslant \text{diag}([1+e_i'y]^{-1},\ i \in E)(\mathbf{1}+y) \\ &= \mathbf{1}, \end{aligned}$$

由 $Py \leqslant y$, $Py \neq y$ 知上式中等号不能成立,故

$$\mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \geqslant 0, \quad \mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \neq 0,$$

所以存在 $i_0 \in E$ 及正数c 使$\mathbf{1} - P^*\mathbf{1} \geqslant ce_{i_0}$. 因此

$$\mathbf{1} \geqslant \sum_{\nu=0}^{n=1}(P^*)^\nu(\mathbf{1} - P^*\mathbf{1}) \geqslant c\sum_{\nu=0}^{n-1}(P^*)^\nu e_{i_0}.$$

特别地,有

$$1 \geqslant e_{i_0}'c\sum_{\nu=0}^{n-1}(P^*)^\nu e_{i_0} = c\sum_{\nu=0}^{n=1}e_{i_0}'P^{(\nu)}e_{i0} = c\sum_{\nu=0}^{n=1}p_{i_0,i_0}^{(\nu)}\ (n \geqslant 1).$$

所以$\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{i_0,i_0}^{(\nu)} < \infty$,即 i_0 是暂留状态.

定理3.15 设 $\widetilde{P}$ 如定理3.13所定义,若 $\widetilde{P}$ 是无耗损的,则 P 有常返状态.

证 $E = \{0,1,2,\cdots\}$,若 $1,2,\cdots$ 都是 P 的暂留状态,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,i}^{(n)} < \infty \quad (i \geqslant 1).$$

又由 $\widetilde{P}$ 之定义知$\widetilde{p}_{i,i}^{(n)} \leqslant p_{i,i}^{(n)}$ $(i \geqslant 1,\ n \geqslant 0)$,所以 $1,2,\cdots$ 都是 $\widetilde{P}$ 的暂留状态,所以 $\Pi e_i = 0$ $(i \geqslant 1)$,从而由 $\widetilde{P}$ 之无耗损性得

$$\mathbf{1} = \widetilde{\Pi}\,\mathbf{1} = \widetilde{\Pi}\sum_{i\in E} e_i = \widetilde{\Pi} e_0 = \widetilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_{0,1}^* \\ f_{0,2}^* \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

所以 $f_{0,i}^* = 1\ (i \geqslant 1)$,再用命题 3.9 的系得 $f_{0,0}^* = 1$,此即 0 是常返状态.

§4　实例及应用

在这一节中,仍设 E 是可数集,$P = (p_{i,j},\ i,j \in E)$ 是 E 上的转移阵,$P^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)},\ i,j \in E)$ 是 n 步转移阵,

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{u} P^{(\nu)},$$

$$E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+ = N \cup (\bigcup_m R_m^0) \cup (\bigcup_n R_n^+).$$

本节主要研究二类问题,**一是**:当 E 为有限集时,P 之状态空间 E 及 Π 有何特性;**二是**:当 E 为可数无穷集时,有各种实际背景的特殊的 P 的状态空间 E 及 Π 的特性及 Π 的求法.

先设 E 是有限集,P 是 E 上之转移阵,有

命题 4.1　$R^0 = \varnothing,\ R^+ \neq \varnothing.$

证　由 E 为有限集和 Π 是转移阵,再用定理 3.5 中 Π 的结构即得命题 4.1.

命题 4.2　下列两条件等价:

(1)　Π 没有 0 列;　(2)　E 没有暂留状态.

证　由 $R^0 = \varnothing$ 及定理 3.5 即得.

命题 4.3　下列两条件等价:(1)　Π 行行一样,即 $\Pi = \mathbf{1}\pi'$;(2)　E 恰含一个正类(N 可能非空).

证　"(1)$\Longrightarrow$(2)"乃显然.(2)$\Longrightarrow$(1),设 $E = R_1^+ \cup N$,若 $N = \varnothing$,由定理 3.5 得 Π 行行一样;若 $N \neq \varnothing$,取 $i \in N$,由 $\Pi\,\mathbf{1}$

$=\mathbf{1}$ 及命题 3.7 有 $f^*_{i,R_1^+}=1$,故再用定理 3.5 知 Π 行行一样.

命题 4.4 下列 5 个条件等价:

(1) $\Pi>0$;

(2) 对任何 $i,j\in E$,存在正整数 n(可依赖 i,j),使

$$p_{i,j}^{(n)}>0;$$

(3) P 是不可约的;

(4) $E=R_1^+$;

(5) $\Pi>0$,且 $\Pi=\mathbf{1}\pi'$ 行行一样

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 给定 i,j,若 $p_{i,j}^{(n)}=0$ (对一切 $n\geqslant 1$),则 $\pi_{i,j}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(\nu)}=0$,故(1)$\Longrightarrow$(2).

(2)$\Longrightarrow$(3). 由(2)得 $f^*_{i,j}>0$ (对一切 $i,j\in E$),故 P 不可约.

(3)$\Longrightarrow$(4). 由命题 4.1 及定理 2.2 即得.

(4)$\Longrightarrow$(5). 由定理 3.5 即得.

(5)$\Longrightarrow$(1) 显然.

命题 4.5 下列两条件等价:

(1) P 不可约且周期 $d=1$;

(2) 存在正整数 M,使 $P^{(M)}>0$.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 由 P 不可约及命题 4.4 知 $\pi_{i,j}>0$,由 $d=1$ 知

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=\pi_{i,j}\quad(i,j\in E).$$

由 E 为有限集可知:$\exists M$,当 $n\geqslant M$ 有 $p_{i,j}^{(n)}>0\ (i,j\in E)$.

(2)$\Longrightarrow$(1). 若 P 可约,或 P 不可约但 $d>1$,由定理 2.2 及定理 2.3 可看出无论 n 为何数,$P^{(n)}$ 总有 0 元素.

命题 4.6 设 E 恰含 S 个元素,则

(1) $f^*_{i,i}>0\Longrightarrow$ 存在正整数 $m\leqslant S$,使 $p_{i,i}^{(m)}>0$;

(2) $f^*_{i,j}>0,\ i\neq j\Longrightarrow$ 存在正整数 $m\leqslant S-1$,使 $p_{i,j}^{(m)}>0$.

证 由矩阵论 Cayley 定理,$P^{(S)}$ 可表示成 $I,P,\cdots,P^{(S-1)}$ 的线性组合(I 是单位阵),从而对任何 $n\geqslant S$, $P^{(n)}$ 亦也表示为

$I, P, \cdots, P^{(S-1)}$ 的线性组合,令

$$P^{(n)} = \sum_{i=1}^{S} C_{n,i} P^{(S-i)} \quad (n \geqslant S).$$

若 $i \neq j$ 且 $p_{i,j}^{(\nu)} = 0\ (\nu = 1,2,\cdots,S-1)$,则 $p_{i,j}^{(n)} = 0$ (对一切 $n \geqslant 1$),故 $f_{i,j}^{*} = 0$.(2) 得证.由 $P^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{S} C_{n,i} P^{(S+1-i)}$ 知:若 $p_{i,i}^{(\nu)} = 0$ $(\nu = 1,2,\cdots,S)$, 则 $p_{i,i}^{(n)} = 0$ (对一切 $n \geqslant 1$),从而 $f_{i,i}^{*} = 0$,故 (1) 得证.

命题 4.7　1 是 P 的特征根且对 P 的任何特征根 λ, 都有 $|\lambda| \leqslant 1$.

证　由 $(I-P)\mathbf{1} = 0$ 知 1 是 P 之特征根.再设 λ 是 P 之特征根,则有 x' 使

$$x'(\lambda I - P) = 0,\ x' \neq 0,\ x' = (x, i \in E).$$

由 $\lambda x_j = \sum_{i \in E} x_i p_{i,j}\ (j \in E)$ 得

$$|\lambda| \sum_{j \in E} |x_j| \leqslant \sum_{i \in E} |x_i| \sum_{j \in E} p_{i,j} = \sum_{i \in E} |x_i|,$$

故 $|\lambda| \leqslant 1$.

命题 4.8　$\Pi = \lim_{\lambda \to 1-} (1-\lambda)(I - \lambda P)^{-1}$.

证　由命题 4.7, P 之任一特征根之模皆不大于 1, 所以 $(I - \lambda P)^{-1}$ 存在(当 $\lambda < 1$), 且 $(I - \lambda P)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n$.因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} P^{\nu} = \Pi,$$

所以 $\lim_{\lambda \to 1-} (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n = \Pi$.命题得证.

例 4.1　自由随机徘徊.设 $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, $P = (p_{i,j}, i,j \in E)$, $p_{i,i-1} = q_i$, $p_{i,i+1} = p_i$, $p_i > 0$, $q_i > 0$, $p_i + q_i = 1$ $(i \in E)$, $p_{i,j} = 0$ (当 $|i-j| > 1$ 或 $i = j$).

显然 P 是不可约的,周期 $d = 2$.解 $x'P = x'$ (记 $x' = (x_i,$

$i \in E)$),得

$$(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i) = (p_i x_i - q_{i+1}x_{i+1}) = c \quad (i \in E).$$

所以由 $Mc = \sum_{i=1}^{M}(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i)$ 得 $|Mc| \leqslant 2\sum_{i=0}^{M}|x_i|$ $(M \geqslant 1)$.

因此《$x' = x'P,\ x' \in (l)$》的通解为

$$(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i) = 0 \quad (i \in E),$$

即

$$x_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} x_0 \quad (i > 0),$$

$$x_{-i} = \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} x_0 \quad (i > 0).$$

令

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} + \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}}\right),$$

从 $x'P = x',\ x' \in (l)$ 的通解的形式看出:

当 $\delta = \infty$ 时,左方程只有 0 解,故 $\Pi = 0$;

当 $\delta < \infty$ 时,左方程有非 0 解 $x' = (x_i, i \in E)$,其中 $x_0 = 1$,

$$x_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}\ (i > 0), \quad x_{-i} = \frac{p_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}}\ (i > 0),$$

所以 $\Pi = \frac{1}{x'\mathbf{1}}\mathbf{1}x' = \frac{1}{1+\delta}\mathbf{1}x'$.

考虑 $A = P$ on $(E - \{0\})$ 为 0 之余阵,解 0 右方程《$Ay = y$, $y \geqslant 0,\ y \in (m)$》. 由 $Ay = y$ 得 (令 $y = (y_i, i \in E - \{0\})$)

$$y_{i+1} = \left(1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i}\right) y_1, \quad i \geqslant 1,$$

$$y_{-(i+1)} = \left(1 + \frac{p_{-1}}{q_{-1}} + \cdots + \frac{p_{-1} \cdots p_{-i}}{q_{-1} \cdots q_{-i}}\right) y_{-1}, \quad i \geqslant 1.$$

令

$$\theta_1 = \left(1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} + \cdots\right),$$

$$\theta_2 = \left(1 + \frac{p_{-1}}{q_{-1}} + \cdots + \frac{p_{-1}\cdots p_{-i}}{q_{-1}\cdots q_{-i}} + \cdots\right),$$

则由定理3.12有

$$\delta < \infty\ (\text{即}(\text{LC})) \Longleftrightarrow E = R_1^+;$$

$$\delta = \infty,\ \theta_1 = \theta_2 = \infty\ (\text{即}(\overline{\text{LC}}),(\overline{\text{RC}})_0) \Longleftrightarrow E = R_1^0;$$

$$\theta_1, \theta_2\ \text{中至少有一个有限}(\text{即}(\text{RC})_0) \Longleftrightarrow E = N.$$

例4.2　0处有反射屏的随机徘徊. 设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$, $P = (p_{i,j}, i,j \in E)$, $p_{0,0} = a_0$, $p_{0,1} = b_0$, $p_{0,j} = 0\ (j > 1)$, 当 $i \geqslant 1$ 时, $p_{i,i-1} = a_i$, $p_{i,i+1} = b_i$, $p_{i,j} = 0\ (i = j$ 或 $|i-j| > 1)$. $a_i + b_i = 1\ (i \in E)$, $a_i > 0\ (i \geqslant 1)$, $b_i > 0\ (i \geqslant 0)$.

显然 P 是不可约的. 解 $x' = x'P\ (x' = (x_0, x_1, \cdots))$, 即

$$(x_0, x_1, x_2, \cdots)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = (x_0, x_1, x_2, \cdots),$$

得

$$x_{n+1} = \frac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1} a_n \cdots a_1} x_0 \quad (n \geqslant 0).$$

令 $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1} a_n \cdots a_1}$, 则 $\delta < \infty \Longleftrightarrow (\text{LC})$. 故

$$\delta = \infty \Longrightarrow \Pi = 0;$$

$$\delta < \infty \Longrightarrow \Pi = \mathbf{1}\pi',\ \pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots),$$

$$\pi_{n+1} = \frac{1}{1+\delta}\left(\frac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1} a_n \cdots a_1}\right)\ (n \geqslant 0), \quad \pi_0 = \frac{1}{1+\delta}.$$

考虑 $A = P$ on $(E - \{0\})$ 为0的余阵. 解0右方程《$Ay = y$, $y \geqslant 0$, $y \in (m)$》. 记

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

由 $Ay = y$ 得：$y_2 - y_1 = \frac{a_1}{b_1}y_1$,

$$(y_{n+1} - y_n) = \frac{a_n}{b_n}(y_n - y_{n-1}) = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}y_1 \quad (n \geqslant 2),$$

故把上述各式求和即发现：

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}\right)y_1 \quad (n \geqslant 1).$$

若令 $\theta = \left(1 + \frac{a_1}{b_2} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \cdots\right)$，则 $\theta < \infty \Longleftrightarrow 0$ 右方程有非 0 解.所以

$$\delta < \infty \Longleftrightarrow E = R_1^+;$$

$$\delta = \infty,\ \theta = \infty \Longleftrightarrow E = R_1^0;$$

$$\theta < \infty \Longleftrightarrow E = N.$$

例 4.3 在 0 处具有吸收屏的随机徘徊.设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，$P = (p_{i,j},\ i,j \in E)$，$p_{0,0} = 1$，$p_{0,j} = 0$，当 $i \geqslant 1$ 时，$p_{i,i-1} = q_i$，$p_{i,i+1} = p_i$，$p_{i,j} = 0$（当 $i = j$ 或 $|i - j| > 1$），$p_i + q_i = 1$，$p_i > 0$，$q_i > 0$.

显然 P 是可约的，0 是正状态，其他都是暂留状态，因此 $\Pi = (\pi_{i,j},\ i,j \in E)$ 满足 $\pi_{0,0} = 1$，$\pi_{i,0} = a_i (i \geqslant 1)$，$\pi_{i,j} = 0\ (i \in E,\ j \geqslant 1)$，即

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & \\ a_1 & \\ a_2 & 0 \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

用定理 3.10，$\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ 是

$$\text{(U)}\quad 《P\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\\\vdots\end{pmatrix},0\leqslant y_i\leqslant 1\ (i\geqslant 1)》$$

的最小解.解之得

$$y_n=q_ny_{n-1}+p_ny_{n+1}\ \ (n\geqslant 1),\quad y_0=1.$$

即 $q_n(y_n-y_{n-1})=p_n(y_{n+1}-y_n)\ (n\geqslant 1)$,故

$$y_{n+1}-y_n=\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}(y_1-1)\quad (n\geqslant 1).$$

对 n 从 1 到 k 求和得

$$y_{k+1}-1=\left(1+\sum_{n=1}^{k}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}\right)(y_1-1)\quad (k\geqslant 1).$$

令 $\beta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}$,则

(1)　当 $\beta=\infty$ 时,方程(U)恰有唯一解

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\end{pmatrix}=\mathbf{1},$$

故 $\Pi=(\mathbf{1}\ 0)$,且 $f_{i,0}^{*}=a_i=1\ (i\in E)$.

(2)　当 $\beta<\infty$ 时,对(U)的任一解

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\end{pmatrix},$$

有 $0\leqslant\lim_{k\to\infty}y_k=1+\beta(y_1-1)$.故 $y_1\geqslant 1-\frac{1}{\beta}$,从而

$$y_{k+1}\geqslant 1-\frac{1}{\beta}\left(1+\sum_{n=1}^{k}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}\right)\qquad (k\geqslant 1).$$

显然

$$\tilde{y}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_0\\ \tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1-\dfrac{1}{\beta}\\ 1-\dfrac{1}{\beta}\left(1+\dfrac{q_1}{p_1}\right)\\ \vdots\end{pmatrix}$$

是(U)之解,所以 $\tilde{y}$ 是(U)之最小解.故 $\Pi=(\tilde{y}\,0)$.

特别地,若 $q_i\equiv q$, $p_i\equiv p$,则

(1) $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $\beta=\infty$, $\Pi=(\mathbf{1}\,0)$;

(2) $P>\frac{1}{2}$ 时, $\Pi=(\tilde{y}\,0)$,

$$\tilde{y}=\begin{pmatrix}1\\ q/p\\ (q/p)^2\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

例 4.4 更新过程,设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, $P=(p_{i,j}, i,j\in E)$, $p_{i,0}=q_i$, $p_{i,i+1}=p_i$, $p_{i,j}=0$ ($j\neq 0$ 或 $j\neq i+1$), $p_i>0$, $q_i>0$, $p_i+q_i=1$ ($i\in E$).

显然 P 是不可约的.解左方程,发现:

(1) 当 $\delta=\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_0p_1\cdots p_i<\infty$ 时,左方程有非0解:$x'=(1,p_0,p_0p_1,\cdots)$,故

$$\Pi=\mathbf{1}\left(\frac{1}{x'\mathbf{1}}\right)x'=\frac{1}{1+\delta}\mathbf{1}x'.$$

(2) 当 $\delta=\infty$ 时,左方程只有0解,$\Pi=0$.

考虑 $A=P$ on $(E-\{0\})$,解0右方程:

$$《Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m)》$$

发现:当 $\theta=\prod\limits_{i=0}^{\infty}p_i=0$ 时;0右方程只有0解;当 $\theta>0$ 时,0右方

程有非 0 解. 所以：

$$\delta < \infty \Longrightarrow E = R_1^+;$$

$$\delta = \infty,\ \theta = 0 \Longrightarrow E = R_1^0;$$

$$\delta = \infty,\ \theta > 0 \Longrightarrow E = N.$$

直接计算可知:《$Ay = y, 0 \leqslant y \leqslant \mathbf{1}$》的最大解是

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\quad a_i = p_i p_{i+1} \cdots\ (i \geqslant 1),$$

所以由命题 3.8 得 $f_{i,0}^* = 1 - a_i (i \geqslant 1)$, 从而

$$\begin{aligned} f_{0,0}^* &= p_{0,0} + p_{0,1} f_{1,0}^* = q_0 + p_0(1 - a_1) \\ &= q_0 + p_0(1 - p_1 p_2 \cdots) = 1 - \prod_{i=0}^{\infty} p_i. \end{aligned}$$

例 4.5　排队过程(一). 设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$, $P = (p_{i,j}, i,j \in E)$ 是下列形状之转移阵：

$$P = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$k_0 > 0,\ k_2 + k_3 + \cdots > 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} k_i = 1.$$

显然 P 是不可约的. 令 $K(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \lambda^i (|\lambda| \leqslant 1)$,

$$X(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i,\ x' = (x_0, x_1, \cdots) \in (l)\ (|\lambda| \leqslant 1).$$

解左方程《$x'P = x', x' \geqslant 0, x' \in (l)$》即等价于解母函数方程：

$$x'\Lambda = x'P\Lambda,\ x' \geqslant 0,\ x' \in (l),\ \Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

此即

$$X(\lambda) = x'\begin{pmatrix} K(\lambda) \\ K(\lambda) \\ \lambda K(\lambda) \\ \lambda^2 K(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

化简得

$$X(\lambda) = \frac{x_0(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}, \quad |\lambda| < 1.$$

若左方程有非 0 解，由上式得知 $x_0 > 0$，故由上式得

$$\lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{K(\lambda)-\lambda}{1-\lambda} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{x_0 K(\lambda)}{X(\lambda)} > 0,$$

此即$\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} < 1$. 反之若$\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} < 1$，易证左方程有非 0 解 x' 使

$$x'\Lambda = X(\lambda) = \frac{(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}.$$

所以

(1) 当$\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} \geqslant 1$，有 $\Pi = 0$；

(2) 当$\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} < 1$，有 $\Pi = \mathbf{1}\pi'$，若记 $\Pi(\lambda) = \pi'\Lambda$，则

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda) &= CX(\lambda) \\ &= \frac{C(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}, \end{aligned}$$

由 $\Pi(1) = \pi'\mathbf{1} = 1$，得 $C = 1 - \lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda}$.

下面研究状态空间 E 的分类.

(1) $\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} < 1 \Longleftrightarrow E = R_1^+$.

(2) 若$\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} = 1$，考虑

$$\widetilde{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\k_0&k_1&k_2&k_3&\cdots\\0&k_0&k_1&k_2&\cdots\\0&0&k_0&k_1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix},$$

则有

$$\widetilde{P}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix},$$

所以,由定理3.6知$\widetilde{P}$是无耗损,再用定理3.15知P有常返状态,由于P不可约,再注意(1),可知这时$E=R_1^0$.

(3)　若$\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda}>1$,由$k_0>0$, $k_i\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}k_i=1$得知存在$0<\alpha<1$,使$K(\alpha)=\alpha$.令

$$y=\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\\\vdots\end{pmatrix},$$

y是非常向量,且

$$Py=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha^2\\\alpha^3\\\vdots\end{pmatrix}\leqslant y,$$

所以由定理3.13知E不是一个常返类,而今P不可约,所以$E=N$.

例4.6　排队过程(二).设$E=\{0,1,2,\cdots\}$, $P=(p_{i,j}$,

$i,j\in E$)是下述形式的转移阵:

$$P=\begin{pmatrix}\beta_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \beta_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots\\ \beta_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots\\ \beta_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$\sum_{i=0}^{\infty}a_i=1,\ \beta_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots\ (i\geqslant 0),\ a_0>0,\ a_2+a_3+\cdots>0.$

显然,P 是不可约的.令 $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\lambda^i$,

$$\rho=\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}ia_i=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i.$$

引理 4.1 若 P 不可约,且存在 $x'=(x_i,i\in E)$, $x'\geqslant 0$, $\{x_i\}$ 有界, $\sum_{i\in E}x_i=\infty$, $x'p\leqslant x'$,则 E 无正状态.

证 由 $x'\geqslant x'P$,得 $x'\geqslant x'\left(\frac{1}{n}\sum_{\gamma=1}^{n}P^{(\gamma)}\right)$.再用 $x'\geqslant 0,\{x_i\}$ 有界得:$x'\geqslant x'\Pi$.若 E 有正状态,则由 P 不可约得 $\Pi=\mathbf{1}\pi'$ 行行一样,从而 $x'\geqslant x'\mathbf{1}\pi'=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x_i\right)\pi'$,此为不可能.

用引理 4.1 来处理例 4.6.

(1) 若 $\rho\leqslant 1$,记 $\mathbf{1}'=(1,1,\cdots)$ 是 $\mathbf{1}$ 之转置,有

$$\mathbf{1}'P=(\rho,1,1,\cdots)\leqslant\mathbf{1}'.$$

所以由引理 4.1 知 P 无正状态,故 $\Pi=0$.

(2) 若 $\rho>1$,则必存在 θ, $0<\theta<1$, $A(\theta)=\theta$,从而

$$(1,\theta,\theta^2,\cdots)P=(1,\theta,\theta^2,\cdots),$$

此即左方程有非0解,故 $E=R_1^+$, $\Pi=\mathbf{1}(1,\theta,\theta^2,\cdots)(1-\theta)$.注意:由于 $\Pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\gamma=1}^{n}P^{(\gamma)}$ 唯一存在,故 θ 也是唯一存在的.

考虑 $A=P$ on $(E-\{0\})$,解 0 右方程

$$\left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \geqslant 0,\ y \in (m) \right\rangle\!\right\rangle.$$

令 $\Lambda' = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$，$Y(\lambda) = \Lambda' y$，则由 $Ay = y$，$y \geqslant 0$，$y \in (m)$ 得

$$Y(\lambda) = \Lambda' A y = \left(\frac{A(\lambda) - a_0}{\lambda}, A(\lambda), \lambda A(\lambda), \lambda^2 A(\lambda), \cdots\right) y.$$

即 $\lambda Y(\lambda) = A(\lambda) Y(\lambda) - a_0 y_0$，亦即

$$(1 - \lambda) Y(\lambda) = \frac{a_0 y_0 (1 - \lambda)}{A(\lambda) - \lambda},$$

所以

$$\sum_{i=0}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \lambda^i = \frac{a_0 y_0}{a_0 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - \cdots}$$

(定义 $y_{-1} = 0$，$|\lambda| < 1$). 显然，0 右方程之任一解 y 都满足 $y_{i+1} \geqslant y_i \ (i \geqslant 0)$. 所以，若 0 右方程有非 0 解 y，则 $\lim\limits_{i \to \infty} y_i$ 存在且 > 0. 故把上式对 $\lambda \uparrow 1$ 取极限即得

$$\frac{a_0 y_0}{a_0 - (a_1 + a_2 + \cdots)} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \lambda^i = \lim_{i \to \infty} y_i$$

是有限正数. 因此，若 0 右方程有非 0 解 y，则必有

$$a_0 - (a_1 + a_2 + \cdots) > 0,$$

此即 $\rho < 1$. 所以，$\rho \geqslant 1$ 时，0 右方程只有 0 解，从而 E 无暂留状态. 前已证明 $\rho > 1 \Longrightarrow E = R_1^+$，所以 $\rho = 1 \Longrightarrow E = R_1^0$. 当 $\rho < 1$ 时，可证：若 $Y(\lambda) = \dfrac{a_0 y_0}{A(\lambda) - \lambda}$，$Y(\lambda) = \Lambda' y$，则 y 是 0 右方程的非 0 解，所以，$\rho < 1 \Longrightarrow E = N$. 总之

$$\rho > 1 \Longrightarrow E = R_1^+;$$

$$\rho = 1 \Longrightarrow E = R_1^0;$$

$$\rho < 1 \Longrightarrow E = N.$$

例 4.7　交换过程. 设某容器内之质点，每隔一单位时间发生

一次变化,已在其内之某质点可逃离此容器(其概率为 q) 也可留在其内(其概率为 p),不在其内之质点也可进入其内,进入的个数服从参数为 λ 的 Poisson 分布:

$$\left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} : k \geqslant 0 \right\}.$$

假定各质点之出、入、留是相互独立的.若用 ξ_n 表示时刻 n 时此容器内之质点数,则 $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ 是一个马尔可夫链,其转移阵 $P = (p_{i,j},\ i,j \geqslant 0)$ 如下:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) \\ &= \sum_{m+r=j} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!} \end{aligned}$$

($p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1,\ \lambda > 0,\ i,j \geqslant 0$),此处 C_m^i 表 i 个元素中取 m 个的组合数.

显然,$p_{i,j} > 0\ (i,j \geqslant 0)$,所以 P 是不可约无周期的.

解左方程《$x'P = x',\ x' \geqslant 0,\ x' \in (l)$》.令

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$X(s) = x'S,\ \varphi_i(s) = e^{\lambda(s-1)}(ps+q)^i\ (i \geqslant 0,\ 0 < s < 1)$.则 x' 是左方程之解的充要条件是:$x' \geqslant 0,\ x' \in (l)$,

$$\begin{aligned} X(s) = x'PS &= x' \begin{pmatrix} \varphi_0(s) \\ \varphi_1(s) \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda(s-1)} \sum_{i=0}^{\infty} x_i (ps+q)^i \\ &= e^{\lambda(s-1)} X(ps+q). \end{aligned}$$

若令 $Y(s)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda s}{q}}X(s)$,则上式即是

$$Y(s)=Y(ps+q)\quad(0<s<1).$$

再令 $f(s)=ps+q$, $f^n(s)$ 为 f 的 n 重复合函数,则由上式得

$$Y(s)=Y(f(s))=\cdots=Y(f^n(s)).$$

显然当 $0<s<1$ 时 $s\leqslant f(s)\leqslant\cdots\leqslant f^n(s)\leqslant 1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(s)=\sigma$ 存在,再由 $p\sigma+q=f(\sigma)=\sigma$ 及 $p+q=1$ 得 $\sigma=1$. 所以

$$Y(s)=\lim_{n\to\infty}Y(f^n(s))=Y(1)=c,$$

即是 $X(s)=c\mathrm{e}^{\frac{\lambda s}{q}}$. 因此左方程有非 0 解,所以 $E=R_1^+$. 且 $\Pi=\mathbf{1}\pi'$, $\pi'=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{q}}x'$, $x'S=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x_is^i=\mathrm{e}^{\frac{\lambda s}{q}}$. 亦即 $\pi'=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$,

$$\pi_i=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{q}}\cdot\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i\Big/i!\quad(i\geqslant 0).$$

§5　马尔可夫链的泛函的极限定理

在这一节中,恒设 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{T},P)$ 上的一个可数状态的马尔可夫链,其状态空间 $E=R_1$ 由一个常返类所构成,其转移阵为 $P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$. 再设 f 是定义在 E 上的一个实值函数, $y_n=f(X_n)$, $S_n=\sum\limits_{j=0}^{n}y_j$, $n=0,1,2,\cdots$. 由于 $E=R_1$,所以,任取 $i\in E$, $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 无穷多次处于状态 i 的概率为 1. 因此除去一个 Ω 中的零概率集 Λ,对每一个 $\omega\in\Omega-\Lambda$,序列 $\{X_n(\omega):n\geqslant 0\}$ 有无穷多项为 i. 不失普遍性,可设对每一个 $\omega\in\Omega$, $\{X_n(\omega):n\geqslant 0\}$ 均含一个恒为 i 的子序列,令此子序列为: $\{X_{\tau_\nu(i,\omega)}(\omega):\nu=1,2,\cdots\}$,此即 $\tau_\nu(i,\omega)$ 是 $\{X_n(\omega):n\geqslant 0\}$ 第 ν 次处于状态 i 的时刻,显然,

$$\tau_1(i,\omega)<\tau_2(i,\omega)<\cdots<\tau_\nu(i,\omega)<\cdots,\ \omega\in\Omega,\ i\in E,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\tau_\nu(i,\omega)=\infty,\ \omega\in\Omega,\ i\in E.$$

简记 $\tau_\nu(i,\cdot)$ 为 $\tau_\nu(i)$. 再令

$$\rho_\nu(i)=\tau_{\nu+1}(i)-\tau_\nu(i),$$

$l(n,i)$ 是由不等式

$$\tau_{l(n,i)}(i)\leqslant n<\tau_{l(n,i)+1}(i)\quad(n\geqslant 1)\tag{5.1}$$

所确定的唯一的非负整值随机变量(显然,$\tau_\nu(i),\rho_\nu(i),l(n,i)$ 都是随机变量). 由于本节均考虑 E 中一个固定状态 i,所以有时把 i 略去不写,而把 $\tau_\nu(i),\rho_\nu(i),l(n,i)$ 简写成 $\tau_\nu,\rho_\nu,l(n)$. 令

$$Y_\nu=\sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1}y_j,\tag{5.2}$$

则

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}y_j=\sum_{j=0}^{\tau_1-1}y_j+\sum_{\nu=1}^{l(n)}Y_\nu-\sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1}y_j,$$

若令 $Y'=\sum_{j=0}^{\tau_1-1}y_j,\ Y''(n)=\sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1}y_j$,则有

$$S_n=Y'+\sum_{\nu=1}^{l(n)}Y_\nu-Y''(n).\tag{5.3}$$

定义 5.1 令

$${}_Hp_{i,j}^{(n)}=P(X_n=j,\ X_k\overline{\in}H,\ 0<k<n\mid X_0=i\}\tag{5.4}$$

为由 i 出发中间未达 H 而于第 n 步到 j 的概率($i,j\in E,\ H\subset E,\ n\geqslant 1$),${}_Hp_{i,j}^{*}=\sum_{n=1}^{n}{}_Hp_{i,j}^{(n)}$,

$$e_{i,j}={}_ip_{i,j}^{*}\quad(i,j\in E),\tag{5.5}$$

$$\mathscr{T}_i(f)=\sum_{j\in E}e_{i,j}f(j)\quad(i\in E),\tag{5.6}$$

称 $\mathscr{T}_i(f)$ **是有限的**,如果(5.6)右方的级数绝对收敛,即

$$\mathscr{T}_i(|f|)<\infty.$$

引理 5.1 设 $E=R_1$ 是一个常返类,如果对某个 $i\in E$,$\mathscr{T}_i(f)$ 是有限的(相应地,非 0),则对一切 $i\in E$,$\mathscr{T}_i(f)$ 都是有限

的(相应地，非 0)，而且当 $\mathscr{T}_i(f)$ 和 $\mathscr{T}_i(g)$ 皆为有限时，$\mathscr{T}_i(f)/\mathscr{T}_i(g)$不依赖于 i.

证明参见[12] p.82 定理 6.

引理 5.2　设 $E=R_1$ 是一个常返类，则 $\{Y_\nu(i):\nu\geqslant 1\}$ 独立同分布(此处 $Y_\nu(i)$ 如(5.2)所定义，那里把 i 隐去了，而此处要区分 i，故标出之). 如果 $\mathscr{T}_i(f)$ 有限，则 $Y_\nu(i)$ 的期望存在而且等于

$$\boldsymbol{E}(Y_\nu(i))=\mathscr{T}_i(f)=\sum_{j\in E}ip^*_{i,j}f(j)\quad(\nu\geqslant 1,\ i\in E). \tag{5.7}$$

证　参见[12] p.78 定理 3 及 p.81 定理 5.

注意　由引理5.1，$\mathscr{T}_i(f)$ 的有限性及比 $\mathscr{T}_i(f)/\mathscr{T}_i(g)$ 均不依赖于 i，故论及 $\mathscr{T}_i(f)$ 的有限性及比例 $\mathscr{T}_i(f)/\mathscr{T}_i(g)$ 时，i 可略去.

定理 5.1　设 $E=R_1$ 是一个常返类，若 $\mathscr{T}(f)$ 和 $\mathscr{T}(g)$ 两者皆为有限且不同时为 0，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n}g(X_k)}=\frac{\mathscr{T}(f)}{\mathscr{T}(g)}. \tag{5.8}$$

证明参见[12] p.85 定理 1.

系 1　若 $E=R_1^+$ 是一个正类，$\mathscr{T}(f)$ 有限，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=\frac{\mathscr{T}_i(f)}{m_{i,i}}, \tag{5.9}$$

其中 $m_{i,i}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu f^{(\nu)}_{i,i}$ 如(1.18)所定义.

证　取 $g(j)\equiv 1\ (\forall j\in E)$，则由[12] p.49 定理 6，

$$\mathscr{T}_i(g)=\sum_{j\in E}ip^*_{i,j}=m_{i,i}<\infty.$$

故由定理 5.1 即得系 1.

系 2　在系 1 的条件下，若取 $\left\{q_j=\dfrac{ip^*_{i,j}}{m_{i,i}}:j\in E\right\}$ 为 X_0 的分

布(i 固定),则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=\boldsymbol{E}(f(X_0)),\tag{5.10}$$

且$\{q_j:j\in E\}$是$\{X_0,X_1,\cdots\}$的平稳分布.

证 显然$\{q_j:j\in E\}$是分布,再用(5.9)及$\mathscr{T}_j(f)=\sum_{j\in E}f(j)ip^*_{i,j}$即得(5.10).

至于$\{q_j:j\in E\}$是$\{X_n:n\geqslant 0\}$的平稳分布(即$P(X_n=j)=q_j$, $\forall n\geqslant 0$, $j\in E$)可由[12] p.50 定理得出.

附注 1 系 2 是马尔可夫链$\{X_n:n\geqslant 0\}$的泛函的强大数定律.当f是由E到$\mathbf{R}$中的可数子集Q的一一对应时,$\{f(X_n):n\geqslant 0\}$也是马尔可夫链.

令$\tau_\nu,\rho_\nu,l(n),S_n,Y_\nu,Y'(n),Y''(n)$如本节开始所定义.以后恒设$\boldsymbol{E}(Y_\nu)$存在,即$\mathscr{T}(f)$有限.$E=R_1^+$.

再令$\mu=\boldsymbol{E}(Y_\nu)/\boldsymbol{E}(\rho_\nu)$, $\bar f=f-\mu$, $z_j=\bar f(X_j)=y_j-\mu$,

$$Z_\nu=\sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1}z_j,\quad U_\nu=\sum_{j=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1}|z_j|,$$

则有

$$\begin{aligned}S_n-n\mu&=\sum_{j=0}^{\tau_1-1}z_j+\sum_{\nu=1}^{l(n)}Z_\nu-\sum_{j=n+1}^{\tau_{l(n)+1}-1}z_j\\&\xlongequal{\text{记作}}Z'+\sum_{\nu=1}^{l(n)}Z_\nu-Z''(n).\end{aligned}\tag{5.11}$$

再设$\boldsymbol{E}(U_\nu^2)<\infty$, $0<\sigma^2=\mathrm{Var}(Z_\nu)=\boldsymbol{E}(Z_\nu^2)<\infty$(其中$\mathrm{Var}(Z_\nu)\equiv\boldsymbol{E}(Z_\nu^2)-\boldsymbol{E}(Z_\nu)^2$表$Z_\nu$的方差).令$B=\pi_i\sigma^2$,其中$\pi_i=\pi_{i,i}$, $\Pi=(\pi_{i,j},\ j,i\in E)$是$P$的遍历极限,因为$E=R_1^+$,从而$\pi_i>0$.再令

$$S_r^*(n)=\frac{S_r-r\mu}{\sqrt{nB}},\quad W_\nu=\frac{Z_\nu}{\sigma},\tag{5.12}$$

由引理 5.2 得知$\{W_\nu:\nu\geqslant 1\}$是相互独立相同分布的随机变量序

列，而且 $E(W_\nu)=0$，$\mathrm{Var}(W_\nu)=1$. 对任意正整数 n,r 及正数 b，令

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}W_k,\quad Q_r^*(b)=\sum_{k=1}^{r}W_k/\sqrt{b}. \tag{5.13}$$

定义 5.2　令

$$C=\{\xi:[0,1]\mapsto\mathbf{R},\ \text{连续},\ \xi(0)=0\};$$

$\mathscr{H}$ 是使一切 $h_t(t\in[0,1])$ 为可测的最小 σ 代数，其中 $h_t(\xi)=\xi(t)$ 是坐标函数($\xi\in C$)；W 是 $\mathscr{H}$ 上的 Wiener 测度. 于是得一概率空间 $(C,\mathscr{H},W)$，此即第五章 §2 中的 **Wiener** 空间.

定理 5.2　令

$$I_{k,j}=\left(\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right],\quad j=1,2,\cdots,k;\ k=1,2,\cdots;$$

$$u_n(t;\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\begin{cases}\lambda_1, & \text{若 } t=0,\\ \lambda_j, & \text{若 } t\in I_{n,j},\ j=1,\cdots,n;\end{cases}$$

$X=\{\xi(t):\xi(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的有界实值函数，且除了有限个跳跃点以外均连续$\}$，在 X 中定义距离

$$\rho:\rho(\xi_1,\xi_2)=\sup_{t\in[0,1]}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|,$$

令 $\mathscr{G}$ 是由距离 ρ 所产生的拓扑，$\mathscr{B}^X$ 是拓扑 σ 代数，即由全体开集所产生的 σ 代数. 于是有可测拓扑空间 $(X,\mathscr{G},\mathscr{B}^X)$. 设 $C_1\subset C$ (C 之定义见定义 5.2) $\subset X$，$W(C_1)=1$，$F(\xi)$ 是定义在 X 上的泛函，且对 $\mathscr{G}$ 拓扑来说在 C_1 上连续，对 $\mathscr{B}^X$ 来说可测，则

$$\lim_{n\to\infty}P(F(u_n(t;S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n)))<\lambda)=W(F(\xi)<\lambda) \tag{5.14}$$

在 $W(F(\xi)<\lambda)$ 的任一连续点 λ 上成立.

本定理之证明很长，为省篇幅，在此从略，有兴趣的读者可参看文献[31].

系 1　在定理 5.2 的条件下，若取

$$F(\xi)=\xi(1), \tag{5.15}$$

取 $\{q_j\triangleq ip_{i,j}^*/m_{i,i}:j\in E\}$ 为马尔可夫链 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 的平稳分

布,则(5.14)化为

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n^*(n) < \lambda) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{nB}} < \lambda\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k) - \boldsymbol{E}\left(\sum_{k=0}^{n} f(X_k)\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\sum_{k=0}^{n} f(X_k)\right)}} < \lambda\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t, \tag{5.16}$$

此即马尔可夫链的泛函$\{f(X_n):n \geqslant 0\}$的中心极限定理.

证 首先注意:若取 $F(\xi) = \xi(1)$,则(5.14)左方的

$$F(u_n(t;S_1^*(n),\cdots,S_n^*(n))) = S_n^*(n). \tag{5.17}$$

由于$\{q_j \triangleq ip_{i,j}^*/m_{i,i}:j \in E\}$是$\{X_n:n \geqslant 0\}$的平稳分布且$\mathscr{T}_i(f)$有限(即 $\boldsymbol{E}(Y_\nu(i))$ 存在),所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(Y_\nu(i)) = \mathscr{T}_i(f) &= \sum_{j\in E} f(j) ip_{i,j}^* \\ &= m_{i,i}\boldsymbol{E}(f(X_k)) \quad (k \geqslant 0).\end{aligned} \tag{5.18}$$

由 $m_{i,i}$ 及ρ_i 的定义与定理 3.3 有

$$\boldsymbol{E}(\rho_\nu(i)) = m_{i,i} = \frac{1}{\pi_{i,i}}. \tag{5.19}$$

而

$$\mu = \boldsymbol{E}(Y_\nu(i))/\boldsymbol{E}(\rho_\nu(i)), \tag{5.20}$$

由(5.18),(5.19),(5.20)得

$$\mu = \boldsymbol{E}(f(X_k)). \tag{5.21}$$

仿此可证

$$B = \operatorname{Var}(f(X_k)). \tag{5.22}$$

由(5.17),(5.21),(5.22)和(5.14)即得(5.16).

第七章　马尔可夫过程的一般理论

§1　基本概念及存在性定理

"马尔可夫性"是俄国数学家 A. A. Марков 在 1906 年最早提出的. 一般认为有关马尔可夫过程的最早的论文是[46]. 然而什么是马尔可夫性呢？通俗地说，可以认为它是"相互独立性"的一种自然推广. 设有一串随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, \cdots$（用严格的概率论述语说，即 A_n 属于概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中的 σ 代数 $\mathscr{F}$，$n \geqslant 1$），如果它们中一个或几个的发生，对其他事件的发生与否没有影响，则称这一串事件是相互独立的（用概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 的符号表示，即 $P(\bigcap_{n=1}^{m} A_n) = \prod_{n=1}^{m} P(A_n)$），稍微推广，如果在已知 A_n 发生的条件下，$A_{n+1}, A_{n+2}, \cdots$ 中的某些事件的发生，与 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 中的事件的发生与否无关，则称这一串事件 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 具有马尔可夫性. 如果把"时刻 n"看作"现在"，那么马尔可夫性可以解释为"知道现在"，"过去"与"将来"是相互独立的. 所以说，可尔可夫性可视为相互独立性的一种自然推广.

从朴素的马尔可夫性，到抽象出马尔可夫过程的概念，从最简单的马尔可夫过程（时齐的、离散时间的、有限状态的）到一般的马尔可夫过程，经历了几十年的发展过程.

下面我们给出马尔可夫过程的严格定义.

在这一章中，恒设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间. $(E, \mathscr{E})$ 为任一可测

空间, $\mathbf{T}\subset[-\infty,\infty]$. 并记 $\boldsymbol{E}(X,\Lambda)=\int_\Lambda X\mathrm{d}P$.

定义 1.1 设 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一族单调非降子 σ 代数族, $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的适应于 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程. 如果对每个 $t\in\mathbf{T}$, σ 代数 $\mathscr{F}_t$ 与 $\mathscr{G}^t=\sigma(X(s),s\geqslant t,s\in\mathbf{T})$ 关于 $\sigma(X(t))$ 条件独立, 即对任何 $A\in\mathscr{F}_t$, $B\in\mathscr{G}^t$, 有

$$P(A\cap B\mid X(t))=P(A\mid X(t))P(B\mid X(t)),$$

则说 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的**马尔可夫过程**. 特别地, 若 $\mathscr{F}_t=\mathscr{G}_t\equiv\sigma(X(s),s\leqslant t,s\in\mathbf{T})$, 则简称 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是马尔可夫过程.

若 E 是可数集, $\mathscr{E}$ 是 E 的全体子集构成的 σ 代数, 则称以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的马尔可夫过程为可数状态的马尔可夫过程. 对于可数状态的马尔可夫过程而言, 欲对 E 中每一个单点集 $\{i\}\in\mathscr{E}$, 必有 $\mathscr{E}$ 含 E 的一切子集, 所以, 今后言及可数状态的马尔可夫过程, 其状态空间只需说明 E 是什么即可, 而 $\mathscr{E}$ 就不再提及了.

定理 1.1 设 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的适应于 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的随机过程, 则下列陈述等价:

(0) $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的马尔可夫过程;

(i) $P(A\cap B\mid X(t))=P(A\mid X(t))P(B\mid X(t))$

$$(A\in\mathscr{F}_t,\ B\in\mathscr{G}^t=\sigma(X(s),s\geqslant t,s\in\mathbf{T}),\ t\in\mathbf{T}); \tag{1.1}$$

(ii) $$P(X(u)\in\Lambda\mid\mathscr{F}_t)=P(X(u)\in\Lambda\mid X(t))\quad(\Lambda\in\mathscr{E},\ u\geqslant t,\ t,u\in\mathbf{T}); \tag{1.2}$$

(iii) $$\boldsymbol{E}(\xi\mid\mathscr{F}_t)=\boldsymbol{E}(\xi\mid X(t))\quad(\xi\in\mathrm{b}\sigma(X(u)),\ u\geqslant t,\ t,u\in\mathbf{T}); \tag{1.3}$$

(iv) $$\boldsymbol{E}(\xi\mid\mathscr{F}_t)=\boldsymbol{E}(\xi\mid X(t))\quad(\xi\in\sigma(X(u)),\ \boldsymbol{E}(|\xi|)<\infty,\ u\geqslant t,\ t,u\in\mathbf{T}); \tag{1.4}$$

（ⅴ）　对任意 $t \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_m$, $t, u_i \in \mathbf{T}$, $\Lambda_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, \cdots, m)$，有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X(u_i) \in \Lambda_i\} \mid \mathscr{F}_t\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X(u_i) \in \Lambda_i\} \mid X(t)\right); \tag{1.5}$$

（ⅵ）　$\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi \mid X(t)) \quad (\xi \in \mathrm{b}\mathscr{G}^t,\ t \in \mathbf{T});$ (1.6)

（ⅶ）　$\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi \mid X(t))$

$$(\xi \in \mathscr{G}^t,\ \boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty,\ t \in \mathbf{T}); \tag{1.7}$$

（ⅷ）　$\boldsymbol{E}(\xi \cdot \eta \mid X(t)) = \boldsymbol{E}(\xi \mid X(t)) \cdot \boldsymbol{E}(\eta \mid X(t))$

$$(\xi \in \mathrm{b}\mathscr{F}_t,\ \eta \in \mathrm{b}\mathscr{G}^t,\ t \in \mathbf{T}). \tag{1.8}$$

证　（ⅰ）$\Longrightarrow$（ⅱ）. 设（ⅰ）成立. 由第四章定理 4.2 知：对任何 $B \in \mathscr{G}^t$，有

$$P(B \mid \sigma(X(t)) \vee \mathscr{F}_t) = P(B \mid \sigma(X(t))). \tag{1.9}$$

显然 $\sigma(X(t)) \vee \mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t$. 特别地，取 $B = \{X(u) \in A\}$, $A \in \mathscr{E}$, $u \geqslant t$，必有 $B \in \mathscr{G}^t$，所以，由(1.9)式得

$$P(X(u) \in A \mid \mathscr{F}_t) = P(X(u) \in A \mid X(t)).$$

（ⅱ）得证.

（ⅱ）$\Longrightarrow$（ⅲ）. 设（ⅱ）成立. 任取 $u \geqslant t$, $t, u \in \mathbf{T}$. 令

$$L = \{\xi : \xi \in \mathrm{b}\sigma(X(u)),\ \xi \text{ 使(1.3)成立}\}.$$

由(1.2)知：

(a)　$1 \in L$, $\mathbf{1}_B \in L$ $(\forall B \in \sigma(X(u)))$;

(b)　$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi \in \mathrm{b}\sigma(X(u))$, $\xi_n \in L \Longrightarrow \xi \in L$.

所以由单调类定理知：$\mathrm{b}\sigma(X(u)) \subset L$，即（ⅲ）成立.

（ⅲ）$\Longrightarrow$（ⅳ）. 设（ⅲ）成立. 任取 $u \geqslant t, u, t \in \mathbf{T}$, $\xi \in \sigma(X(u))$, $\boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty$. 令 $\xi^+ = \xi \vee 0$, $\xi^- = (-\xi) \vee 0$, $\xi_n^+ = 0$ 或 ξ^+ 由 $\xi^+ > n$ 或 $\xi^+ \leqslant n$ 而定，$\xi_n^- = 0$ 或 ξ^- 由 $\xi^- > n$ 或 $\xi^- \leqslant n$ 而定. 则 $\xi_n^+, \xi_n^- \in \mathrm{b}\sigma(X(u))$, $\xi_n^+ \uparrow \xi^+$, $\xi_n^- \uparrow \xi^-$. 但是由（ⅲ）成立有

$$E(\xi_n^+ \mid \mathscr{F}_t) = E(\xi_n^+ \mid X(t)),$$

令 $n \to \infty$ 得

$$E(\xi^+ \mid \mathscr{F}_t) = E(\xi^+ \mid X(t)).$$

仿之有

$$E(\xi^- \mid \mathscr{F}_t) = E(\xi^- \mid X(t)).$$

而 $\xi = \xi^+ - \xi^-$,所以由上述两式即得(ⅳ).

(ⅳ)$\Longrightarrow$(ⅴ). 设(ⅳ)成立. 任取 $t \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_m$, $t, u_i \in \mathbf{T}$, $A_i \in \mathscr{E}\,(1 \leqslant i \leqslant m)$.

(a) 若 $m = 1$,则(1.5)是(1.4)的特例,故(ⅳ)$\Longrightarrow$(ⅴ).

(b) 若(1.5)式对 $m = k - 1$ 成立,令

$$B_1 = \{X(u_1) \in A_1\}, \quad B_2 = \bigcap_{j=2}^{k} \{X(u_j) \in A_j\},$$
$$B = B_1 \cap B_2,$$

则由归纳法假设及(ⅳ)得

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \{X(u_j) \in A_j\} \mid \mathscr{F}_t\Big) &= E(\mathbf{1}_{B_1} \cdot \mathbf{1}_{B_2} \mid \mathscr{F}_t) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1} E(\mathbf{1}_{B_2} \mid \mathscr{F}_{u_1}) \mid \mathscr{F}_t) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1} E(\mathbf{1}_{B_2} \mid X(u_1)) \mid \mathscr{F}_t) \\ &\overset{(\text{iv})}{=} E(\mathbf{1}_{B_1} E(\mathbf{1}_{B_2} \mid X(u_1)) \mid X(t)). \end{aligned} \tag{1.10}$$

但是

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \{X(u_j) \in A_j\} \mid X(t)\Big) &= E(\mathbf{1}_{B_1} \cdot \mathbf{1}_{B_2} \mid X(t)) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1} E(\mathbf{1}_{B_2} \mid \mathscr{F}_{u_1}) \mid X(t)) \\ &= E(\mathbf{1}_{B_1} E(\mathbf{1}_{B_2} \mid X(u_1)) \mid X(t)). \end{aligned} \tag{1.11}$$

由(1.10)、(1.11)得(1.5). 归纳法完成.

(ⅴ)$\Longrightarrow$(ⅵ). 设(ⅴ)成立,令

$$L = \{\xi : \xi \in b\mathscr{G}^t,\ \xi \text{ 使(1.6)成立}\},$$

则

(a) $\mathbf{1}\in L$, $\mathbf{1}_B\in L$,其中 $B\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}=\{\bigcap_{j=1}^{m}\{X(u_j)\in A_j\}$: $u_j\geqslant t$, $A_j\in\mathscr{E}$, $j=1,\cdots,m$, $m\geqslant 1\}$; $\mathfrak{M}$ 是 Π 系,$\sigma(\mathfrak{M})=\mathscr{G}^t$;

(b) $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi\in \mathrm{b}\mathscr{G}^t$, $\xi_n\in L\Longrightarrow\xi\in L$.

所以由单调类定理得:$\mathrm{b}\mathscr{G}^t\subset L$,即(vi)成立.

(vi)⟹(vii). 仿(iii)⟹(iv)可证(vi)⟹(vii).

(vii)⟹(viii). 设(vii)成立.任取 $A\in\mathscr{F}_t$, $B\in\mathscr{G}^t$,则由(vii)有

$$
\begin{aligned}
&P(A\cap B\mid X(t))\\
&\quad=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_B\mid\mathscr{F}_t)\mid X(t))\\
&\quad=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_B\mid X(t))\mid X(t))\\
&\quad=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\mid X(t))\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_B\mid X(t)).
\end{aligned}\tag{1.12}
$$

由(1.12)和单调系定理可得

$$
\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\cdot\eta\mid X(t))=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\mid X(t))\boldsymbol{E}(\eta\mid X(t))\quad(A\in\mathscr{F}_t,\ \eta\in\mathrm{b}\mathscr{G}^t,\ t\in\mathbf{T}).\tag{1.13}
$$

由(1.13)和单调系定理可得(1.8)式.

(viii)⟹(i). (i)是(viii)的特例,故此蕴含关系成立.

注意 (1.1) ~ (1.8) 都称为马尔可夫性.

在定理 1.1 中,特别地,取 $\mathscr{F}_t=\mathscr{G}_t\triangleq\sigma(X(u),\ u\leqslant t,\ u\in\mathbf{T}\}$ 时,我们有:

定理 1.1′ 设 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程,则下列陈述等价:

(i) $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是马尔可夫过程;

(ii) 对任何正整数 n,任何 $u\geqslant t_n\geqslant\cdots\geqslant t_1$, $t_j,u\in\mathbf{T}$,任何 $A\in\mathscr{E}$,都有

$$
\begin{aligned}
&P(X(u)\in A\mid X(t_1),\cdots,X(t_n))\\
&\quad=P(X(u)\in A\mid X(t_n)).
\end{aligned}\tag{1.14}
$$

(iii) 对任何正整数 n,任何 $u\geqslant t_n\geqslant\cdots\geqslant t_1,t_j,u\in\mathbf{T}$,

任何 $f \in b\mathscr{E}$,有

$$\boldsymbol{E}(f(X(u)) \mid X(t_1),\cdots,X(t_n)) = \boldsymbol{E}(f(X(u)) \mid X(t_n)). \tag{1.15}$$

证 (ⅰ)⟹(ⅱ). 设(ⅰ)成立.由定理1.1的(ⅱ)得知

$$P(X(u) \in A \mid \mathscr{G}_{t_n}) = P(X(u) \in A \mid X(t_n)).$$

若注意 $\mathscr{G}_{t_n} \supset \sigma(X(t_1),\cdots,X(t_n)) \supset \sigma(X(t_n))$,则由上式即得(1.14)式.

(ⅱ)⟹(ⅲ). 用单调系定理立即可证此事实.

(ⅲ)⟹(ⅰ). 设(ⅲ)成立.为证(ⅰ),用定理1.1,只需证明(1.3)式(对 $\mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t$)成立.为此,用复合函数的可测性定理,只需证明:

$$\boldsymbol{E}(f(X(u)) \mid \mathscr{G}_t) = \boldsymbol{E}(f(X(u)) \mid X(t)) \quad (u \geqslant t,\ u,t \in \mathbf{T},\ f \in b\mathscr{E}). \tag{1.16}$$

若注意 $\mathscr{G}_t \supset \sigma(X(t))$,为证(1.16)只需证

$$\int_A f(X(u))P(d\omega) = \int_A \boldsymbol{E}(f(X(u)) \mid X(t))P(d\omega) \quad (\text{对一切 } A \in \mathscr{G}_t). \tag{1.17}$$

令

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{G}_t : A \text{ 使(1.17)成立}\},$$

$$\mathfrak{M} = \{A = \bigcap_{j=1}^{n}\{X(t_j) \in \Lambda_j\} : t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n = t,\ \Lambda_j \in \mathscr{E},\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ n \geqslant 1\},$$

则 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系,$\mathscr{D}$ 是 d 系,而且由(1.15)有

$$\mathfrak{M} \subset \mathscr{D}.$$

又因为 $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathscr{G}_t$,所以 $\mathscr{D} \supset d(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}) = \mathscr{G}_t$.(1.17)得证.定理证毕.

定义1.2 设$(E,\mathscr{E})$为任意可测空间,称 $P(s,x,t,A)$ $(s<t,\ s,t \in \mathbf{T},\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$为$(E,\mathscr{E})$上的**准转移函数**,简称准转移

函数,如果:

（ⅰ）　固定 s,t,x, $P(s,x,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度,且

$$P(s,x,t,E)\leqslant 1;$$

（ⅱ）　固定 s,t,A, $P(s,\cdot,t,A)\in\mathscr{E}$;

（ⅲ）　对任何 $s<t<u$, $s,t,u\in\mathbf{T}$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$,有

$$P(s,x,u,A)=\int_E P(s,x,t,\mathrm{d}y)\,P(t,y,u,A)\quad(1.18)$$

((1.18) 称为 Kolmogorov-Chapman 方程式,简称 K-C 方程式).

满足 $P(s,x,t,E)\equiv 1$ 的准转移函数称为**转移函数**.如果存在函数 $P(t,x,A)$ 使

$$P(s,x,t,A)=P(t-s,x,A)\quad(s<t,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$

则称$P(t,x,A)$ 是**时齐的(准)转移函数**.这时 K-C 方程式变为

$$P(s+t,x,A)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$

$$(s,t>0,\ s+t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).\qquad(1.18)'$$

定义 1.3　设$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是以$(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的适应于$\{\mathscr{F}_t\}$ 的随机过程,$P(s,x,t,A)$ 是$(E,\mathscr{E})$ 上的转移函数.如果

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))\mid\mathscr{F}_t)=P_{t,u}(X(t),f)$$

$$(t<u,\ t,u\in\mathbf{T},\ f\in\mathrm{b}\mathscr{E}),\qquad(1.19)$$

$$P_{t,u}(x,f)=\int_E P(t,x,u,\mathrm{d}y)f(y),\qquad(1.20)$$

则称$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是**关于$\{\mathscr{F}_t\}$ 的以 $\boldsymbol{P(s,x,t,A)}$ 为转移函数的马尔可夫过程**,或称之为**关于$\{\mathscr{F}_t\}$ 规则的马尔可夫过程**.

注意:定义 1.3 是与定义 1.1 相容的,即是说关于$\{\mathscr{F}_t\}$ 的规则马尔可夫过程必为关于$\{\mathscr{F}_t\}$ 的马尔可夫过程.事实上,把(1.19)式两边关于 $\sigma(X(t))$ 取条件期望并注意 $\mathscr{F}_t\supset\sigma(X_t)$ 即得

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))\mid X(t))=P_{t,u}(X(t),f)\quad(t<u,\ f\in\mathrm{b}\mathscr{E}),\qquad(1.21)$$

由(1.19)、(1.21) 和定理 1.1 的(ⅲ) 可知$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是关于

$\{\mathscr{F}_t\}$ 的马尔可夫过程.

当然逆命题未必成立.

与通常一样,我们说 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是规则的(或具有转移函数 $P(s,x,t,A)$ 的)马尔可夫过程,而不特别指出 σ 代数 $\{\mathscr{F}_t\}$,那就意味着 $\mathscr{F}_t\equiv\sigma(X(s),s\leqslant t,s\in\mathbf{T})$.

转移函数的直观意义是:$P(s,x,t,A)$ 代表"给定 $X(s)=x$ 时,$X(t)\in A$ 的条件概率".

定义 1.4 称关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的马尔可夫过程是**时齐的**,如果它的转移函数是时齐的.

定理 1.2 设 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程,μ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度,$P(s,x,t,A)$ 是转移函数,$\mathbf{T}$ 有左端点,不妨令之为 0. 则 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 是以 $P(s,x,t,A)$ 为转移函数、以 μ 为初始分布(即 $\mu=P\circ X_0^{-1}$)的马尔可夫过程的充要条件是:对任何 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$, $t_i\in\mathbf{T}$, $f\in \mathrm{b}\mathscr{E}^n$($\mathscr{E}^n$ 是 $\mathscr{E}$ 的 n 重乘积), $n\geqslant 1$,都有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(f(X(t_1),\cdots,X(t_n)))\\&=\int_E\mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots\\&\quad\cdot\int_E P(t_{n-1},x_{n-1},t_n,\mathrm{d}x_n)f(x_1,\cdots,x_n)\\&\quad(P(0,x,0,A)=\mathbf{1}_A(x)).\end{aligned}\tag{1.22}$$

特别地,若取 $f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{A_j}(x_j)$,则(1.22) 算出了 $\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$ 的有限维分布.

证 必要性. 令

$$\mathscr{H}=\{f:f\in \mathrm{b}\mathscr{E}^n,\ f\text{ 使(1.22) 成立}\},$$

$$\mathscr{H}_k^*=\left\{f:\ f\in\mathrm{b}\mathscr{E}^k,\ f=\prod_{i=1}^{k}f_i(x_i),\ f_i\in\mathrm{b}\mathscr{E}\right\},$$

$$\mathfrak{M}=\left\{A:A=\bigtimes_{i=1}^{n}A_i,\ A_i\in\mathscr{E}\right\},$$

则 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系,且 $\sigma(\mathfrak{M})=\mathscr{E}^n$,所以为了证明(1.22)对一切 $f\in b\mathscr{E}^n$ 成立,利用单调系定理,只需证明:

(i) $1\in\mathscr{H},\ \mathbf{1}_A\in\mathscr{H}\ \ (\forall A\in\mathfrak{M})$;

(ii) $0\leqslant f_m\uparrow f\in b\mathscr{E}^n,\ f_m\in\mathscr{H}\Longrightarrow f\in\mathscr{H}$.

只证 $\mathbf{1}_A\in\mathscr{H}\ (\forall A\in\mathfrak{M})$,其他均属显然,下面我们证明更强的结果:

$$\mathscr{H}_n^*\subset\mathscr{H}.$$

任取 $f\in\mathscr{H}_1^*=b\mathscr{E}$,由马尔可夫性(1.21)可证:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(f(X(t)))&=\boldsymbol{E}(P_{0,t}(X(0),f))\\&=\int_E\mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t,\mathrm{d}x)f(x).\end{aligned}$$

此即 $\mathscr{H}_1^*\subset\mathscr{H}$.

设 $\mathscr{H}_k^*\subset\mathscr{H}\,(k<n)$,推证 $\mathscr{H}_{k+1}^*\subset\mathscr{H}$. 事实上,令 $\mathscr{G}_t^0=\sigma(X(u),u\leqslant t,u\in\mathbf{T})$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\Big(\prod_{i=1}^{k+1}f_i(X(t_i))\Big)&=\boldsymbol{E}\Big(\boldsymbol{E}\Big(\prod_{i=1}^{k+1}f_i(X(t_i))\mid\mathscr{G}_{t_k}^0\Big)\Big)\\&=\boldsymbol{E}\Big(\prod_{i=1}^{k}f_i(X(t_i))\cdot\boldsymbol{E}\big[f_{k+1}(X_{t_{k+1}})\mid X(t_k)\big]\Big)\\&\overset{\text{记作}}{=}\boldsymbol{E}\Big(\prod_{i=1}^{k}f_i(X(t_i))\cdot g(X(t_k))\Big)\\&=\int_E\mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots\\&\quad\cdot\int_E P(t_{k-1},x_{k-1},t_k,\mathrm{d}x_k)\cdot g(x_k)\prod_{i=1}^{k}f_i(x_i).\end{aligned}\tag{1.23}$$

但是,由(1.21)有

$$\begin{aligned}g(X(t_k))&=\boldsymbol{E}(f_{k+1}(X(t_{k+1}))\mid X(t_k))\\&=\int_E P(t_k,X(t_k),t_{k+1},\mathrm{d}x_{k+1})f_{k+1}(x_{k+1}).\end{aligned}\tag{1.24}$$

将(1.24)代入(1.23)得

$$\boldsymbol{E}\Big(\prod_{i=1}^{k+1} f_i(X(t_i))\Big) = \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots$$
$$\cdot\int_E P(t_k,x_k,t_{k+1},\mathrm{d}x_{k+1})\prod_{i=1}^{k+1} f_i(x_i).$$

归纳法完成.所以 $\mathscr{H}_n^* \subset \mathscr{H}$.故(1.22)成立.

充分性.设(1.22)成立.则对任何 $s<t$, $f\in b\mathscr{E}$, $A\in\mathscr{E}$,有

$$\int_{\{X(s)\in A\}} P_{s,t}(X(s),f)P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_A\Big(\int_E P(s,x,t,\mathrm{d}y)f(y)\Big)(P\circ X(s)^{-1})(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,s,\mathrm{d}x)$$
$$\cdot\int_E P(s,x,t,\mathrm{d}y)\mathbf{1}_A(x)f(y), \tag{1.25}$$

$$\int_{\{X(s)\in A\}} f(X(t))P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,s,\mathrm{d}x)$$
$$\cdot\int_E P(s,x,t,\mathrm{d}y)\mathbf{1}_A(x)f(y). \tag{1.26}$$

由(1.25)、(1.26)及 $P_{s,t}(X(s),f)\in\sigma(X(s))$ 得

$$P_{s,t}(X(s),f) = \boldsymbol{E}(f(X(t))\mid X(s)) \quad (s<t,\ f\in b\mathscr{E}). \tag{1.27}$$

任取正整数 n,任取 $u>t_n>\cdots>t_1$, $f\in b\mathscr{E}$, $A\in\mathscr{E}^n$, $\Lambda=\{(X(t_1),\cdots,X(t_n))\in A\}$,由(1.27)及(1.22)有

$$\int_\Lambda \boldsymbol{E}(f(X(u))\mid X(t_n))P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_\Lambda P_{t_n,u}(X(t_n),f)P(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots$$

$$\cdot\int_E P(t_{n-1},x_{n-1},t_n,\mathrm{d}x_n)$$

$$\cdot P_{t_n,u}(x_n,f)\mathbf{1}_A(x_1,\cdots,x_n)$$

$$= \boldsymbol{E}(f(X(u))\mathbf{1}_\Lambda). \tag{1.28}$$

由(1.28)得

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))\mid X(t_1),\cdots,X(t_n)) = \boldsymbol{E}(f(X(u))\mid X(t_n)),$$

所以$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$是马尔可夫过程.再用定理1.1有

$$\boldsymbol{E}(f(X(t))\mid \mathscr{G}_s^0) = \boldsymbol{E}(f(X(t))\mid X(s)) \quad (s<t,\ f\in \mathrm{b}\mathscr{E}), \tag{1.29}$$

由(1.27)、(1.29)得

$$\boldsymbol{E}(f(X(t))\mid \mathscr{G}_s^0) = P_{s,t}(X(s),f) \quad (s<t,\ f\in \mathrm{b}\mathscr{E}).$$

即$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$是以$P(s,x,t,A)$为转移函数、以μ为初始分布的马尔可夫过程.

现在我们要问:任给可测空间$(E,\mathscr{E})$及其上的一个概率测度μ和一个转移函数$P(s,x,t,A)$,$\mathbf{T}$含左端点,不妨令之为0,是否恒存在一个马尔可夫过程$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$,它以μ为初始分布、以$P(s,x,t,A)$为转移函数?当$\mathbf{T}=\{0,1,\cdots\}$时,回答是肯定的,用第四章定理3.2即可证明此事实.当$\mathbf{T}=[0,\infty)$时,回答是未必成立.但若对$(E,\mathscr{E})$规定某种特殊拓扑,则回答仍然是肯定的.这就是下面的

定理1.3(*存在性定理*) *设E是L.C.C.B. T_2空间,$\mathscr{E}$是全体Borel集,$\mathbf{T}=[0,\infty)$,μ和$P(s,x,t,A)$分别为$(E,\mathscr{E})$上的概率测度与转移函数,则存在一个概率空间及其上的马尔可夫过程$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$,它以μ为初始分布,以$P(s,x,t,A)$为转移函数.*

证 沿用第四章定理3.1的全部符号.任取$J=\{t_1,\cdots,t_n\}$

$\in \varphi(\mathbf{T})$ $(t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$,令

$$P_J(A) = \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots \cdot \int_E P(t_{n-1},x_{n-1},t_n,\mathrm{d}x_n)\mathbf{1}_A(x_1,\cdots,x_n) \quad (A \in \mathscr{E}^J), \tag{1.30}$$

显然 P_J 是 $\mathscr{E}^J$ 上的概率测度. 又因为对任取 $I \subset J$, $I,J \in \varphi(\mathbf{T})$, $I = \{s_1,\cdots,s_m\}$, $J = \{t_1,\cdots,t_n\}$, $s_1 < \cdots < s_m$, $t_1 < \cdots < t_n$, 任取 $B \in \mathscr{E}^I$,有

$$\begin{aligned} P_I(B) &= \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_{t_1})\cdots \\ &\quad \cdot \int_E P(t_{n-1},x_{t_{n-1}},t_n,\mathrm{d}x_{t_n})\mathbf{1}_B(x_{s_1},\cdots,x_{s_m}) \\ &= \int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_{t_1})\cdots \\ &\quad \cdot \int_E P(t_{n-1},x_{t_{n-1}},t_n,dx_{t_n})\mathbf{1}_{(\Pi_I^J)^{-1}(B)}(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}) \\ &= P_J((\Pi_I^J)^{-1}(B)). \end{aligned} \tag{1.31}$$

此即$\{P_J:J \in \varphi(\mathbf{T})\}$ 是$(E,\mathscr{E})$ 上一个投影测度系,由第四章定理 3.1,存在一个概率空间

$$(\Omega = E^{\mathbf{T}},\mathscr{F} = \mathscr{E}^{\mathbf{T}},P)$$

满足

$$P \circ \Pi_J^{-1} = P_J \quad (\forall J \in \varphi(\mathbf{T})). \tag{1.32}$$

再令

$$X(t,\omega) = \pi_t(\omega) = \omega(t) \quad (\omega \in \Omega,\ t \in \mathbf{T}), \tag{1.33}$$

推证$\{X(t):t \in \mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的以 μ 为初始分布、以 $P(s,x,t,A)$ 为转移函数、以$(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的马尔可夫过程.

事实上,对任何$J = \{t_1,\cdots,t_n\} \in \varphi(\mathbf{T})$, $t_1 < \cdots < t_n$, $f_n \in b\mathscr{E}^J$,总有

$$\boldsymbol{E}(f_n(X(t_1),\cdots,X(t_n)))$$
$$=\int_{E^J} f_n(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})(P\circ X_J^{-1})(\mathrm{d}x_J), \qquad (1.34)$$

其中 $X_J=(X(t_1),\cdots,X(t_n)), x_J=(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$. 显然 $X_J(\omega)=\pi_J(\omega)$,所以将(1.32)和(1.30)代入(1.34)得

$$\boldsymbol{E}(f_n(X(t_1),\cdots,X(t_n)))$$
$$=\int_{E^J} f_n(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})P_J(\mathrm{d}x_J)$$
$$=\int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots$$
$$\cdot\int_E P(t_{n-1},x_{n-1},t_n,\mathrm{d}x_n)f_n(x_1,\cdots,x_n).$$

用定理1.2知$\{X(t):t\in\mathbf{T}\}$是以$(E,\mathscr{E})$为状态空间、以μ为初始分布、以$P(s,x,t,A)$为转移函数的马尔可夫过程.

命题1.1 设$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以$(E,\mathscr{E})$为状态空间、以μ为初始分布、以$P(s,x,t,A)$为转移函数的马尔可夫过程. 令$\mathscr{G}^0=\sigma(X(t),t\in[0,\infty))$,任取$A_i\in\mathscr{E}$, $0\leqslant t_1<\cdots<t_n(1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant 1)$,令

$$P^\mu(X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n)$$
$$=\int_E \mu(\mathrm{d}x_0)\int_{A_1} P(0,x_0,t_1,\mathrm{d}x_1)\cdots$$
$$\cdot\int_{A_n} P(t_{n-1},x_{n-1},t_n,\mathrm{d}x_n),$$

则P^μ可唯一地扩张到$\mathscr{G}^0$上去而成一概率测度,此概率测度仍用P^μ记之,这时恒有

$$P^\mu(\Lambda)=P(\Lambda)\quad(\forall\Lambda\in\mathscr{G}^0).$$

当$\mu=\varepsilon_x$为测度集中在单点集$\{x\}$上的测度,记

$$P^\mu=P^{\varepsilon_x}=P^x,$$

则对任何$\Lambda\in\mathscr{G}^0$固定,$P^x(\Lambda)$是x的$\mathscr{E}$可测函数,且对$\mathscr{E}$上任一

概率测度 ν,有

$$P^{\nu}(\Lambda)=\int_E \nu(\mathrm{d}x)P^x(\Lambda).$$

证 注意 $P(s,x,t,A)$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数,由测度的扩张定理立即可得命题 1.1.

例 1.1 设 $\{\mu_t:t>0\}$ 是 $(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}(\mathbf{R}^n))$ 上的概率测度族,满足 $\mu_{s+t}((-\infty,x))=\int_{\mathbf{R}^n}\mu_s(\mathrm{d}y)\mu_t((-\infty,x-y))$,定义

$$P_t(x,f)=\int_{\mathbf{R}^n}\mu_t(\mathrm{d}y)f(x+y),\quad P(t,x,A)=P_t(x,\mathbf{1}_A)$$
$$(t>0,\ x\in\mathbf{R}^n,\ A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)),$$

则 $P(t,x,A)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上一个时齐的转移函数.若再任给 $(E,\mathscr{E})$ 上一个概率测度 μ,则由定理 1.3 得知存在概率空间及其上的时齐的马尔可夫过程 $\{X(t):t\in[0,\infty)\}$,它以 μ 为初始分布,以 $P(t,x,A)$ 为转移函数,而且还具有独立增量.

§2 时齐的马尔可夫过程

在这一节中,给定下述对象:

(i) 时间参数集 $\mathbf{T}=[0,\infty]$;

(ii) 可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 及 E 外的一点 Δ,记 $E_\Delta=E\cup\{\Delta\}$,$\mathscr{E}_\Delta$ 是 E_Δ 上的含 $\mathscr{E}$ 及 $\{\Delta\}$ 的 σ 代数,于是 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 亦为一可测空间;

(iii) 可测样本空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 及 $\mathscr{F}$ 中一族单调非降子 σ 代数 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$,$\Omega$ 中元素用 ω 表示,ω_Δ 是 Ω 中一个特殊点;

(iv) 对每个 $t\in\mathbf{T}$,有映射 $X_t:\Omega\mapsto E_\Delta$(有时记 $X_t,X_t(\omega)$ 分别为 $X(t),X(t,\omega)$),满足

$$X_s(\omega)=\Delta\Longrightarrow X_t(\omega)=\Delta\quad(\forall\, t\geqslant s),$$
$$X_\infty(\omega)\equiv\Delta\quad(\forall\,\omega\in\Omega),$$
$$X_0(\omega_\Delta)=\Delta;$$

(v)　对每个 $t\in\mathbf{T}$，有映射 $\theta_t:\Omega\mapsto\Omega$ 满足

$$\theta_\infty(\omega)\equiv\omega_\Delta\quad(\forall\,\omega\in\Omega);$$

(vi)　对每个 $x\in E_\Delta$，有$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度 P^x.

定义 2.1　称 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathrm{T})$ 是一个**时齐的具有推移算子的以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的随机过程**，如果

(i)　对每个 $t\in\mathbf{R}_+\triangleq[0,\infty)$，有 $X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}_\Delta$；

(ii)　对每个 $t,h\in\mathbf{T}$，有 $X_t\circ\theta_h=X_{t+h}$；

(iii)　对每个 $t\in\mathbf{R}_+$，$B\in\mathscr{E}$，$P^\cdot(X_t\in B)\in\mathscr{E}$，且

$$P^\Delta(X_0=\Delta)=1.$$

更进一步地，若还有

(iv)　满足马尔可夫性：

(v)　$P^x(X_{s-t}\in B\mid\mathscr{F}_t)=P^{X_t}(X_s\in B)$

$$(x\in E_\Delta,\ B\in\mathscr{E}_\Delta,\ s,t\in\mathbf{T}),\tag{2.1}$$

则称 X 是**时齐的具有推移算子的以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程**.

关于定义 2.1 的几点注记：

(甲)　若(i)、(iii)成立，任取 $t\in\mathbf{T}$，$B\in\mathscr{E}_\Delta$，把 $P^\cdot(X_t\in B)$ 视为由 E_Δ 到$[0,1]$的映射时，$P^\cdot(X_t\in B)\in\mathscr{E}_\Delta$，从而对任何 $f\in b\mathscr{E}_\Delta$，有 $\boldsymbol{E}^\cdot(f(X_t))\in b\mathscr{E}_\Delta$.

(乙)　若定义 $\mathscr{G}_t^0=\sigma(X_s,s\leqslant t)$，$\mathscr{G}^0=\sigma(X_s,s\in\mathbf{T})$，由(i)得 $\mathscr{G}_t^0\subset\mathscr{F}_t$，从而 $\mathscr{G}^0\subset\mathscr{F}$. 显然 $\{\mathscr{G}_t^0:t\in\mathbf{T}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一族单调非降子 σ 代数. 记 $\mathscr{G}_\infty^0=\mathscr{G}^0$，由(ii)有

$$\theta_h\in\mathscr{G}_{t+h}^0/\mathscr{G}_t^0,\ \theta_h\in\mathscr{G}^0/\mathscr{G}^0\ (t,h\in\mathbf{T}).\tag{2.2}$$

(丙)　(2.1)式与(iii)中的 $P^\Delta(X_0=\Delta)=1$ 是相容的.

以后，根据情况，我们将略去定义 2.1 中的某些修饰词. 通常简称 X 是以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程.

命题 2.1 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程. 则按定义 1.2, $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 亦为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P^x)$ 上的以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的马尔可夫过程.

证 直接按定义验证即可得命题 2.1.

从命题 2.1 可看出: $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 给出了一族马尔可夫过程,它们中每一个以 P^x 为概率测度.

定义 2.1 的直观意义是:若将 $X(\cdot,\omega)$ 看成是某质点在 E_Δ 运动之轨道,则 P^x 应视为在时刻 $t=0$、质点处于 x 的条件下,质点运动之概率规律, Δ 应视为 E_Δ 中的特殊点,当质点运动到 Δ 后该质点就永远停留在 Δ 上,亦即当质点运动到 Δ 时,可视为该质点已"灭亡",从而该质点初达 Δ 的时间可视为其"寿命". 因此,我们定义过程 X 的"寿命" $\zeta(\omega)$ 如下:

$$\zeta(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\in\mathbf{T}:X(t,\omega)=\Delta\}, & \text{若右方集合非空},\\ \infty, & \text{反之}.\end{cases} \tag{2.3}$$

若令 Q 是有理数集,则

$$\{\zeta<t\}=\bigcup_{\substack{r<t\\ r\in Q}}\{X(r)=\Delta\}\in\mathscr{G}_t^0\subset\mathscr{F}_t. \tag{2.4}$$

命题 2.2 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程,令

$$N(t,x,A)=P^x(X_t\in A)\quad(t\in\mathbf{T},\ x\in E_\Delta,\ A\in\mathscr{E}_\Delta), \tag{2.5}$$

则 $N(t,x,A)$ 是 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 上的一个时齐的转移函数. 此外,对任一 $x_0\in E_\Delta$ 固定, $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P^{x_0})$ 上的以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间、以 $N(t,x,A)$ 为转移函数的关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的马尔可夫过程(在定义 1.3 的意义下).

证 先证 $N(t,x,A)$ 是转移函数. 事实上,显然有 $N(t,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的概率测度且 $N(t,\cdot,A)\in\mathscr{E}_\Delta$. 下证 $N(t,x,A)$ 满足

K-C 方程式. 用马尔可夫性(2.1) 式有

$$\begin{aligned} N(s+t,x,A) &= P^x(X_{s+t}\in A) \\ &= \boldsymbol{E}^x(N(s,X_t,A)) \\ &= \int_{E_\Delta} N(t,x,\mathrm{d}y)N(s,y,A). \end{aligned}$$

总之 $N(t,x,A)$ 是转移函数.

再证 $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是以 $N(t,x,A)$ 为转移函数的马尔可夫过程. 事实上,由(2.1) 式有

$$P^{x_0}(X_{s+t}\in A\mid\mathscr{F}_t)=P^{X_t}(X_s\in A)=N(s,X_t,A),$$

利用单调系定理,对任何 $f\in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$ 有

$$\boldsymbol{E}^{x_0}(f(X_{s+t})\mid\mathscr{F}_t)=N_s(X_t,f).$$

此即(1.19) 式成立. 所以 $\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的以 $N(t,x,A)$ 为转移函数的马尔可夫过程. 命题 2.2 证毕.

由定义 2.1 的(ⅲ)有 $N(t,\Delta,\{\Delta\})\equiv 1$,所以 $N(t,x,A)$ 完全由 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$ 的值而定,记此局限为

$$P(t,x,A)=N(t,x,A)\quad(t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

显然,$P(t,x,A)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的时齐的准转移函数. 以后如不特别声明,所谓马尔可夫过程 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 的转移函数,就是指准转移函数 $P(t,x,A)$.

对于 $P(t,x,A)$,定义算子族

$$(P_tf)(x)\triangleq\int_E P(t,x,\mathrm{d}y)f(y)\quad(t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ f\in\mathrm{b}\mathscr{E}),\tag{2.5$'$}$$

易证:$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是一族由 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 到 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 的正的压缩线性算子,即

(ⅰ) $P_t(\mathrm{b}\mathscr{E})\subset\mathrm{b}\mathscr{E}\quad(\forall\, t\in\mathbf{T})$;

(ⅱ) $f\geqslant 0,\ f\in\mathrm{b}\mathscr{E}\ \Longrightarrow P_tf\geqslant 0$;

(ⅲ) $\|P_tf\|\triangleq\sup\limits_{x\in E}|P_tf(x)|\leqslant\sup\limits_{x\in E}|f(x)|\triangleq\|f\|$;

(ⅳ) $P_t(\alpha f+\beta g)=\alpha P_t f+\beta P_t g$

$$(\forall f,g\in b\mathscr{E},\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}).$$

在这一节中,恒设 $\mathscr{G}_t^0=\sigma(X_u,u\in\mathbf{T},u\leqslant t)$, $\mathscr{G}^0=\mathscr{G}_\infty^0=\sigma(X_u,u\in\mathbf{T})$, $\mathscr{G}^{0,t}=\sigma(X_u,u\in\mathbf{T},u\geqslant t)$.

类似于定理1.1,关于马尔可夫性(2.1)的各等价条件,有下面的

定理2.1 (1) 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程,则对任何 $\xi\in b\mathscr{G}^0$, $\boldsymbol{E}^\cdot(\xi)\in b\mathscr{E}_\Delta$.

(2) 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathrm{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的时齐的具有推移算子的随机过程,则下列陈述等价:

(0) X 是马尔可夫过程;

(ⅰ) (M) $P^x(X_{s+t}\in B\mid\mathscr{F}_t)=P^{X_t}(X_s\in B)$

$$(x\in E_\Delta,\ B\in\mathscr{E}_\Delta,\ s,t\in\mathbf{T});$$

(ⅱ) (M_1) $\boldsymbol{E}^x(f(X_{s+t})\mid\mathscr{F}_t)=\boldsymbol{E}^{X_t}(f(X_s))$

$$(x\in E_\Delta,\ f\in b\mathscr{E}_\Delta,\ s,t\in\mathbf{T});\tag{2.6}$$

(ⅲ) (M_2) $\boldsymbol{E}^x(\xi(\theta_t)\mid\mathscr{F}_t)=\boldsymbol{E}^{X_t}(\xi)$

$$(x\in E_\Delta,\ \xi\in b\mathscr{G}^0,\ t\in\mathbf{T}).\tag{2.7}$$

特别地,若上述诸条中 $\mathscr{F}_t$ 代之以 $\mathscr{G}_t^0$,则(2.1)或(2.6),或(2.7)还等价于

(ⅳ) (M_3)

$$\boldsymbol{E}^x\Big(\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j})\Big)=\int_{E_\Delta}N(t_1,x,\mathrm{d}x_1)\int_{E_\Delta}N(t_2-t_1,x_1,\mathrm{d}x_2)\cdots\cdot\int_{E_\Delta}N(t_n-t_{n-1},x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\prod_{j=1}^n f_j(x_j)$$

$$(0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n,\ x\in E_\Delta,\ f_1,\cdots,f_n\in b\mathscr{E}_\Delta).\tag{2.8}$$

证 (1) 令 $L=\{\xi\in b\mathscr{G}^0:E^\cdot(\xi)\in b\mathscr{E}_\Delta\}$,再记:

$$\mathfrak{M} = \left\{ M : M = \bigcap_{i=1}^{n} X_{t_i}^{-1}(A_i),\ 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n,\ A_i \in \mathscr{E}_\Delta,\ n \geqslant 1 \right\}$$

显然 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系，且 $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathscr{G}^0$，所以，若能证

(a)　$1 \in L,\ \mathbf{1}_A \in L\ (\forall A \in \mathfrak{M})$；

(b)　$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi \in \mathrm{b}\mathscr{G}^0, \xi_n \in L \Longrightarrow \xi \in L$，

则由单调系定理，(1) 得证．而(b) 显然成立，又 $1 \in L$．下面证明

$$\mathbf{1}_A \in L \quad (\forall A \in \mathfrak{M}).$$

我们证明比上述关系更强的结论：

$$\boldsymbol{E}^{\cdot}\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j})\right) \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$$

$$(\forall 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n,\ f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta,\ n \geqslant 1).$$

事实上，当 $n = 1$ 时，由定义 2.1 的注记(甲)并用单调系定理可知 $\boldsymbol{E}^{\cdot}(f_1(X_{t_1})) \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$．设对任何 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$，任何 $f_1, \cdots, f_k \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$，有

$$\boldsymbol{E}^{\cdot}\left(\prod_{j=1}^{k} f_j(X_{t_j})\right) \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta,$$

推证 $\boldsymbol{E}^{\cdot}\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j(X_{t_j})\right) \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$．

由 X 是马尔可夫过程，故(M) 成立．由单调系定理易证(M_1) 成立．所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j(X_{t_j})\right) &= \boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k} f_j(X_{t_j}) \boldsymbol{E}^x\left(f_{k+1}(X_{t_{k+1}}) \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right)\right) \\ &= \boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k} f_j(X_{t_j}) \boldsymbol{E}^{X_{t_k}}\left(f_{k+1}(X_{t_{k+1}-t_k})\right)\right),\end{aligned}$$

而由 $f_{k+1} \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$ 得知存在 $g \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$ 使

$$g(X_{t_k}) = \boldsymbol{E}^{X_{t_k}}\left(f_{k+1}(X_{t_{k+1}-t_k})\right).$$

所以若令 $f_k \cdot g = f_k^*$，则

$$\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j(X_{t_j})\right) = \boldsymbol{E}^x\left(f_k^*(X_{t_k}) \prod_{j=1}^{k-1} f_j(X_{t_j})\right).$$

由归纳法假设知

$$\boldsymbol{E}^{\cdot}\left(f_k^*\left(X_{t_k}\right)\prod_{j=1}^{k-1}f_j\left(X_{t_j}\right)\right)\in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta .$$

故(1)证毕.

(2) 显然$(\mathrm{M}_2)\Longrightarrow(\mathrm{M}_1)\Longleftrightarrow(\mathrm{M})$. 所以为证(2),只需证明$(\mathrm{M}_1)\Longrightarrow(\mathrm{M}_2)$.

事实上,设(M_1)成立,仿(1),利用单调系定理,只需证明形如

$$\xi=\prod_{j=1}^{n}f_j(X_{t_j})\quad (f_j\in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta,\ 0\leqslant t_1<\cdots<t_n,\ n\geqslant 1)$$

的ξ能使(M_2)成立即可. 仍对n作归纳法.

当$n=1$时,由(M_1)成立即得

$$\boldsymbol{E}^x(f_1\circ X_{t_1}\circ\theta_t\mid\mathscr{F}_t)=\boldsymbol{E}^{X_t}(f_1\circ X_{t_1}).$$

设(M_2)对形如$\xi=\prod_{j=1}^{k}f_j(X_{t_j})$ $(f_j\in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta,\ 0\leqslant t_1<\cdots<t_k)$成立,则由$(\mathrm{M}_1)$有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k+1}f_j\circ X_{t_j}\circ\theta_t\middle|\mathscr{F}_t\right)\\
&=\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k}f_j\left(X_{t_j+t}\right)\cdot \boldsymbol{E}^x\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}+t}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k+t}\right)\middle|\mathscr{F}_t\right)\\
&=\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k}f_j\left(X_{t_j+t}\right)\cdot \boldsymbol{E}^{X_{t_k+t}}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}-t_k}\right)\right)\middle|\mathscr{F}_t\right).
\end{aligned}$$

由(1)知:必存在$g\in\mathscr{E}_\Delta$使

$$\boldsymbol{E}^{X_{t_k+t}}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}-t_k}\right)\right)=g\left(X_{t_k+t}\right).$$

所以由归纳法假设有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{k+1}f_j\circ X_{t_j}\circ\theta_t\middle|\mathscr{F}_t\right)\\
&=\boldsymbol{E}^x\left(f_k\left(X_{t_k+t}\right)g\left(X_{t_k+t}\right)\prod_{j=1}^{k-1}f_j\left(X_{t_j+t}\right)\middle|\mathscr{F}_t\right)\\
&=\boldsymbol{E}^{X_t}\left(f_k\left(X_{t_k}\right)g\left(X_{t_k}\right)\prod_{j=1}^{k-1}f_j\left(X_{t_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E}^{X_t}\left(\boldsymbol{E}^{X_{t_k}}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}-t_k}\right)\right)\prod_{j=1}^{k} f_j\left(X_{t_j}\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^{X_t}\left(\boldsymbol{E}^{x}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right)\prod_{j=1}^{k} f_j\left(X_{t_j}\right)\right).$$

但是

$$\boldsymbol{E}^{x}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right) = g\left(X_{t_k}\right)$$

不依赖 $x \in E_\Delta$，所以

$$\boldsymbol{E}^{x}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right)\prod_{j=1}^{k} f_j\left(X_{t_j}\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^{x}\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j\left(X_{t_j}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right)$$

也不依赖于 x，因此

$$\boldsymbol{E}^{X_t}\left(\boldsymbol{E}^{x}\left(f_{k+1}\left(X_{t_{k+1}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right)\prod_{j=1}^{k} f_j\left(X_{t_j}\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^{X_t}\left(\boldsymbol{E}^{x}\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j\left(X_{t_j}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_k}\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^{X_t}\left(\prod_{j=1}^{k+1} f_j\left(X_{t_j}\right)\right).$$

归纳法完成．总之我们证明了：

$$(\mathrm{M}) \Longleftrightarrow (\mathrm{M}_1) \Longleftrightarrow (\mathrm{M}_2).$$

设(M)成立．由命题 2.2，$N(t,x,A) \triangleq P^x(X_t \in A)$ 是 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 上的时齐的转移函数，且 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是概率空间上的以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间、以 $\mu(\cdot) = \mathbf{1}_{\{x\}}(\cdot)$ 为初始分布、以 N 为转移函数的马尔可夫过程(在定义 1.2 的意义下)，因此，由定理 1.2 得知(M_3)成立．

设(M_3)成立．对任取 $x \in E_\Delta$，$f \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$，$s,t \in \mathbf{T}$，$t_1 < \cdots < t_n = t$，$\Lambda = \bigcap_{i=1}^{n} X_{t_i}^{-1}(A_i)$，$A_i \in \mathscr{E}_\Delta$，有

$$\boldsymbol{E}^{x}\left(\boldsymbol{E}^{X_t}\left(f(X_s)\mathbf{1}_\Lambda\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^{x}\left(N_s(X_t,f)\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{A_i}(X_{t_i})\right)$$

$$\overset{(M_3)}{=}\int_{E_\Delta}N(t_1,x,\mathrm{d}x_1)\int_{E_\Delta}N(t_2-t_1,x_1,\mathrm{d}x_2)\cdots$$

$$\cdot\int_{E_\Delta}N(t_n-t_{n-1},x_{n-1},\mathrm{d}x_n)$$

$$\cdot\int_{E_\Delta}N(s,x_n,\mathrm{d}y)f(y)\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{A_i}(x_i)$$

$$\overset{(M_3)}{=}\boldsymbol{E}^x\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{A_i}(X_{t_i})\cdot f(X_{t_n+s})\Big)$$

$$=\boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_\Lambda\cdot f(X_{t+s})).\tag{2.9}$$

令

$$\mathscr{L}=\{\Lambda\in\mathscr{G}_t^0:\boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_t}(f(X_s)\mathbf{1}_\Lambda))=\boldsymbol{E}^x(f(X_{s+t})\mathbf{1}_\Lambda)\},$$

由(2.9)知

$$\mathscr{L}\supset\mathfrak{M}\triangleq\Big\{\Lambda=\bigcap_{i=1}^{n}X_{t_i}^{-1}(A_i):A_i\in\mathscr{E}_\Delta,\ t_1<\cdots<t_n=t,\ n\geqslant1\Big\}.$$

显然,$\mathfrak{M}$ 是 Π 系,$\mathscr{L}$ 是 d 系.由单调系定理知

$$\mathscr{L}\supset d(\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{M})=\mathscr{G}_t^0.$$

所以

$$\boldsymbol{E}^x(f(X_{s+t})\mid\mathscr{G}_t^0)=\boldsymbol{E}^{X_t}(f(X_s))\quad(s,t\in\mathbf{T},\ x\in E_\Delta,\ f\in b\mathscr{E}_\Delta).$$

此即(M_1)成立.(2) 证毕.

定义 2.2 设有两个具有相同状态空间$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$的马尔可夫过程 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 与 $\widehat{X}=(\widehat{\Omega},\widehat{\mathscr{F}},\widehat{\mathscr{F}}_t,\widehat{X},\widehat{\theta}_t,\widehat{P}^x,\mathbf{T})$.如果它们的转移函数一样,即

$$P^x(X_t\in A)\equiv\widehat{P}^x(\widehat{X}_t\in A)\quad(t\in\mathbf{T},\ x\in E_\Delta,\ A\in\mathscr{E}_\Delta),\tag{2.10}$$

则称 X 与 $\widehat{X}$ 是**等价的**.

我们将要给出每个等价马尔可夫过程类中的一个特别好的代表——典范马尔可夫过程,它的样本空间 Ω 是函数空间,它的推移算子具有明显的直观意义.

现在我们考虑下列诸对象：

（ⅰ） W 是满足下列要求的由 $\mathbf{T}$ 到 E_Δ 的全体变换 w 所构成的空间：

$$w(\infty)=\Delta;\ w(t)=\Delta \Longrightarrow w(s)=\Delta \quad (s\geqslant t);$$

w_Δ 是 W 中一特殊元素，$w_\Delta(t)\equiv\Delta\ (t\in\mathbf{T})$.

（ⅱ） Y_t 是定义在 W 上的坐标变换，即

$$Y_t(w)=w(t)\quad (t\in\mathbf{T}).$$

（ⅲ） 在 W 上定义 σ 代数族：$\mathscr{H}_t^0=\sigma(Y_s,s\leqslant t,s\in\mathbf{T})$，$t\in\mathbf{T}$，$\mathscr{H}_\infty^0\equiv\mathscr{H}^0\equiv\sigma(Y_s,s\in\mathbf{T})$.

（ⅳ） 定义推移算子 φ_t 为由 W 到 W 的变换，它满足

$$(\varphi_t(w))(s)=w(s+t)\quad (s,t\in\mathbf{T},\ w\in W).$$

显然有

$$\varphi_\infty(w)=w_\Delta,\ Y_t\circ\varphi_s=Y_{s+t}\quad (s,t\in\mathbf{T}).$$

定义 2.3 称以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是**典范的**，即**函数空间型的**，如果

$$\Omega=W,\ \mathscr{F}\supset\mathscr{H}^0,\ \mathscr{F}_t\supset\mathscr{H}_t^0,\ X_t=Y_t,\ \theta_t=\varphi_t.$$

定理 2.2 任给一个以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 X，恒等价于一个以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的典范马尔可夫过程 Y.

证 定义映射 ρ 如下：

$$\rho:\Omega\mapsto W,\quad \rho(\omega)(t)=X_t(\omega),$$

则 $Y_t\circ\rho=X_t(t\in\mathbf{T})$，且对任何 $A\in\mathscr{E}_\Delta$ 有

$$\rho^{-1}(Y_t\in A)=X_t^{-1}(A).$$

所以 $\rho^{-1}(\mathscr{H}_t^0)\subset\mathscr{G}_t^0\subset\mathscr{F}_t$，即

$$\rho\in\mathscr{G}_t^0/\mathscr{H}_t^0\quad (\forall\, t\in\mathbf{T}).$$

再在 $(W,\mathscr{H}^0)$ 上定义测度 $\widehat{P}^x$ 如下：

$$\widehat{P}^x=P^x\circ\rho^{-1}.$$

推证 $Y=(W,\mathscr{H}^0,\mathscr{H}_t^0,Y_t,\varphi_t,\widehat{P}^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间

的等价于 X 的典范的马尔可夫过程. 为此, 只需证明 Y 满足(M)(其他均属显然). 这又只需证明

$$\widehat{P}^x(Y_{s+t}^{-1}(B)\cap\Lambda)=\widehat{\boldsymbol{E}}^x(\widehat{P}^{Y_t}(Y_s\in B)\mathbf{1}_\Lambda)\qquad(2.11)$$
$$(x\in E_\Delta,\ B\in\mathscr{E}_\Delta,\ s,t\in\mathbf{T},\ \Lambda\in\mathscr{H}_t^0).$$

首先注意:

$$\rho\circ\theta_t(\omega)(s)=\varphi_t\circ\rho(\omega)(s),$$

即 $\rho\circ\theta_t=\varphi_t\circ\rho$.

其次,若 H 是定义在 W 上的实值函数,且 $H\in \mathrm{b}\mathscr{H}^0$,则 $H\circ\rho\in\mathrm{b}\mathscr{G}^0$,且 $\widehat{\boldsymbol{E}}^x(H)=\widehat{\boldsymbol{E}}^x(H\circ\rho)$.

利用上述两事实并应用 X 的马尔可夫性可证(2.11). 定理2.2得证.

下面我们研究马尔可夫过程的"完备化". 沿袭本节前面的符号. 以下恒设

$$X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$$

是时齐的具有推移算子的以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程.

我们将要用某种完备化来适当地扩张$\mathscr{F}$和$\mathscr{F}_t$为$\overline{\mathscr{F}}$和$\overline{\mathscr{F}}_t$,以使

$$\overline{X}=(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathscr{F}}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$$

仍然是时齐的具有推移算子的以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程.

由于定理2.1中已经证明: $\forall\,\Lambda\in\mathscr{G}^0$, $P^{\cdot}(\Lambda)\in\mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$,所以对$\mathscr{E}_\Delta$上任一有限测度$\mu$,可以定义

$$P^\mu(\Lambda)=\int_{E_\Delta}\mu(\mathrm{d}x)P^x(\Lambda).\qquad(2.12)$$

显然 P^μ 是 $\mathscr{G}^0$ 上的有限测度,且 P^μ 为概率测度的充要条件是μ为$\mathscr{E}_\Delta$上的概率测度. 若 ε_x 是测度值集中在x 的 Dirac 测度,则 $P^{\varepsilon_x}=P^x$.

定义2.4　设$(D,\mathscr{D})$是任一可测空间,μ是$\mathscr{D}$上任一测度,$\mathscr{D}_1$是$\mathscr{D}$中的子σ代数.称

$$\mathscr{D}_1^\mu \triangleq \{B \subset D: \text{存在 } B_1, B_2 \in \mathscr{D}_1 \text{ 使 } B_1 \subset B \subset B_2,\ \mu(B_2 - B_1) = 0\}$$

为$\mathscr{D}_1$关于μ的完备化.

易见$(\mathscr{D}_1^\mu)^\mu = \mathscr{D}_1^\mu$, $\mathscr{D}_1^\mu$是σ代数.

显然,μ可以唯一地由$\mathscr{D}_1$扩张到$\mathscr{D}_1^\mu$上去且满足下列关系:

$$\mu(B) = \mu(B_1)$$

$(B \in \mathscr{D}_1^\mu,\ B_1 \subset B \subset B_2,\ B_i \in \mathscr{D}_1,\ \mu(B_2 - B_1) = 0)$.

扩张后的测度,一般仍用μ表示.

定义2.5　称测度空间$(D,\mathscr{D},\mu)$是**完备的**,如果$\mathscr{D}$中的μ零测集之子集仍属于$\mathscr{D}$.

命题2.3　测度空间$(D,\mathscr{D},\mu)$是完备的充要条件是$\mathscr{D} = \mathscr{D}^\mu$,所以$(D,\mathscr{D}^\mu,\mu)$是完备的.

由定义直接验证即得命题2.3.

定义2.6　设$(D,\mathscr{D})$为可测空间,$\mathscr{D}_1$是$\mathscr{D}$中的子σ代数.U是$\mathscr{D}$上的一族有限测度.称

$$\mathscr{D}_1^U \triangleq \bigcap_{\mu \in U} \mathscr{D}^\mu \tag{2.13}$$

为$\mathscr{D}_1$关于U的完备化.

特别地,若U是$\mathscr{D}$上的全体有限测度,则称$\mathscr{D}^* \triangleq \mathscr{D}^U$为$\mathscr{D}$的"**普遍可测**"$\sigma$代数.

命题2.4　设$(D,\mathscr{D})$,$\mathscr{D}_1$,U如定义2.6,则

(1)　$(\mathscr{D}_1^U)^U = \mathscr{D}_1^U$;

(2)　$f \in \mathscr{D}_1^U \Longleftrightarrow$ 对任何$\mu \in U$,存在$f_1, f_2 \in \mathscr{D}_1$,使$f_1 \leqslant f \leqslant f_2$, $\mu(f_1 < f_2) = 0$.

证　(1)由定义即得.(2)用单调系定理可证.

定义2.7　设$(D,\mathscr{D})$是可测空间,U是$\mathscr{D}$上的一族有限测度,$\mathscr{D}_1$是$\mathscr{D}^U$中的子σ代数,称

$$\mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U) \triangleq \{A: \text{对每个 } \mu \in U, \text{存在 } A_\mu \in \mathscr{D}_1, \text{使 } A - A_\mu,$$
$$A_\mu - A \in \mathscr{D}^U, \text{且 } \mu(A - A_\mu) = \mu(A_\mu - A) = 0.\}$$

为$\mathscr{D}_1$在$\mathscr{D}^U$中关于U的完备化. 显然 $\mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U)$ 是 σ 代数

命题 2.5 设 $\mathscr{D},\mathscr{D}_1,U$ 如定义 2.7,则

(1)
$$\begin{aligned}\mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U) &= \{A \in \mathscr{D}^U: \text{对每个 } \mu \in U, \\ &\quad\ \text{有 } A_\mu \in \mathscr{D}_1,\ \mu(A\Delta A_\mu) = 0\} \\ &= \bigcap_{\mu\in U}\{A \in \mathscr{D}^\mu: \exists A_\mu \in \mathscr{D}_1,\ \mu(A_\mu \Delta A) = 0\} \\ &= \bigcap_{\mu\in U}\sigma(\mathscr{D}_1 \cup \mathfrak{N}^\mu),\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{N}^\mu$ 是 $\mathscr{D}^\mu$ 中的一切μ零测子集.

由(1)即得

$$A \in \mathscr{D}^U,\ \mu(A) = 0\ (\forall \mu \in U)$$
$$\Longleftrightarrow A \in \bigcap_{\mu\in U}\mathfrak{N}^\mu \Longrightarrow A \in \mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U).$$

(2)
$$\mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U) = \bigcap_{\mu\in U}\{A: \exists D_\mu \in \mathscr{D}_1,\ A_\mu, B_\mu \in \mathscr{D}_1, \text{使}$$
$$D_\mu - A_\mu \subset A \subset D_\mu \cup B_\mu,\ \mu(A_\mu) = \mu(B_\mu) = 0\}.$$

由定义直接验证可得命题 2.5.

命题 2.6 设 $\mathscr{D},\mathscr{D}_1$ 和 U 如定义 2.7,则

(1) $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_1^U \subset \mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U) \subset \mathscr{D}^U$;

(2) $\mathscr{D}^U(\mathscr{D}^U) = \mathscr{D}^U$;

(3) $(\mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U))^U(\mathscr{D}^U) = \mathscr{D}_1^U(\mathscr{D}^U)$.

由定义及命题 2.5 可得命题 2.6.

命题 2.7 设$(E_i,\mathscr{E}_i)$是可测空间,U_i 是 $\mathscr{E}_i$ 上的一族有限测度,$\mathscr{D}_i$ 是 $\mathscr{E}_i^{U_i}$ 内的子σ代数$(i = 1,2)$. 假定 $f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, $f \in \mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2$. 若对每个 $\mu \in U_1$,有 $\mu \circ f^{-1} \in U_2$,则

$$f \in \mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1})/\mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2}).$$

证 任取 $A \in \mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2})$,推证 $f^{-1}(A) \in \mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1})$. 事实上,由假设,对任何 $\mu \in U_1$,有 $\nu = \mu \circ f^{-1} \in U_2$. 所以,由 $A \in$

$\mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2})$及命题2.5 (2) 得知:存在 $D_\nu \in \mathscr{D}_2$, $A_\nu, B_\nu \in \mathscr{E}_2$,使

$$D_\nu - A_\nu \subset A \subset D_\nu \cup B_\nu,\ \nu(A_\nu) = \nu(B_\nu) = 0.$$

令 $D_\mu = f^{-1}(D_\nu)$, $A_\mu = f^{-1}(A_\nu)$, $B_\mu = f^{-1}(B_\nu)$,则

$$D_\mu - A_\mu \subset f^{-1}(A) \subset D_\mu \cup B_\mu.$$

而 $f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, $f \in \mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2$,所以由 $D_\nu \in \mathscr{D}_2$, $A_\nu, B_\nu \in \mathscr{E}_2$ 得 $D_\mu = f^{-1}(D_\nu) \in \mathscr{D}_1$, $A_\mu = f^{-1}(A_\nu) \in \mathscr{E}_1$, $B_\mu = f^{-1}(B_\nu) \in \mathscr{E}_1$, $\mu(A_\mu) = \mu \circ f^{-1}(A_\nu) = \nu(A_\nu) = 0$, $\mu(B_\mu) = \nu(B_\nu) = 0$. 再一次应用命题2.5(2) 得 $f^{-1}(A) \in \mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1})$. 命题证毕.

系 1　若命题2.7 中 $\mathscr{D}_i = \mathscr{E}_i$ $(i = 1,2)$,则

$$f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2, U_1 \circ f^{-1} \in U_2 \Longrightarrow f \in \mathscr{E}_1^{U_1}/\mathscr{E}_2^{U_2},$$

其中 $U_1 \circ f^{-1} = \{\nu : \nu = \mu \circ f^{-1},\ \mu \in U_1\}$. 以后一直沿用此符号.

系 2　若命题2.7 中 $\mathscr{D}_i = \mathscr{E}_i$, U_i 是 $\mathscr{E}_i$ 上一切有限测度($i = 1,2$),则

$$f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2 \Longrightarrow f \in \mathscr{E}_1^*/\mathscr{E}_2^* \quad (\mathscr{E}_i^* \text{ 是“普遍可测”} \sigma \text{ 代数}).$$

下面我们将马尔可夫过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 完备化. 令 $U_1 = \{P^x : x \in E_\Delta\}$, $U_2 = \{P^\mu : \mu$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上一切有限测度$\}$, $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^{U_1}$, $\mathscr{G} = (\mathscr{G}^0)^{U_2}$, $\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t^{U_1}(\overline{\mathscr{F}}) = \mathscr{F}_t^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1})$, $\mathscr{G}_t = (\mathscr{G}_t^0)^{U_2}(\mathscr{G}) = (\mathscr{G}_t^0)^{U_2}((\mathscr{G}^0)^{U_2})$. 因为 $\overline{\mathscr{F}} \supset \mathscr{G}$, $\overline{\mathscr{F}}_t \supset \mathscr{G}_t$. 由命题2.6 (1) 有

$$\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1}) \supset \mathscr{F}_t^{U_1}; \tag{2.14}$$

$$\mathscr{G}_t = (\mathscr{G}_t^0)^{U_2}((\mathscr{G}^0)^{U_2}) \supset (\mathscr{G}_t^0)^{U_2}. \tag{2.15}$$

定理 2.3　沿用上一段的符号. 设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马氏过程,则

(1)　对任何 $t \in \mathbf{T}$,有 $X_t \in \mathscr{G}_t/\mathscr{E}_\Delta^*$,更有 $X_t \in \overline{\mathscr{F}}/\mathscr{E}_\Delta^*$;

(2)　对任何 $\xi \in b\mathscr{G}$ (或 $\xi \geqslant 0$, $\xi \in \mathscr{G}$),有 $\boldsymbol{E}^\cdot(\xi) \in \mathscr{E}_\Delta^*$;

(3) 对任何 $t\in\mathbf{T}$, $f\in b\mathscr{E}_\Delta^*$,有 $\boldsymbol{E}^\cdot(f(X_t))\in\mathscr{E}_\Delta^*$,特别地,对任何 $t\in\mathbf{T}$, $A\in\mathscr{E}_\Delta^*$, $N(t,\cdot,A)\triangleq P^\cdot(X_t\in A)\in\mathscr{E}_\Delta^*$;

(4) 对任何 $t\in\mathbf{T}$,有 $\theta_h^{-1}\mathscr{G}_t\subset\mathscr{G}_{t+h}$,从而 $\theta_h^{-1}\mathscr{G}\subset\mathscr{G}$ ($\forall h\geqslant 0$);

(5) 对任何 $t\in\mathbf{T}$, $x\in E_\Delta$, $\xi\in b\mathscr{F}$,有

$(\overline{\mathrm{M}}_2)$ $$\boldsymbol{E}^x(\xi\circ\theta_t\mid\overline{\mathscr{F}}_t)=\boldsymbol{E}^{X_t}(\xi).$$

证 (1) 令 $U=U_2=\{P^\mu:\mu$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度$\}$, $V=\{\mu:\mu$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度$\}$, $\mathscr{E}_1=\mathscr{G}_t^0$, $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_\Delta$,则由(2.15)有

$$\mathscr{G}_t\supset(\mathscr{G}_t^0)^U=\mathscr{E}_1^U.$$

而 $\mathscr{E}_2^V=\mathscr{E}_\Delta^*$.又因为 $X_t\in\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, $U\circ X_t^{-1}\subset V$,所以,由命题2.7系2知 $X_t\in\mathscr{E}_1^U/\mathscr{E}_2^V$,更有 $X_t\in\mathscr{G}_t/\mathscr{E}_\Delta^*$.

(2) 任取 $P^\mu\in U_2$,由于 $\mathscr{G}=(\mathscr{G}^0)^{U_2}$, $\xi\in b\mathscr{G}$,所以由命题2.4 (2)得知存在 $\xi_1,\xi_2\in b\mathscr{G}^0$, $\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$, $\boldsymbol{E}^\mu(\xi_2-\xi_1)=0$.由于 $\boldsymbol{E}^x(\xi_1)\leqslant\boldsymbol{E}^x(\xi)\leqslant\boldsymbol{E}^x(\xi_2)$ ($\forall x\in E_\Delta$),而且由定理2.1 (1)有 $\boldsymbol{E}^\cdot(\xi_i)\in\mathscr{E}_\Delta$ ($i=1,2$),且

$$\int_{E_\Delta}(\boldsymbol{E}^x(\xi_2)-\boldsymbol{E}^x(\xi_1))\mu(\mathrm{d}x)=\boldsymbol{E}^\mu(\xi_2-\xi_1)=0.\tag{2.16}$$

再一次应用命题2.4 (2)得知 $\boldsymbol{E}^\cdot(\xi)\in\mathscr{E}_\Delta^\mu$,而 $P^\mu\in U_2$ 可以任意,即 μ 可以是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上任一有限测度,所以 $\boldsymbol{E}^\cdot(\xi)\in\mathscr{E}_\Delta^*$.

(3) 由(1)和(2)立即得(3).

(4) 由(2.2)式有

$$\theta_h^{-1}\mathscr{G}_t^0\subset\mathscr{G}_{t+h}^0,\ \theta_h^{-1}\mathscr{G}^0\subset\mathscr{G}^0\quad(t,h\in\mathbf{T}),$$

用命题2.7来证(4).为此,令 $\mathscr{E}_i=\mathscr{G}^0(i=1,2)$, $\mathscr{D}_1=\mathscr{G}_{t+h}$, $\mathscr{D}_2=\mathscr{G}_t^0$, $U=V=U_2$,则 $\mathscr{G}=(\mathscr{G}^0)^U$, $\mathscr{G}_s=(\mathscr{G}_s^0)^U((\mathscr{G}^0)^U)=(\mathscr{G}_s^0)^U(\mathscr{G})$,

$$\theta_h\in\mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2,\quad\theta_h\in\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2.$$

所以为证(4),只需证明

$$U \circ \theta_h^{-1} \subset V. \tag{2.17}$$

事实上,任取 $P^\mu \in U$,令 $\nu = P^\mu \circ X_h^{-1}$,则由定理 2.1(2) 的马尔可夫性($M_2$)有

$$\begin{aligned} P^\mu \circ \theta_h^{-1}(A) &= E^\mu(1_A \circ \theta_h) = \int_\Omega P^{X_h}(A) P^\mu(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_{E_\Delta} P^y(A)(P^\mu \circ X_h^{-1})(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{E_\Delta} P^y(A)\nu(\mathrm{d}y) = P^\nu(A) \quad (\forall A \in \mathscr{G}^0). \end{aligned} \tag{2.18}$$

(4) 得证.

(5) 由(1)和(2)知 $E^{X_t}(\xi) \in \mathscr{G}_t$,而 $\mathscr{G}_t \subset \overline{\mathscr{F}}_t$,所以为证 $\overline{(M_2)}$,只需证明对任何 $A \in \overline{\mathscr{F}}_t$,有

$$E^x(\xi \circ \theta_t \cdot 1_A) = E^x(1_A E^{X_t}(\xi)). \tag{2.19}$$

又由于 $\overline{\mathscr{F}}_t$ 是 $\mathscr{F}_t$ 在 $\overline{\mathscr{F}}$ 中关于 $U_1 =: \{P^x : x \in E_\Delta\}$ 的完备化,即 $\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1})$,所以由命题 2.5(1) 知:对每个 $A \in \overline{\mathscr{F}}$ 和 $P^x \in U_1$,必有 $A_x \in \mathscr{F}_t$,使 $P^x(A \Delta A_x) = 0$. 因此,为证对任何 $A \in \overline{\mathscr{F}}_t$,(2.19) 成立,只需证明对任何 $A \in \mathscr{F}_t$,(2.19) 成立. 事实上,对任给 $x \in E_\Delta$,$t \in \mathbf{T}$,在 $\mathscr{E}_\Delta$ 上定义测度 μ 如下:

$$\mu(A) = P^x \circ X_t^{-1}(A). \tag{2.20}$$

仿(2.18)式(下面的 $\mathscr{E}_x, \mu, t$ 分别相当于(2.18)式中的 μ, ν, h)有

$$P^x(\theta_t^{-1}(A)) = P^\mu(A) \quad (A \in \mathscr{G}^0). \tag{2.21}$$

由 P^μ 及 μ 的定义知:对任何 $\xi \in \mathrm{b}\mathscr{G}$,有

$$\begin{aligned} E^\mu(\xi) &= \int_{E_\Delta} E^y(\xi)\mu(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{E_\Delta} E^y(\xi)(P^x \circ X_t^{-1})(\mathrm{d}y) \\ &= E^x(E^{X_t}(\xi)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

又由于 $\mathscr{G} = (\mathscr{G}^0)^U$,所以由 $\xi \in \mathrm{b}\mathscr{G}$ 及命题 2.4(2) 得知存在 $\eta \in$

$b\mathscr{G}^0$,使$\{\xi \neq \eta\} \subset \Gamma \in \mathscr{G}^0$, $P^\mu(\Gamma) = 0$. 故$\{\xi \circ \theta_t \neq \eta \circ \theta_t\} \subset \theta_t^{-1}(\Gamma)$. 因此,由(2.21)式有

$$P^x(\xi \circ \theta_t \neq \eta \circ \theta_t) \leqslant P^x(\theta_t^{-1}(\Gamma)) = P^\mu(\Gamma) = 0. \tag{2.23}$$

由$|\xi - \eta| \in b\mathscr{G}$,(2.22)和$\eta$的选取可知

$$\boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_t}(|\xi - \eta|)) = \boldsymbol{E}^\mu(|\xi - \eta|) = 0. \tag{2.24}$$

由于$\eta \in b\mathscr{G}^0$,对X用定理2.1 (2)的(M_2)有

$$\boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \eta \circ \theta_t) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_t}(\eta)\mathbf{1}_A) \quad (A \in \mathscr{F}_t). \tag{2.25}$$

由(2.23),(2.24),(2.25)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \xi \circ \theta_t) &= \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \eta \circ \theta_t) \\ &= \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_t}(\xi)\mathbf{1}_A) \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t).\end{aligned}$$

定理得证.

定理 2.4 设$X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程,则$\overline{X} = (\Omega, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathscr{F}}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta^*)$为状态空间的马尔可夫过程,更是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫的过程.

由定理2.3立即可得定理2.4.

正因为定理2.4成立,对于以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程$X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$,不失普遍性,可以假设$\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t$. 今后如不特别声明,恒作如此假设. 于是有

$$\mathscr{G} \subset \mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}, \quad \mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t,$$

从而,若$X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程,则$\widetilde{X} = (\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{G}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$亦然.

以前我们曾直观地把P^x看作是过程由x出发的概率测度,下面给以精确的论述.

定义 2.8 称以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程$X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$是**正规的**,如果对任何$x \in E$,都有

$\{x\} \in \mathscr{E}$, 且 $P^x(X_0 = x) = 1$.

命题 2.8(零一律)　设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的正规的马尔可夫过程,则对任何 $A \in \mathscr{G}$, $P^x(A)$ 或为 0 或为 1.

证　对任何 $B \in \mathscr{G}^0$,有 $\theta_0^{-1}(B) = B$,所以任取 $A \in \mathscr{G}$,由于 $\mathscr{G} = (\mathscr{G}^0)^{U_2}$, $U_2 = \{P^\mu : \mu$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度$\}$,所以存在 $B_1^x, B_2^x \in \mathscr{G}^0$, $B_1^x \subset A \subset B_2^x$,使

$$P^x(B_2^x - B_1^x) = 0 \quad (\forall\, x \in E_\Delta).$$

但是 $A - \theta_0^{-1}A \subset B_2^x - \theta_0^{-1}B_1^x = B_2^x - B_1^x$, $\theta_0^{-1}A - A \subset \theta_0^{-1}B_2^x - B_1^x = B_2^x - B_1^x$,所以

$$P^x(\theta_0^{-1}A - A) = P^x(A - \theta_0^{-1}A) = 0. \qquad (2.26)$$

注意:$\mathscr{G} \subset \overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$,用(2.26)及正规性和定理 2.3 (5)有

$$\begin{aligned} P^x(A) &= P^x(A \cap \theta_0^{-1}(A)) = \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_A \circ \theta_0) \\ &= \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \cdot \boldsymbol{E}^{X_0}(\mathbf{1}_A)) = \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A \cdot \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A)) \\ &= (P^x(A))^2. \end{aligned}$$

命题得证.

§3　停时及强马尔可夫性

在 §2 中,我们引进了时齐的具有推移算子的马尔可夫过程的概念并研究了马尔可夫性的各种等价描述,如(2.1),(2.6),(2.7)式.在这三式中,t 是确定的常数.对马尔可夫过程来说,若 t 代之以随机变量 τ, (2.1),(2.6),(2.7)是否仍然成立?在相当长的时间里,人们猜测它们会成立.但到 20 世纪 40 年代,Doob 提出这不是一个简单的问题.1956 年,Дынкин 和 Юшкевич 深入地研究了这一问题,建立了强马尔可夫过程的一般概念(参见[18]).

在这一节中,我们将要研究强马尔可夫过程.为此,首先要引进停时概念.本节恒设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间,$\mathbf{T} = [0, \infty]$,(在 $\mathbf{T} =$

$\{0,1,\cdots,\infty\}$ 的场合，相关的定义、命题是完全类似的，我们略去不论，读者可作练习推演.）$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一族单增子 σ 代数.令 $\mathscr{F}_{t+}\triangleq\bigcap\limits_{s>t}\mathscr{F}_s(0\leqslant t<\infty)$，$\mathscr{F}_{t-}=\bigvee\limits_{s<t}\mathscr{F}_s(0<t<\infty)$，$\mathscr{F}_{0-}\triangleq\mathscr{F}_0$，$\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_{\infty+}=\mathscr{F}$.

显然，$\{\mathscr{F}_{t+}:t\in\mathbf{T}\}$，$\{\mathscr{F}_{t-}:t\in\mathbf{T}\}$ 皆为 $\mathscr{F}$ 中的单增子 σ 代数族，且 $\mathscr{F}_{t-}\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+}(\forall t\in\mathbf{T})$.

定义 3.1 称 $\mathscr{F}$ 中的非降子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t:t\in\overline{\mathbf{T}}\}$ 是**右连续的**，如果

$$\mathscr{F}_{t+}=\mathscr{F}_t\quad(t\in\mathbf{T}).\tag{3.1}$$

显然，$\{\mathscr{F}_{t+}:t\in\mathbf{T}\}$ 是右连续的.

定义 3.2 称映射 $\tau:\Omega\mapsto\mathbf{T}$ 是 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$ **停时**（简称停时），如果

$$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall t\in\mathbf{R}_+).\tag{3.2}$$

若注意 $\{\tau=\infty\}=\Omega-\{\tau<\infty\}\in\mathscr{F}=\mathscr{F}_\infty$，则易知(3.2)等价于

$$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall t\in\mathbf{T}).\tag{3.3}$$

显然还有

$$\{\tau>t\}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall t\in\mathbf{R}_+).\tag{3.4}$$

命题 3.1 对 $\mathscr{F}$ 中任一单增子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t:t\in\overline{\mathbf{T}}\}$，总有：

(1) τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 $\Longrightarrow\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时；

(2) τ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时的充要条件是：

$$\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t\quad(\forall t\in\mathbf{T}).\tag{3.5}$$

证 (1) 由 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+}$ 即得(1).

(2) 由 $\{\tau\leqslant t\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\tau<t+\dfrac{1}{n}\right\}$ 及 $\{\tau<t\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\tau\leqslant t-\dfrac{1}{n}\right\}$ 即得(2).

例如：若 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是马尔可夫过程，ζ 是

如(2.3)所定义的 X 的寿命,则 ζ 是$\{\mathscr{G}_{t+}^0\}$停时,其中

$$\mathscr{G}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqslant t).$$

命题3.2　若 τ_1, τ_2 皆为$\{\mathscr{F}_t\}$停时,则 $\tau_1+\tau_2, \max\{\tau_1,\tau_2\}$, $\min\{\tau_1,\tau_2\}$ 亦然.

证　由 $\{\max\{\tau_1,\tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\}$ 得 $\max\{\tau_1,\tau_2\}$ 为停时;由 $\{\min\{\tau_1,\tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\}$ 得 $\min\{\tau_1,\tau_2\}$ 是停时. 又因为

$$\begin{aligned}\{\tau_1+\tau_2>t\} &= \{\tau_1+\tau_2>t, 0<\tau_1<t\} \\ &\quad \cup \{\tau_1+\tau_2>t, \tau_1=0\} \\ &\quad \cup \{\tau_1>t, \tau_2=0\} \\ &\quad \cup \{\tau_1>t, \tau_2>0\} \\ &\overset{\text{记作}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,\end{aligned}$$

令 Q 为有理数集,则有

$$\begin{aligned}A_1 &= \bigcup_{r\in Q\cap(0,t)} \{r<\tau_1<t\}\{\tau_2>t-r\} \in \mathscr{F}_t, \\ A_2 &= \{\tau_1=0\}\{\tau_2>t\} \in \mathscr{F}_t, \\ A_3 &= \{\tau_1>t\}\{\tau_2=0\} \in \mathscr{F}_t, \\ A_4 &= \{\tau_1>t\}\{\tau_2>0\} \in \mathscr{F}_t,\end{aligned}$$

所以 $\tau_1+\tau_2$ 是$\{\mathscr{F}_t\}$停时.

命题3.3　若$\{\tau_n\}$是一串$\{\mathscr{F}_t\}$停时,则 $\sup\limits_{n\geqslant1}\tau_n$ 亦然,若$\{\mathscr{F}_t\}$还是右连续的,则 $\inf\limits_{n\geqslant1}\tau_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tau_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\tau_n$ 皆为$\{\mathscr{F}_t\}$停时.

证　因为

$$\{\sup_{n\geqslant1}\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n \leqslant t\};$$

$$\{\inf_{n\geqslant1}\tau_n < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n < t\};$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf\tau_n = \sup_{k\geqslant1}\inf_{n\geqslant k}\tau_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\tau_n = \inf_{k\geqslant1}\sup_{n\geqslant k}\tau_n,$$

故命题 3.3 成立.

定义 3.3 若 τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,称

$$\mathscr{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathscr{F}_\infty : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \in \mathbf{T}\} \quad (3.6)$$

为 **τ 前 σ 代数**.

显然 $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 代数,若 $\tau \equiv a$ 是常数,则 $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_a \cdot \mathscr{F}_\tau$ 可理解为某物理过程到时刻 τ 为止的全部信息."停时" τ 的含义意味着当我们仅仅知道到 t 为止的信息后,就能断言 τ 是否大于 t.

若 τ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时,记

$$\mathscr{F}_{\tau+} \triangleq \{A \in \mathscr{F}_\infty : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+},\ \forall t \in \mathbf{T}\}. \quad (3.7)$$

易证 $\mathscr{F}_{\tau+}$ 是 σ 代数,而且

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \{A \in \mathscr{F}_\infty : A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \in \mathbf{T}\}. \quad (3.8)$$

命题 3.4 任给单增 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}$,有

(1) τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 $\Longrightarrow \tau \in \mathscr{F}_\tau$;

(2) τ_1, τ_2 皆为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,$\tau_1 \leqslant \tau_2 \Longrightarrow \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$;

(3) τ_n 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 $(n \geqslant 1)$,$\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续,$\tau = \inf\limits_{n \geqslant 1} \tau_n \Longrightarrow$ $\mathscr{F}_\tau = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\tau_n}$.

证 (1) 由 $\{\tau \leqslant a\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{a \wedge t} \subset \mathscr{F}_t \quad (\forall a, t \in \mathbf{T})$ 立即得(1).

(2) 任取 $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$,则 $A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = (A \cap \{\tau_1 \leqslant t\}) \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in \mathbf{T})$,此即 $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$. (2) 得证.

(3) 由命题 3.3 知 τ 是停时. 故由(2)知 $\mathscr{F}_\tau \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\tau_n}$. 另一方面,若 $A \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\tau_n}$,则

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau < t\} &= A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n < t\}\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathscr{F}_t \quad (\forall t \in \mathbf{T}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

又因为$\{\mathscr{F}_t\}$是右连续的，故τ是$\{\mathscr{F}_t\}$停时的充要条件是：τ是$\{\mathscr{F}_{t+}\}$停时.再由(3.8)、(3.9)得知$A\in\mathscr{F}_\tau$.

命题3.5　设τ_1,τ_2皆为$\{\mathscr{F}_t\}$停时，则$\{\tau_1<\tau_2\}$，$\{\tau_1\leqslant\tau_2\}$，$\{\tau_1=\tau_2\}$皆属于$\mathscr{F}_{\tau_1}\cap\mathscr{F}_{\tau_2}$.

证　$\{\tau_1<\tau_2\}\{\tau_2\leqslant t\}=\bigcup\limits_{\substack{r<t\\ r\in Q}}(\{\tau_1<r\}\{r<\tau_2\leqslant t\})\in\mathscr{F}_t$

$(\forall\, t\in\mathbf{T})$，所以

$$\{\tau_1<\tau_2\}\in\mathscr{F}_{\tau_2}.$$

又因为

$$\{\tau_1<\tau_2\}\{\tau_1\leqslant t\}=\bigcup_{r\in Q_t}\{\tau_1\leqslant r<\tau_2\}\in\mathscr{F}_t$$

$(t\in\mathbf{T},\ Q_t=(Q\cap[0,t])\cup\{t\},\ Q$是有理数集$)$，所以

$$\{\tau_1<\tau_2\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}.$$

总之$\{\tau_1<\tau_2\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}\cap\mathscr{F}_{\tau_2}$.

由$\{\tau_1<\tau_2\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}\cap\mathscr{F}_{\tau_2}$立即可得$\{\tau_1\leqslant\tau_2\}$和$\{\tau_1=\tau_2\}$皆属于$\mathscr{F}_{\tau_1}\cap\mathscr{F}_{\tau_2}$.

定义3.4　称以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的随机过程$X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$是**$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程**，简称适应过程，如果$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是第四章定义1.1中的$\{\mathscr{F}_t\}$适应过程，即$X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}_\Delta\ (\forall\, t\in\mathbf{T})$.称$X$是**可测的**，或**关于$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测**，亦即$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是第四章定义1.2中的可测过程或关于$\{\mathscr{F}_t\}$循序可测.

命题3.6　设$X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$是以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的循序可测的适应过程，$\tau$是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，则$X_\tau\in\mathscr{F}_\tau/\mathscr{E}_\Delta$.

证　只需证明

$$\text{“}B\in\mathscr{E}_\Delta\Longrightarrow\{X_\tau\in B\}\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t\text{”}$$

即可.

事实上，任取$B\in\mathscr{E}_\Delta$.令$\Phi_t(s,\omega)$为$X(s,\omega)$在$[0,t]\times\Omega$上

的局限，$\Psi_t(\omega) = (\tau(\omega),\omega)\ (\omega \in \{\tau \leqslant t\})$，$\Psi(\omega)$ 是 $X(\tau(\omega),\omega)$ 在 $\{\tau \leqslant t\}$ 上的局限，则 $\Psi = \Phi_t \circ \Psi_t$. 由于 X 是循序可测的，所以

$$\Phi_t \in \mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t / \mathscr{E}_\Delta \quad (\forall t \in \mathbf{T}).$$

但是，任取 $0 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant t$，$A \in \mathscr{F}_t$，有

$$\Psi_t^{-1}((u_1, u_2] \times A) = \{u_1 < \tau \leqslant u_2\} \cap A \in \mathscr{F}_t,$$

即是 $\Psi_t \in \mathscr{F}_t / \mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t$. 总之由复合函数的可测性有

$$\Psi = \Phi_t \circ \Psi_t \in \mathscr{F}_t / \mathscr{E}_\Delta,$$

故 $\Psi^{-1}(B) \in \mathscr{F}_t$. 而 Ψ 是 $X(\tau(\omega),\omega)$ 在 $\{\tau \leqslant t\}$ 上之局限，所以 $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. 命题证毕.

系 若 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的可测适应过程，$H \in \mathscr{F} / \mathscr{B}(\mathbf{T})$，则 $X_H \in \mathscr{F} / \mathscr{D}$.

证 令 $\widetilde{\mathscr{F}}_t \equiv \mathscr{F} (t \in \mathbf{T})$，把命题 3.6 应用于 $\widetilde{X} = (\Omega, \mathscr{F}, \widetilde{\mathscr{F}}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 即得系.

下面我们研究以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 的停时. 根据定理 2.4，不失普遍性可以假设 $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}, \mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t \cdot \mathscr{G}^0$，$\mathscr{G}, \mathscr{G}_t^0, \mathscr{G}_t$ 的意义如 §2. 我们将要考虑 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时及 $\{\mathscr{G}_t\}$ 停时（$\{\mathscr{G}\}_t$ 停时，有时亦称为 X 停时）. 如定义 3.3，若 τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$（或 $\{\mathscr{G}_t\}$）停时，仍记

$$\mathscr{F}_\tau = \{\Lambda : \Lambda \in \mathscr{F},\ \Lambda \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t,\ t \in [0,\infty]\},$$

$$\mathscr{G}_\tau = \{\Lambda : \Lambda \in \mathscr{G},\ \Lambda \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{G}_t,\ t \in [0,\infty]\}.$$

命题 3.7 设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的随机过程，$\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$，$\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t$，$\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，$(\overline{\mathscr{F}}_\tau)$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 在 $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$ 内关于 $U_1 = \{P^x : x \in E_\Delta\}$ 的完备化，即 $(\overline{\mathscr{F}}_\tau) = \mathscr{F}_\tau^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1}) = \mathscr{F}_\tau^{U_1}(\overline{\mathscr{F}}) = \mathscr{F}_\tau^{U_1}(\mathscr{F})$，则

$$(\overline{\mathscr{F}}_\tau) = \mathscr{F}_\tau, \quad (\overline{\mathscr{F}}_{t+}) = \mathscr{F}_{t+}. \tag{3.10}$$

证 任取 $A \in (\overline{\mathscr{F}}_\tau)$，由定义及命题 2.5(2) 知：对每个 $P^x \in$

U_1，即对每个 $x\in E_\Delta$，存在 $D_x\in\mathscr{F}_\tau$，$A_x,B_x\in\mathscr{F}$，使 $D_x-A_x\subset A\subset D_x\cup B_x$，$P^x(A_x)=P^x(B_x)=0$，所以

$$(D_x\cap\{\tau\leqslant t\}-A_x\cap\{\tau\leqslant t\})\subset A\cap\{\tau\leqslant t\}$$
$$\subset(D_x\cap\{\tau\leqslant t\}\cup B_x\cap\{\tau\leqslant t\}).$$

而由 $D_x\in\mathscr{F}_\tau$，有

$$D_x\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,$$

又显然有

$$A_x\cap\{\tau\leqslant t\},\quad B_x\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F},$$
$$P^x(A_x\cap\{\tau\leqslant t\})=P^x(B_x\cap\{\tau\leqslant t\})=0,$$

所以，$A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}_t$. 因此，$A\in\mathscr{F}_\tau$，即 $(\overline{\mathscr{F}}_\tau)\subset\mathscr{F}_\tau$. 而 $\mathscr{F}_\tau\subset(\overline{\mathscr{F}}_\tau)$ 是显然的，故 $(\overline{\mathscr{F}}_\tau)=\mathscr{F}_\tau$. 以后简记 $(\overline{\mathscr{F}}_\tau)=\overline{\mathscr{F}}_\tau$.

又因为 $\mathscr{F}_{t+}\subset\mathscr{F}_s$ （对一切 $s>t$ 成立），所以

$$(\overline{\mathscr{F}}_{t+})\subset\overline{\mathscr{F}}_s=\mathscr{F}_s\quad(\text{对一切 } s>t \text{ 成立}),$$
$$(\overline{\mathscr{F}}_{t+})\subset\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_{t+}$$

而

$$(\overline{\mathscr{F}}_{t+})\supset\mathscr{F}_{t+}$$

是显然的，故 $(\overline{\mathscr{F}}_{t+})=\mathscr{F}_{t+}$，命题得证. 以后简记 $(\overline{\mathscr{F}}_{t+})=\overline{\mathscr{F}}_{t+}$.

特别地，当 $\mathscr{F}=\mathscr{D}$，$\mathscr{F}_t=\mathscr{D}_t$ 时，有

命题3.7′　设 $X=(\Omega,\mathscr{G},\mathscr{G}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{G}_\Delta)$ 为状态空间的随机过程，τ 是 $\{\mathscr{G}_t\}$ 停时，$(\overline{\mathscr{G}}_\tau)$ 是 $\mathscr{G}_\tau$ 在 $\mathscr{G}=(\mathscr{G}^0)^{U_2}=\mathscr{G}^{U_2}$ 内关于 $U_2=\{P^\mu:\mu$ 为 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度$\}$ 的完备化，即 $(\overline{\mathscr{G}}_{t+})=\mathscr{G}_\tau^{U_2}(\mathscr{G}^{U_2})=\mathscr{G}_\tau^{U_2}(\mathscr{G})$，则

$$(\overline{\mathscr{G}}_{t+})=\mathscr{G}_{t+},\quad\overline{\mathscr{G}}_{t+}=\mathscr{G}_{t+}.\tag{3.10$'$}$$

命题3.8　设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的循序可测的随机过程，$\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}}$，$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_t$，$\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，则

$$X_\tau\in\mathscr{F}_\tau/\mathscr{E}_\Delta^*.\tag{3.11}$$

证 由命题3.6有

$$X_\tau \in \mathscr{F}_\tau / \mathscr{E}_\Delta. \tag{3.12}$$

为证(3.11)式,用命题2.7,视$\mathscr{F}_\tau, \mathscr{F}, \mathscr{E}_\Delta, \mathscr{E}_\Delta, \{P^x: x \in E_\Delta\}, \{\mu: \mu$为$\mathscr{E}_\Delta$上的有限测度$\}, X_\tau$分别为命题2.7中的$\mathscr{D}_1, \mathscr{E}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{E}_2, U_1, U_2, f$,则有$\mathscr{D}_i$是$\mathscr{E}_i$中的子$\sigma$代数,且由(3.12)式有

$$X_\tau \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2, \quad X_\tau \in \mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2.$$

显然,对每个$P^x \in U_1, P^x X_\tau^{-1}$是$\mathscr{E}_\Delta$上的有限测度,所以由命题2.7得

$$X_\tau \in \mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1}) / \mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2}). \tag{3.13}$$

而今由(3.10)式$\mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1}) = \mathscr{F}_\tau^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1}) = \overline{\mathscr{F}}_\tau = \mathscr{F}_\tau$,又$\mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2}) = \mathscr{E}_\Delta^*$,所以(3.13)即(3.11)式.

下面我们给出一个命题,它使得研究$\{\mathscr{G}_{t+}\}$停时的问题化为研究$\{\mathscr{G}_{t+}^0\}$停时的问题.

命题3.9 令τ为$\{\mathscr{G}_{t+}^0\}$停时,则对$\mathscr{E}_\Delta$上任何一个有限测度μ,存在一个$\{\mathscr{G}_{t+}^0\}$停时τ_μ,使$P^\mu(\tau \neq \tau_\mu) = 0$.

证 如能找出一串$\{\mathscr{G}_t\}$停时$\{\tau^{(n)}\}$,及一串$\{\mathscr{G}_t^0\}$停时$\{\tilde{\tau}^{(n)}\}$,使$\tau^{(n)} \downarrow \tau, P^\mu(\tau^{(n)} \neq \tilde{\tau}^{(n)}) = 0$,则取$\tau_\mu = \liminf_{n\to\infty} \tilde{\tau}^{(n)}$即为所求(因为由命题3.3,$\tau_\mu$必为$\{\mathscr{G}_{t+}^0\}$停时).事实上,令

$$\tau^{(n)}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2^n}, & 当\ \omega \in \left\{\dfrac{k}{2^n} \leqslant \tau < \dfrac{k+1}{2^n}\right\},\ k = 0,1,2,\cdots, \\ \infty, & 当\ \tau(\omega) = \infty, \end{cases}$$

则由$\{\tau^{(n)} \leqslant t\} = \bigcup_{k \leqslant 2^n t} \left\{\dfrac{k-1}{2^n} \leqslant \tau < \dfrac{k}{2^n}\right\}$及命题3.1得$\{\tau^{(n)} \leqslant t\} \in \mathscr{G}_t$,即$\tau^{(n)}$是$\{\mathscr{G}_t\}$停时,从而

$$\Lambda_k^{(n)} \equiv \left\{\tau^{(n)} = \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathscr{G}_{k/2^n},$$

所以存在$A_k^{(n)} \in \mathscr{G}_{k/2^n}^0$,使

$$P^\mu(\Lambda_k^{(n)} \Delta A_k^{(n)}) = 0.$$

令

$$B_1^{(n)} = A_1^{(n)}, \quad B_k^{(n)} = (A_k^{(n)} - \bigcup_{j<k} A_j^{(n)}),$$

$$\tilde{\tau}^{(n)}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n}, & \text{当 } \omega \in B_k^{(n)},\ k = 1,2,\cdots, \\ \infty, & \text{当 } \omega \in \Omega - \bigcup_{k \geqslant 1} B_k^{(n)}, \end{cases}$$

则由 $B_k^{(n)} \in \mathscr{G}_{k/2^n}^0$ 知 $\tilde{\tau}^{(n)}$ 是 $\{\mathscr{G}\}_t^0$ 停时. 又因为

$$\begin{aligned}
P^\mu(\Lambda_k^{(n)} \Delta B_k^{(n)}) &\leqslant P^\mu(\Lambda_k^{(n)} \Delta A_k^{(n)}) + P^\mu(A_k^{(n)} \Delta B_k^{(n)}) \\
&= P^\mu(A_k^{(n)} \Delta B_k^{(n)}) = P^\mu(A_k^{(n)} - B_k^{(n)}) \\
&= P^\mu(\bigcup_{j<k} A_k^{(n)} A_j^{(n)}) \leqslant \sum_{j<k} P^\mu(A_k^{(n)} A_j^{(n)}) \\
&\leqslant \sum_{j<k} P^\mu([\Lambda_k^{(n)} \cup (\Lambda_k^{(n)} \Delta A_k^{(n)})] \cap [\Lambda_j^{(n)} \Delta A_j^{(n)})]) \\
&\leqslant \sum_{j<k} [P^\mu(\Lambda_k^{(n)} \Lambda_j^{(n)}) + P^\mu(\Lambda_k^{(n)} \Delta A_k^{(n)}) \\
&\quad + P^\mu(\Lambda_j^{(n)} \Delta A_j^{(n)})] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

故 $P^\mu(\tilde{\tau}^{(n)} \neq \tau^{(n)}) = 0$. 命题证毕.

对于任何由 Ω 到$[0,\infty]$ 的变换 H,定义推移算子 θ_H 如下:

$$\theta_H(\omega) = \theta_{H(\infty)}. \tag{3.14}$$

显然,

$$X_t \circ \theta_H = X_{t+H} \quad (t \in \mathbf{T}). \tag{3.15}$$

命题3.9 设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程. 若对任何$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ,有 $X_\tau \in \mathscr{F}_\tau / \mathscr{E}_\Delta$,则对任何$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ 有 $\theta_\tau^{-1} \mathscr{G}_t^0 \subset \mathscr{F}_{\tau+t}$,更有 $\theta_\tau^{-1} \mathscr{G}^0 \subset \mathscr{F}$.

证 令

$$\mathfrak{M} = \{\Lambda : \Lambda = \bigcap_{j=1}^{n} X_{t_j}^{-1}(B_j),\ t_1 < \cdots < t_n \leqslant t;\ B_i \in \mathscr{E}_\Delta, \\ i = 1, \cdots, n;\ n \geqslant 1\},$$

$$\mathfrak{M}_1 = \{\Lambda : \Lambda \in \mathscr{G}_t^0,\ \theta_\tau^{-1}(\Lambda) \in \mathscr{F}_{\tau+t}\},$$

则任取 $\Lambda \in \mathfrak{M}$ 有

$$\theta_\tau^{-1}(\Lambda)=\bigcap_{j=1}^n \theta_\tau^{-1}\left(X_{t_j}^{-1}(B_j)\right)=\bigcap_{j=1}^n (X_{t_j}\circ\theta_\tau)^{-1}(B_j)$$
$$=\bigcap_{j=1}^n X_{\tau+t_j}^{-1}(B_j)\in\mathscr{F}_{\tau+t}. \tag{3.16}$$

而 $\mathfrak{M}_1$ 是 σ 代数,$\sigma(\mathfrak{M})=\mathscr{G}_t^0$, (3.16) 式即 $\mathfrak{M}_1\supset\mathfrak{M}$,所以 $\mathfrak{M}_1\supset\mathscr{G}_t^0$.命题得证.

定义 3.5 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的随机过程.称 X 具有**强马尔可夫性**或者称X 是**强马尔可夫过程**,如果:

(ⅰ) $X_\tau\in\mathscr{F}_\tau/\mathscr{E}_\Delta^*$ (τ 是$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时); (3.17)

(ⅱ)(S·M$_1$) $\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau})\mid\mathscr{F}_\tau)=\boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t))$

($f\in b\mathscr{E}_\Delta$, $x\in E_\Delta$, $t\in\mathbf{T}$, τ 是$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时). (3.18)

显然强马尔可夫过程必为马尔可夫过程,因为(S·M$_1$) $\Longrightarrow$(M$_1$).

附注 1 若 X 是循序可测的,且 $\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}}$, $\overline{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_t$,则由命题 3.8 得知(3.17) 式成立.

附注 2 由定理 2.1(1) 知:$\boldsymbol{E}^x(f(X_t))$ 是 x 的 $\mathscr{E}_\Delta$ 可测函数,所以由(3.17) 式可知(3.18) 式右端是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的.

以后如不声明,则约定:E 上的函数f 自动地延拓到E_Δ 上去,并满足 $f(\Delta)=0$. 根据此观点,$b\mathscr{E}$ 可视为 $b\mathscr{E}_\Delta$ 的子空间:$b\mathscr{E}=\{f:f\in b\mathscr{E}_\Delta,\ f(\Delta)=0\}$.因此(2.5) 式中定义的由 $b\mathscr{E}$ 到 $b\mathscr{E}$ 的正的有界线性算子 P_t,也可把 $b\mathscr{E}$ 按上述延拓的意义理解.任取 $f\in\mathscr{E}_\Delta$, $f(\Delta)=0$,定义

$$(P_tf)(x)=\boldsymbol{E}^x(f(X_t);X_t\in E)=\boldsymbol{E}^x(f(X_t);X_t\in E_\Delta)$$
$$=\boldsymbol{E}^x(f(X_t))\quad(x\in E_\Delta,\ t\in(0,\infty)), \tag{3.19}$$

$P_0=I$ 为恒等算子.

显然,由 $P^\Delta(X_t=\Delta)=1$ 得

$$(P_t f)(\Delta) = \boldsymbol{E}^{\Delta}(f(X_t); X_t \in E) = 0,$$

由(3.19)式有 $P_t f \in b\mathscr{E}_\Delta$,所以 P_t 仍为由 $b\mathscr{E}$(按延拓的意义,即 $b\mathscr{E}$ 视为 $b\mathscr{E}_\Delta$ 的子空间)到 $b\mathscr{F}$ 的正的有界线性算子.

定理 3.1　设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的随机过程,且满足(3.17)式,则下列陈述等价:

(0)　X 是强马尔可夫过程;

(ⅰ)　$(\mathrm{S}\cdot\mathrm{M}_1)'$　$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau})) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t)))$

$(f \in b\mathscr{E},\ x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ \tau$ 是 $\{\mathscr{F}\}_t$ 停时);　(3.18)′

(ⅱ)　$(\mathrm{S}\cdot\mathrm{M}_1)''$　$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau})) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}_\tau(f(X_t)))$

$(f \in b\mathscr{E}_\Delta,\ x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ \tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时);　(3.18)″

(ⅲ)　$(\mathrm{S}\cdot\mathrm{M}_1)$　$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau}) \mid \mathscr{F}_\tau) = \boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t))$

$(f \in b\mathscr{E}_\Delta,\ x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ \tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时);

(ⅳ)　$(\mathrm{S}\cdot\mathrm{M}_2)$　$\boldsymbol{E}^x(\xi \circ \theta_\tau \mid \mathscr{F}_\tau) = \boldsymbol{E}^{X_\tau}(\xi)$

$(\xi \in b\mathscr{G}^0,\ x \in E_\Delta,\ \tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时).　(3.20)

证　(ⅰ)⟹(ⅱ). 设(ⅰ)成立,令

$\mathscr{H} = \{f: f \in b\mathscr{E}_\Delta$, 且对一切 $x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ \{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ,有

$$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau})) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t)))\},$$

若能证 $\mathscr{H} \supset b\mathscr{E}_\Delta$,则(ⅱ)成立. 事实上,$\mathscr{H}$ 是向量空间,$b\mathscr{E} \subset \mathscr{H}$, $\mathbf{1}_{E_\Delta} \in \mathscr{H}$. 又因为对任何 $f \in b\mathscr{E}_\Delta$,必有 $f = (f - f(\Delta)) + f(\Delta)\mathbf{1}_{E_\Delta}$,所以 $f \in \mathscr{H}$,故 $\mathscr{H} \subset b\mathscr{E}_\Delta$.

(ⅱ)⟹(ⅲ). 设(ⅱ)成立. 由定义 2.1 附注(甲)有

$$\boldsymbol{E}^{\cdot}(f(X_t)) \in b\mathscr{E}_\Delta,$$

再用(3.17)式得 $\boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t)) \in \mathscr{F}_\tau$. 所以欲证(ⅲ)成立,只需证明对任何 $x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ f \in b\mathscr{E}_\Delta$ 及 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ,有

$$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau}); \Lambda) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_\tau}(f(X_t)); \Lambda) \quad (\Lambda \in \mathscr{F}_\tau). \tag{3.21}$$

事实上,令

$$\tau_\Lambda^{(\omega)} = \begin{cases} \tau(\omega), & \text{当 } \omega \in \Lambda, \\ \infty, & \text{当 } \omega \bar{\in} \Lambda, \end{cases}$$

则由 $\{\tau_\Lambda \leqslant u\} = \{\tau \leqslant u\} \cap \Lambda \in \mathscr{F}_u$ (因 $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$),可知 τ_Λ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,所以,由(ii)有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^x\left(f(X_{t+\tau_\Lambda})\right) &= \boldsymbol{E}^x\left(\boldsymbol{E}^{X(\tau_\Lambda)}(f(X_t))\right) \\ &= \boldsymbol{E}^x\left(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(f(X_t));\Lambda\right) \\ &\quad + \boldsymbol{E}^x\left(\boldsymbol{E}^{X(\infty)}(f(X_t));\Omega - \Lambda\right) \\ &= \boldsymbol{E}^x\left(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(f(X_t));\Lambda\right) + f(\Delta)P^x(\Omega - \Lambda) \end{aligned} \tag{3.22}$$

(最后一个等式由 $P^\Delta(X_t = \Delta) = 1$, $X(\infty) \equiv \Delta$ 而得出).又因为

$$\boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau_\Lambda})) = \boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\tau});\Lambda) + f(\Delta)P^x(\Omega - \Lambda), \tag{3.23}$$

由(3.22)、(3.23)得(3.21)式.

(iii)$\Longrightarrow$(iv). 设(iii)成立,则 X 必为马尔可夫过程,由命题3.10有 $\theta_\tau^{-1}\mathscr{G}^0 \subset \mathscr{F}$($\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时),故

$$\xi \circ \theta_\tau \in b\mathscr{F} \quad (\tau \text{ 是 } \{\mathscr{F}_t\} \text{ 停时}, \xi \in b\mathscr{G}^0).$$

而由(3.17)式及定理2.1(1)知 $\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi) \in \mathscr{F}_\tau$.所以为证(iv),只需证明:

$$\boldsymbol{E}^x(\xi \circ \theta_\tau;\Lambda) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi);\Lambda) \tag{3.24}$$

(对一切 $x \in E_\Delta$, $\xi \in b\mathscr{G}^0$, τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,$\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$)成立.利用单调系定理,则只需证明(3.24)式对一切 $x \in E_\Delta$, $\xi \in \mathscr{H}$, τ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,$\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$ 成立,其中

$$\mathscr{H} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{H}_n,$$

$$\mathscr{H}_n = \Big\{\xi : \xi = \prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j}),\ 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n,\ f_j \in b\mathscr{E}_\Delta,\ j = 1,\cdots,n\Big\}.$$

今对 n 作归纳法.当 $n = 1$ 时,$\xi \in \mathscr{H}_1$,对任何 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ,及 $\Lambda \in$

$\mathscr{F}_\tau$，由（iii）立得(3.24)式对此 ξ 成立. 设(3.24)式对任何 $\xi \in \mathscr{H}_{n-1}$、$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ，及 $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$ 成立，推证(3.24)式对任何 $\xi \in \mathscr{H}_n$、$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ，及 $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$ 成立. 事实上，任取 $\xi_0 = \prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j}) \in \mathscr{H}_n$，令

$$\tau_n = \tau + t_{n-1}, \tag{3.25}$$

则由 τ_n 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时，$\tau_n \geqslant \tau$，$\tau_n \geqslant t_{n-1}$ 及命题 3.4（ii）知

$$\Lambda \in \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau_n}, \tag{3.26}$$

且

$$\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j}) \in b\mathscr{F}_{t_{n-1}} \subset b\mathscr{F}_{\tau_n}. \tag{3.27}$$

由 τ_n 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时及(3.27)式和（iii）得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^x(\xi_0 \circ \theta_\tau \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) \\
&= \boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j+\tau}) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}\right) \\
&= \boldsymbol{E}^x\left(f_n(X_{\tau_n+t_n-t_{n-1}}) \prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j+\tau}) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}\right) \\
&\overset{(3.27)}{=\!=} \prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j+\tau}) \boldsymbol{E}^x(f_n(X_{\tau_n+t_n-t_{n-1}}) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j+\tau}) \cdot \boldsymbol{E}^{X(\tau_n)}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}})),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^x(\xi_0 \circ \theta_\tau ; \Lambda) \\
&= \boldsymbol{E}^x\left(\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j+\tau}) \cdot \boldsymbol{E}^{X(\tau_n)}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}})) ; \Lambda\right) \\
&\qquad (\Lambda \in \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau_n}).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

若令

$$g_j(x) = \begin{cases} f_j(x), & 当\ x \in E_\Delta,\ 1 \leqslant j < n-1, \\ f_{n-1}(x) \boldsymbol{E}^x(f_n(X_{t_n-t_{n-1}});\Lambda), & 当\ x \in E_\Delta,\ j = n-1, \end{cases}$$

则由 $\tau_n = \tau + t_{n-1}$ 及(3.29)式并用归纳法假设得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^x(\xi_0 \circ \theta_\tau;\Lambda) &= \boldsymbol{E}^x\Big(\prod_{j=1}^{n-1} g_j(X_{t_j+\tau});\Lambda\Big) \\
&= \boldsymbol{E}^x\Big(\Big[\prod_{j=1}^{n-1} g_j(X_{t_j})\Big]\circ \theta_\tau;\Lambda\Big) \\
&= \boldsymbol{E}^x\Big(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}\Big(\prod_{j=1}^{n-1} g_j(X_{t_j})\Big);\Lambda\Big) \\
&= \boldsymbol{E}^x\Big(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}\Big(\boldsymbol{E}^{X(t_{n-1})}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}}))\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j})\Big);\Lambda\Big).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

但是,由(ⅲ)有

$$\boldsymbol{E}^{X(t_{n-1})}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}})) = \boldsymbol{E}^x(f_n(X_{t_n}) \mid \mathscr{F}_{t_{n-1}}),$$

由 $\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j}) \in \mathrm{b}\mathscr{F}_{t_{n-1}}$ 得

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j}) \cdot \boldsymbol{E}^{X(t_{n-1})}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}})) \\
&\quad = \boldsymbol{E}^x\Big(\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j}) \mid \mathscr{F}_{t_{n-1}}\Big) = \boldsymbol{E}^x(\xi_0 \mid \mathscr{F}_{t_{n-1}}) \\
&\qquad\qquad (\text{对一切 } x \in E_\Delta),
\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{E}^{X(t)}\Big(\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_{t_j}) \cdot \boldsymbol{E}^{X(t_{n-1})}(f_n(X_{t_n-t_{n-1}}))\Big) = \boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi_0). \tag{3.31}$$

由(3.30)、(3.31)式得

$$\boldsymbol{E}^x(\xi_0 \circ \theta_\tau;\Lambda) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi_0);\Lambda).$$

此即(3.24)式对一切 $\xi \in \mathscr{H}_n$、$x \in E_\Delta$、$\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ 及一切 $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau$ 成立. 归纳法完成. (ⅲ)$\Longrightarrow$(ⅳ) 获证.

(ⅳ)$\Longrightarrow$(ⅰ). 设(ⅳ)成立. 取 $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$, $\xi = f(X_t)$, 把(3.20)式两边取期望即得(ⅰ).

系　设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的强马尔可夫过程，$\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}}$，$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_t$，则

(1)　对任何 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ，及 $t\in\mathbf{T}$，有

$$\theta_\tau^{-1}\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_{\tau+t}\text{，从而 }\theta_\tau^{-1}\mathscr{G}\subset\mathscr{F}; \tag{3.32}$$

(2)　对任何 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ、$x\in E_\Delta$，及任何 $\xi\in b\mathscr{G}$，有

$$\boldsymbol{E}^x(\xi\circ\theta_\tau\mid\mathscr{F}_\tau)=\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi). \tag{3.33}$$

证　(1) 由命题3.10有

$$\theta_\tau^{-1}\mathscr{G}_t^0\subset\mathscr{F}_{t+\tau},\quad\theta_\tau^{-1}\mathscr{G}^0\subset\mathscr{F}. \tag{3.34}$$

用命题2.7取 $\mathscr{F},\mathscr{G}^0,\mathscr{F}_{t+\tau},\mathscr{G}_t^0,\{P^x:x\in E_\Delta\},\{P^\mu:\mu$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度$\}$ 分别相当于命题 2.7 中的 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,U_1,U_2$，则由 (3.34) 式，用命题2.7，为证(3.32)式，只需证明 $U_1\theta_\tau^{-1}\subset U_2$(因为 $\mathscr{G}_t=(\mathscr{G}_t^0)^{U_1}((\mathscr{G}^0)^{U_2})=\mathscr{D}_2^{U_2}(\mathscr{E}_2^{U_2})$，$\mathscr{F}_{t+\tau}\overset{(3.10)}{=\!=}\overline{\mathscr{F}}_{t+\tau}=\mathscr{F}_{t+\tau}^{U_1}(\mathscr{F}^{U_1})=\mathscr{D}_1^{U_1}(\mathscr{E}_1^{U_1})$). 事实上，任取 $P^x\in U_1$，定义 $\nu=P^x\circ X_\tau^{-1}$，任取 $\Lambda\in\mathscr{G}^0$，由强马尔可夫性(S·M$_2$)有

$$\begin{aligned}P^x\theta_\tau^{-1}(\Lambda)&=\boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_\Lambda\circ\theta_\tau)=\boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\mathbf{1}_\Lambda))\\&=\int_{E_\Delta}E^y(1_\Lambda)(P^xX_\tau^{-1})(\mathrm{d}y)\\&=\int_{E_\Delta}E^y(\mathbf{1}_\Lambda)\nu(\mathrm{d}y)=P^\nu(\Lambda).\end{aligned}$$

此即 $U_1\theta_\tau^{-1}\subset U_2$. (1) 证毕.

(2)　由(3.32)式第二式及 $\xi\in b\mathscr{G}$ 知 $\xi\circ\theta_\tau\in b\mathscr{F}$，故(3.33)式左端之条件期望存在. 而由(3.17)式及定理2.3 (2) 可知 $\boldsymbol{E}^{X(\tau)}(\xi)\in\mathscr{F}_\tau$. 仿定理2.3(5)可证(3.33)式.

命题3.11　设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的强马尔可夫过程，$\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}}$，$\mathscr{F}_t=\overline{\mathscr{F}}_t$，$\eta,\tau$ 分别为 $\{\mathscr{F}_t\}$、$\{\mathscr{G}_{t+}\}$ 停时，则 $\eta+\tau\circ\theta_\eta$ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时.

证　令 Q 为有理数集，$\xi=\eta+\tau\circ\theta_\eta$，则

$$\{\xi < t\} = \bigcup_{\substack{r \in Q \\ r \in (0,t)}} \{\eta < t - r,\ \tau \circ \theta_\eta < r\}.$$

由 τ 是 $\{\mathscr{G}_{t+}\}$ 停时得

$$\{\tau < r\} \in \mathscr{G}_r. \tag{3.35}$$

再用 η 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时及(3.32)、(3.35)式得

$$\{\tau \circ \theta_\eta < r\} = \theta_\eta^{-1}\{\tau < r\} \in \mathscr{F}_{\eta+r}. \tag{3.36}$$

所以由 $\mathscr{F}_{\eta+r}$ 的定义,

$\{\eta < t - r, \tau \circ \theta_\eta < r\} = \{\tau \circ \theta_\eta < r\} \cap \{\eta + r < t\} \in \mathscr{F}_t.$

从而 $\{\xi < t\} \in \mathscr{F}_t \quad (t \in [0, \infty))$,即 ξ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时.

显然,命题 3.11 中,把条件改为 η 和 τ 分别为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 及 $\{\mathscr{G}_t\}$ 停时,命题的结论仍然成立.但命题之结论可否加强为 $\eta + \tau \circ \theta_\eta$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时,尚属未知.

定义 3.6 设 $\mathbf{B}$ 是一个 Banach 空间.称由 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}$ 的算子半群 $\{F_t : t \in [0, \infty)\}$ **是强连续的**,如果

$$\lim_{t \to t_0} \| F_t f - F_{t_0} f \| = 0 \quad (t_0 \in [0, \infty),\ f \in \mathbf{B}).$$

对于以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$,在(3.19)式中我们曾引进过一族由 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 到 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 的算子 $\{P_t : t \in [0, \infty)\}$,

$$(P_t f)(x) = \boldsymbol{E}^x(f(X_t); X_t \in E) = \boldsymbol{E}^x(f(X_t))$$
$$(t \in (0, \infty),\ f \in \mathrm{b}\mathscr{E},\ x \in E_\Delta), \tag{3.19$'$}$$

$P_0 = I$ 是恒等算子,

$$\mathrm{b}\mathscr{E} = \{f : f(\Delta) = 0,\ f \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta\},$$

若在 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 中引进范数 $\| f \| = \sup_{x \in E_\Delta} | f(x) |$,则 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 成为 Banach 空间,$\{P_t : t \in [0, \infty)\}$ 是有界线性算子族.而且用 K-C 方程式易证 $P_s \circ P_t = P_{s+t} (s, t \in [0, \infty))$,$\| P_t \| \leqslant 1$.所以 $\{P_t : t \in [0, \infty)\}$ 是 $\mathrm{b}\mathscr{E}$ 上的一个压缩型半群.

在上面的讨论中,以 $\mathrm{b}\mathscr{E}^* = \{f : f(\Delta) = 0,\ f \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta^*\}$ 代 $\mathrm{b}\mathscr{E}$,

有完全类似的结果

下面我们研究 $b\mathscr{E}^*$ 上的压缩型半群 $\{P_t : t \in [0,\infty)\}$ 的预解式.

定义 3.7　称以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的随机过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是 $\mathscr{G}^0$**可测的**,如果

$$X(\cdot,\ \cdot) \in (\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)/\mathscr{E}_\Delta. \tag{3.37}$$

设 λ 和 μ 分别是 $\mathscr{B}(\mathbf{T})$ 和 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的有限测度,记 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)^{\lambda\times\mu}$ 为 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)$ 关于 $\lambda \times P^\mu$ 的完备化. 若 X 是 $\mathscr{G}^0$ 可测的,则由 (3.37) 式及命题 2.7 系 2 得

$$X(\cdot,\ \cdot) \in (\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)^{\lambda\times\mu}/\mathscr{E}_\Delta^* \tag{3.38}$$

对 $\mathscr{B}(\mathbf{T}), \mathscr{E}_\Delta$ 上的一切有限测度 λ 和 μ 成立,而且任取 $f \in b\mathscr{E}$,由 (3.37) 有

$$f(X(\cdot,\ \cdot)) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0). \tag{3.39}$$

任取 $f \in b\mathscr{E}^*$,由 (3.38) 式有

$$f(X(\cdot,\ \cdot)) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)^{\lambda\times\mu}. \tag{3.40}$$

命题 3.12　设以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是 $\mathscr{G}^0$ 可测的. 任取 $f \in b\mathscr{E}$ (相应地 $b\mathscr{E}^*$),则

$$(t, x) \mapsto (P_t f)(x) \quad (t \in \mathbf{T},\ x \in E_\Delta)$$

是有界 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)$ (相应地 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)^{\lambda,\mu}$) 可测的,其中 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)^{\lambda,\mu}$ 是 $(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)$ 关于 $\lambda \times \mu$ 的完备化.

证　令 $\mathfrak{M} = \{B = A \times \Lambda : A \in \mathscr{B}(\mathbf{T}),\ \Lambda \in \mathscr{G}^0\}$,

$$\mathscr{H} = \{h : h \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0) \text{ 且}$$

$$\int_\Omega h(\cdot, \omega) P^\cdot(d\omega) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)\},$$

则 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系,且 $\sigma(\mathfrak{M}) = \mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0$. 又显然 $1 \in \mathscr{H}$ 且任取 $A \times \Lambda \in \mathfrak{M}$,必有

$$h \triangleq \mathbf{1}_{A\times\Lambda} \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0),$$

$$\int_\Omega h(\cdot,\omega)P^\cdot(\mathrm{d}\omega) = \mathbf{1}_A(\cdot)P^\cdot(\Lambda) \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)$$

(上式用到了定理 2.1 (1):$P^\cdot(\Lambda) \in \mathrm{b}\mathscr{E}_\Delta$),总之

$$h = \mathbf{1}_{A\times\Lambda} \in \mathscr{H} \quad (\forall A\times\Lambda \in \mathfrak{M}).$$

所以,用单调系定理可证

$$\mathscr{H} = \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0),$$

从而,对任何 $h \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)$,有

$$\int_\Omega h(\cdot,\omega)P^\cdot(\mathrm{d}\omega) \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta).$$

而对任何 $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}$,由(3.39)有 $f(X(\cdot,\cdot)) \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)$,所以

$$(P_tf)(x) = \int_\Omega f(X(t,\omega))P^x(\mathrm{d}\omega) \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta).$$

当 $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$ 时,类似地(在应用(3.39) 的地方改用(3.40)) 可证

$$(P_tf)(x) \in \mathrm{b}(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{E}_\Delta)^{\lambda,\mu}.$$

定义 3.8 设 $X = (\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的马尔可夫过程,且是 $\mathscr{G}^0$ 可测的,对 $\alpha > 0$, $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$,定义

$$\begin{aligned}(U^\alpha f)(x) &\triangleq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}(P_tf)(x)\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{E}^x\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}f(X_t)\mathrm{d}t\right) \quad (x \in E_\Delta).\end{aligned} \tag{3.41}$$

称 U^α 为 X 的α-位势算子,而称$\{U^\alpha:\alpha>0\}$为 X 的**预解式**,或半群$\{P_t:t \in \mathbf{T}\}$ 的预解式.

命题 3.13 设 X 和$\{U^\alpha:\alpha>0\}$如上,则

(1) $f \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$(相应地,$\mathrm{b}\mathscr{E}$) $\Longrightarrow U^\alpha f \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$(相应地, $\mathrm{b}\mathscr{E}$) $(\forall \alpha > 0)$;

(2) $f_i \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$(相应地,$\mathrm{b}\mathscr{E}$), $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1,\cdots,n)$ $\Longrightarrow U^\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^n c_if_i\right) = \sum\limits_{i=1}^n c_iU^\alpha(f_i) \in \mathrm{b}\mathscr{E}^*$(相应地,$\mathrm{b}\mathscr{E}$) $(\forall \alpha > 0)$;

(3)　$\| U^\alpha \| \triangleq \sup_{\|f\|=1} \| U^\alpha f \| \leqslant \frac{1}{\alpha}$ $(\forall \alpha > 0)$ $(\|f\| \triangleq \sup_{x \in E_\Delta} |f(x)|, f \in b\mathscr{E}^*$ 或 $b\mathscr{E})$.

(4)　满足预解方程式：

$$U^\alpha - U^\beta = (\beta - \alpha) U^\alpha \circ U^\beta \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{3.42}$$

由(3.42)即得 $U^\alpha \circ U^\beta = U^\beta \circ U^\alpha (\forall \alpha > 0, \beta > 0)$.

证　(1) 任取 $f \in b\mathscr{E}^*$,由(3.40),

$$f(X(\cdot, \cdot)) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)^{\lambda \times \mu}$$

(λ 是 $\mathscr{B}(\mathbf{T})$ 上任一有限测度,μ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上任一有限测度).

首先我们证明

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t, \cdot)) dt \in (\mathscr{G}^0)^{P^\mu}.$$

令

$$\lambda(A) = \int_A e^{-\alpha t} dt \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbf{T})),$$

则由命题 2.4 及 $f(X(\cdot, \cdot)) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)^{\lambda \times \mu}$ 得知存在 $f_i^{(\mu)}(\cdot, \cdot) \in b(\mathscr{B}(\mathbf{T}) \times \mathscr{G}^0)$ 使

$$f_1^{(\mu)}(\cdot, \cdot) \leqslant f(X(\cdot, \cdot)) \leqslant f_2^{(\mu)}(\cdot, \cdot),$$

$(\lambda \times P^\mu)(f_1^{(\mu)} \neq f_2^{(\mu)}) = 0$　($\forall P^\mu$, μ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上任一有限测度).

若令

$$g_i^\mu(\cdot) \triangleq \int_0^\infty e^{-\alpha t} f_i^{(\mu)}(t, \cdot) dt$$
$$= \int_0^\infty f_i^{(\mu)}(t, \cdot) \lambda(dt) \in \mathscr{G}^0 \quad (\mu \text{ 是 } \mathscr{E}_\Delta \text{ 上有限测度}),$$

用 Fubini 定理立得

$$P^\mu(g_1^{(\mu)} \neq g_2^{(\mu)}) = 0 \quad (\text{对 } \mathscr{E}_\Delta \text{ 上任一有限测度 } \mu).$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t, \cdot)) dt \in (\mathscr{G}^0)^{P^\mu}$$

$$(\text{对 } \mathscr{E}_\Delta \text{ 上任何有限测度 } \mu).$$

而 f 是有界的,所以

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t,\cdot))dt \in b(\mathscr{G}^0)^{U_2} = b\mathscr{G}.$$

所以,由定理 2.3(2) 知

$$\boldsymbol{E}^{\cdot}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t,\omega))dt\right) \in b\mathscr{E}_\Delta^*.$$

若注意 $f \in b\mathscr{E}^*$,则有 $f(\Delta) = 0$ 及 $P^\Delta(X_t = \Delta) = 1$,故

$$\boldsymbol{E}^\Delta\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t,\omega))dt\right) = 0.$$

故 $U^\alpha f \in b\mathscr{E}^*$.

(2) 显然成立.

(3) 和(4) 通过直接计算即可得. 定理证毕.

本节剩余部分恒设 E_Δ 是度量空间,$\mathscr{E}_\Delta = \mathscr{B}(E_\Delta)$.

定义 3.9 称 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是**右连续的**,如果 $\forall \omega \in \Omega$, $X(\cdot,\omega)$ 是右连续的.

定理 3.2 设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathrm{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的右连续的马尔可夫过程,$\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t$(从而由定理 2.4 知 X 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta^*)$ 为状态空间的马尔可夫过程). 若存在一个由 E 上的某些连续函数所构成的向量空间 L,使

(1) 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 及任何 $\alpha > 0$, 任何 $f \in L$, $U^\alpha f(X(\cdot,\omega))$ 在 $[0, \zeta(\omega))$ 上右连续,其中 ζ 是 X 的"寿命";

(2) 对 E 中任何开子集 G,存在 $f_n \in L$,使 $f_n \uparrow \mathbf{1}_G$.

则 $X^+ = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_{t+}, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的强马尔可夫过程,X 亦然.

证 由于 X 是右连续的马尔可夫过程,所以 X 是循序可测的. 而 $\mathscr{F}_{t+} \supset \mathscr{F}_t$,所以 X^+ 也是循序可测的. 又因为 $\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t$, 所以 $\mathscr{F}_{t+} = \overline{\mathscr{F}}_{t+}$. 因此,用命题 3.8 可知:对任何 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 τ 及任何 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时 η,均有

$$X_\tau \in \mathscr{F}_\tau / \mathscr{E}_\Delta^*, \quad X_\eta \in \mathscr{F}_{\eta+} / \mathscr{E}_\Delta^*.$$

因此,为证 X^+ 和 X 均为以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 状态空间的马尔可夫过程,只需证明对任何 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时 η,有

$$(\mathrm{S}\cdot\mathrm{M}_1)' \boldsymbol{E}^x(f(X_{t+\eta})) = \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X_\eta}(f(X_t)))$$

$$(x \in E_\Delta,\ t \in \mathbf{T},\ f \in b\mathscr{E}). \tag{3.43}$$

若能证明(3.43)对一切 $x \in E_\Delta$、$t \in \mathbf{T}$、$\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时 η 及一切 $f \in L$ 成立,则由 L 满足性质(2)可知:(3.43)对一切 $x \in E_\Delta$, $t \in \mathbf{T}$, $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时 η 及一切 $\mathbf{1}_G$(G 是 E 中任一开子集)成立.再用单调系定理(注意:全体开集构成 Π 系,且它产生的 σ 代数就是 $\mathscr{E}$)可知(3.43)对一切 $x \in E_\Delta$、$t \in \mathbf{T}$、$\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时 η 及一切 $f \in b\mathscr{E}$ 成立.

下面证明(3.43)对一切 $f \in L$ 成立.事实上任取 $f \in L$,作

$$\eta_n = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2^n}, & \text{当} \dfrac{k}{2^n} \leqslant \eta < \dfrac{k+1}{2^n},\ k = 0,1,\cdots, \\ \infty, & \text{当 } \eta = \infty, \end{cases}$$

则 $\eta_n \downarrow \eta$,所以由 f 的连续性及 $X(\cdot,\omega)$ 的右连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} f(X_{\eta_n+t}) = f(X_{\eta+t}). \tag{3.44}$$

由 η 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时及命题 3.1 得

$$\left\{\eta_n = \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}.$$

再用 X 的马尔可夫性得

$$\boldsymbol{E}^x\left(\boldsymbol{E}^{X(\frac{k}{2^n})}\left(f(X_t);\ \eta_n = \frac{k}{2^n}\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{E}^x\left(f(X_{t+\frac{k}{2^n}});\ \eta_n = \frac{k}{2^n}\right). \tag{3.45}$$

由 L 满足(1)及

$$t \geqslant \zeta \Longrightarrow U^\alpha(f(X(t))) = 0$$

(注意:$f \in L$,从而 f 是定义在 E 上的函数,按以前的约定 f 自动

扩张到 E_Δ 上去而使 $f(\Delta)=0$,此处 ζ 是 X 的寿命.)可得

$$\lim_{n\to\infty} U^\alpha(f(X_{\eta_n}))=U^\alpha(f(X_\eta)),\ [\text{a.e.}].\tag{3.46}$$

由(3.44),(3.45),(3.46)并用控制收敛定理再注意 $f(X_\infty)=f(\Delta)=0$ 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\alpha t}\boldsymbol{E}^x(f(X(t+\eta)))\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}^x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X(t+\eta_n))\mathrm{d}t\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{E}^x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X(t+\frac{k}{2^n}))\mathrm{d}t;\eta_n=\frac{k}{2^n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{E}^x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}\boldsymbol{E}^{X\left(\frac{k}{2^n}\right)}(f(X(t)))\mathrm{d}t;\eta_n=\frac{k}{2^n}\right)\\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^{X(\eta)}(f(X(t))))\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{3.47}$$

由 Laplace 变换的唯一性,从(3.47)知:(3.43)对一切 $f\in L$ 成立.定理证毕.

系 在定理3.2的条件下,$\widetilde{X}=(\Omega,\mathscr{G},\mathscr{G}_{t+},X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程.

证 在定理3.2条件下,X^+ 是强马尔可夫过程,更是马尔可夫过程.而 $\mathscr{F}_{t+}\supset\mathscr{G}_{t+}$, $\mathscr{F}\supset\mathscr{G}$,故系成立.

定理3.3 若 $X=(\Omega,\mathscr{G},\mathscr{G}_{t+}^0,X_t,\theta_t,P^x,\mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程,则

$$\mathscr{G}_t=\mathscr{G}_{t+}\quad(t\in\mathbf{T}).\tag{3.48}$$

证 由 X 是马尔可夫过程得知

$$\boldsymbol{E}^\mu(\xi\circ\theta_t\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)=E^{X(t)}(\xi)$$

($\forall t\in\mathbf{T}$, μ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的任一有限测度,$\xi\in b\mathscr{G}^0$).但是由定理2.1(1)及 $X(t)\in\mathscr{G}_t^0/\mathscr{E}_\Delta$ 得知

$$\boldsymbol{E}^{X(t)}(\xi)\in\mathscr{G}_t^0.$$

所以

$$\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\circ\theta_t\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)=\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\circ\theta_t\,|\,\mathscr{G}_t^0).\tag{3.49}$$

推证

$$\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)=\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\,|\,\mathscr{G}_t^0).\tag{3.50}$$

利用单调系定理,只需证明形如

$$\xi=\prod_{i=1}^{n}f_i(X(t_i))\ (f_i\in \mathrm{b}\mathscr{E}_{\Delta},\ 0\leqslant t_1<\cdots<t_j\leqslant t<t_{j+1}<\cdots<t_n,\ n\geqslant 1)$$

的 ξ 能使(3.50)成立.

事实上,对这种 ξ,总可表示为

$$\xi=\Big(\prod_{i=1}^{j}f_i(X(t_i))\Big)(G\circ\theta_t),\quad G=\prod_{i=j+1}^{n}f_i(X(t_i-t)),$$

而对这种 ξ,由(3.49)总有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)&=\Big(\prod_{i=1}^{j}f_i(X(t_i))\Big)\boldsymbol{E}^{\mu}(G\circ\theta_t\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)\\&\xlongequal{(3.49)}\Big(\prod_{i=1}^{j}f_i(X(t_i))\Big)\boldsymbol{E}^{\mu}(G\circ\theta_t\,|\,\mathscr{G}_t^0)\\&=\boldsymbol{E}^{\mu}(\xi\,|\,\mathscr{G}_t^0).\end{aligned}$$

(3.50)得证.因此取 $\xi=\mathbf{1}_{\Lambda}$, $\Lambda\in\mathscr{G}_{t+}^0$,由(3.50)得

$$\mathbf{1}_{\Lambda}=E^{\mu}(\mathbf{1}_{\Lambda}\,|\,\mathscr{G}_{t+}^0)=\boldsymbol{E}^{\mu}(\mathbf{1}_{\Lambda}\,|\,\mathscr{G}_t^0),\tag{3.51}$$

而(3.51)右方关于 $\mathscr{G}_t^0$ 是可测的,所以存在 $\xi_{\mu}^*\in\mathscr{G}_t^0$,使 $P^{\mu}(\xi\neq\xi_{\mu}^*)=0$,即存在 $\Lambda_{\mu}\in\mathscr{G}_t^0$,使 $P^{\mu}(\Lambda\Delta\Lambda_{\mu})=0$.因此,由命题2.5(1)得知

$$\Lambda\in(\mathscr{G}_t^0)^{U_2}((\mathscr{G}^0)^{U_2})=\mathscr{G}_t,$$
$$U=\{P^{\mu}:\mu\text{ 是 }\mathscr{E}_{\Delta}\text{ 上有限测度}\}.$$

这就证明了:$\mathscr{G}_{t+}^0\subset\mathscr{G}_t$.

为了完成定理3.3的证明,先证明

引理3.1　令$(D,\mathscr{D})$为可测空间,$\{\mathscr{D}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{D}$中一族单增子$\sigma$代数,$U$是$\mathscr{D}$上一族有限测度,$\overline{\mathscr{D}}_t=\mathscr{D}_t^U(\mathscr{D}^U)$为$\mathscr{D}_t$关于$U$

在 $\mathscr{D}^U$ 中的完备化, $\overline{(\mathscr{D}_{t+})}$ 之定义类似. 则

$$\overline{(\mathscr{D}_{t+})} = (\overline{\mathscr{D}}_t)_+ \triangleq \bigcap_{s>t} \overline{\mathscr{D}}_s . \tag{3.52}$$

证 令 $\mathfrak{N}^\mu$ 为 $\mathscr{D}^\mu$ 中全体 μ 零测子集, 则由命题 2.5 (1) 有

$$\overline{(\mathscr{D}_{t+})} = \bigcap_{\mu \in U} \sigma(\mathscr{D}_{t+} \cup \mathfrak{N}^\mu), \tag{3.53}$$

$$(\overline{\mathscr{D}}_t)_+ = \bigcap_{s>t} \overline{\mathscr{D}}_s = \bigcap_{s>t} \bigcap_{\mu \in U} \sigma(\mathscr{D}_s \cup \mathfrak{N}^\mu), \tag{3.54}$$

所以

$$(\overline{\mathscr{D}}_t)_+ \supset \overline{(\mathscr{D}_{t+})}. \tag{3.55}$$

今任取 $A \in (\overline{\mathscr{D}}_t)_+$, 由(3.51)式可取 $s_n \downarrow t$, 使

$$A \in \bigcap_{\mu \in U} \sigma(\mathscr{D}_{s_n} \cup \mathfrak{N}^\mu) \quad (n \geqslant 1). \tag{3.56}$$

但由命题 2.5 (1) 有

$$\begin{aligned} &\bigcap_{\mu \in U} \sigma(\mathscr{D}_{s_n} \cup \mathfrak{N}^\mu) \\ &\quad = \bigcap_{\mu \in U} \{A \in \mathscr{D}^\mu : \exists A_\mu^{(n)} \in \mathscr{D}_{s_n},\ \mu(A_\mu^{(n)} \Delta A) = 0\}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

由(3.56)、(3.57)得

$$A = A_\mu^{(n)} \Delta (A_\mu^{(n)} \Delta A),\ A_\mu^{(n)} \in \mathscr{D}_{s_n},\ \mu(A_\mu^{(n)} \Delta A) = 0$$
$$(\text{对一切 } \mu \in U,\ n \geqslant 1). \tag{3.58}$$

令

$$A_\mu = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty A_\mu^{(n)} = \lim_{k \to \infty} \bigcap_{n=k}^\infty A_\mu^{(n)} \in \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{D}_{s_n} = \mathscr{D}_{t+},$$
$$\Lambda_\mu = A_\mu \Delta A \in \mathscr{D}^\mu,$$

则

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda_\mu) &= \mu(A_\mu \Delta A) \\ &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty (A_\mu^{(n)} - A)\Big) + \mu\Big(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty (A - A_\mu^{(n)})\Big) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(A_\mu^{(n)} - A) + \sum_{n=1}^\infty \mu(A - A_\mu^{(n)}) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(A_\mu^{(n)} \Delta A) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\Lambda_\mu \in \mathfrak{M}^\mu$ （$\forall \mu \in U$）. 而由 $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu \Delta A$ 得 $A = \Lambda_\mu \Delta A_\mu$. 而今 $\Lambda_\mu \in \mathfrak{M}^\mu$, $A_\mu \in \mathscr{D}_{t+}$，所以

$$A \in \sigma(\mathscr{D}_{t+} \cup \mathfrak{M}^\mu)\ (\forall \mu \in U).$$

因此再用命题 2.5(1) 得

$$A \in \bigcap_{\mu \in U} \sigma(\mathscr{D}_{t+} \cup \mathfrak{M}^\mu) = \mathscr{D}_{t+}^U(\mathscr{D}^U) = \overline{(\mathscr{D}_{t+})},$$

所以

$$(\overline{\mathscr{D}}_t)_+ \subset \overline{(\mathscr{D}_{t+})}. \tag{3.59}$$

由(3.55)和(3.59)即得引理 3.1.

现在利用引理 3.1 来完成定理 3.3 的证明. 由引理 3.1 及前面已证明的 $\mathscr{G}_{t+}^0 \subset \mathscr{G}_t$ 有

$$\mathscr{G}_{t+} = (\overline{\mathscr{G}}_t^0)_+ = \overline{(\mathscr{G}_{t+}^0)} \subset \overline{\mathscr{G}}_t = \mathscr{G}_t.$$

而 $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{G}_{t+}$ 是显然的. 故定理 3.3 得证.

定义 3.10　设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程，E_Δ 是度量空间，$\mathscr{E}_\Delta = \mathscr{B}(E_\Delta)$，$\{P_t : t \in [0, \infty)\}$ 是 X 所产生的 Banach 空间 $b\mathscr{E}$ 上的压缩半群，$\{U^\alpha : \alpha > 0\}$ 是其预解式. $C(E)$ 表示 E 上的全体有界连续函数(当然 $C(E) \subset b\mathscr{E}$).

(1)　若 $P_t(C(E)) \subset C(E)$, $\forall t \in [0, \infty)$，则称 X 是 **Feller 过程**；

(2)　若 $U^\alpha(C(E)) \subset C(E)$, $\forall \alpha > 0$，则称 X 是**弱 Feller 过程**.

命题 3.14　Feller 过程必为弱 Feller 过程.

证　因为

$$(U^\alpha f)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}(P_t f)(x)\mathrm{d}t \quad (f \in b\mathscr{E}),$$

所以，若 X 是 Feller 过程，用控制收敛定理立即可得

$$f \in C(E) \Longrightarrow P_t f \in C(E) \Longrightarrow U^\alpha f \in C(E)\ (\alpha > 0).$$

故 Feller 过程必为弱 Feller 过程.

定理 3.4 设 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的弱 Feller 过程,$\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F}_t = \overline{\mathscr{F}}_t$,则 $X^+ = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_{t+}, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 是以$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$为状态空间的强马尔可夫过程,$X$ 亦然.

证 在定理 3.2 中取 $L = C(E)$,则由 X 的右连续性及弱 Feller 性得知 L 满足定理 3.2 中的条件(1).令 F 为E 中任一闭集,ρ 是E 中度量,再令

$$F_n = \left\{x \in E: \rho(x, F) \leqslant \frac{1}{n}\right\},$$

$$K_n = \left\{x \in E: \rho(x, F) \geqslant \frac{2}{n}\right\},$$

$$f_n(x) = \frac{\rho(x, K_n)}{\rho(x, K_n) + \rho(x, F_n)},$$

则 F_n, K_n 是闭集,$f_n \in C(E)$, $f_n \downarrow \mathbf{1}_F$.此即 $L = C(E)$ 满足定理 3.2 中的条件(2).故由定理 3.2 立刻可得定理 3.4.

§4 马尔可夫过程的分类及轨道性质

在这一节中,我们将对马尔可夫过程进行分类,并介绍其轨道性质.

设 $X = \{X_t: t \in \mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的以$(E, \mathscr{E})$为状态空间、以 $P(s, x, t, A)$ 为转移函数的马尔可夫过程,$\mathbf{T} \subset [0, \infty]$. 我们对 X 分类的标准依据下列四要素:

(1) 时间域 $\mathbf{T}$;

(2) 状态空间$(E, \mathscr{E})$;

(3) 转移函数 $P(s, x, t, A)$;

(4) 轨道 $X(\cdot, \omega)$ 的性质.

定义 4.1 若上述马尔可夫过程 X 的时间域 $\mathbf{T}$ 是一区间(有限的或无穷的)则称 X 是**马尔可夫过程**,若 $\mathbf{T}$ 是可数集,通常取

$\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots\}$，则称 X 是**马尔可夫链**；依状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 来分类，当 E 是可数集时（这时 $\mathscr{E}$ 可取为 E 的一切子集）称 X 是**可数状态的**，若 $(E,\mathscr{E})$ 是一般的可测空间，称 X 是**一般状态的**；依转移函数 $P(s,x,t,A)$ 来分类，若 $P(s,x,t,A)=P(t-s,x,A)$ 是时齐的，则称 X 是**时齐的**，反之称 X 是**非时齐的**；依轨道 $X(\cdot,\omega)$ 来分类，若几乎所有的轨道都是连续函数时，称 X 是**纯连续的**，若几乎所有的轨道都不是连续函数，称 X 是**纯间断的**. 当然，既非纯连续亦非纯间断的 X 也是存在的.

由于马尔可夫过程 X 的概率规律性由其有限维分布族所决定，而有限维分布族又由初始分布与转移函数决定. 初始分布很简单，从理论上看，有时可以适当取，所以转移函数对马尔可夫过程来说至关重要. 马尔可夫性在分布函数上的表现就是K-C方程式. 下面我们就来分析各种特殊的马尔可夫过程 X 的转移函数的形式及K-C方程式的表述. 先就以前三个标准——时间域$\mathbf{T}$、状态空间$(E,\mathscr{E})$、转移函数来观察：

1)　一般状态非时齐的马尔可夫过程

其转移函数为 $P(s,x,t,A)$ $(s,t\in[0,C),\ s\leqslant t,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$，K-C 方程式为

$$\int_E P(s,x,t,\mathrm{d}y)P(t,y,u,A)=P(s,x,u,A)$$

$$(s,t,u\in[0,C),\ s<t<u,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

2)　一般状态时齐的马尔可夫过程

其转移函数为 $P(t,x,A)$ $(t\in[0,C),\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$，K-C 方程式为

$$\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)=P(s+t,x,A)$$

$$(s,t,s+t\in[0,C),\ s,t>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

3)　可数状态非时齐的马尔可夫过程

其转移函数 $P(s,i,t,A)$ $(s,t\in[0,C)$ $(s<t)$ $i\in E$ 是可

数集,$A \subset E$)由转移矩阵

$$P(s,t) \triangleq (p_{i,j}(s,t), i,j \in E) \quad (s,t \in [0,C),\ s < t)$$

所决定(其中 $p_{i,j}(s,t) = P(s,i,t,\{j\})$),K-C 方程式为 $P(s,t)P(t,u) = P(s,u)$,即

$$\sum_{k \in E} p_{i,k}(s,t) p_{k,j}(t,u) = p_{i,j}(s,u)$$

$$(i,j \in E,\ s < t < u,\ s,t,u \in [0,C)).$$

4) 可数状态时齐的马尔可夫过程

其转移函数 $P(t,i,A)$ ($t \in [0,C)$, $i \in E$ 是可数集, $A \subset E$)由转移矩阵

$$P(t) \triangleq (p_{i,j}(t),\ i,j \in E) \quad (t \in [0,C))$$

所决定(其中 $p_{i,j}(t) = P(t,i,\{j\})$),K-C 方程式为 $P(s)P(t) = P(s+t)$,即

$$\sum_{k \in E} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t) = p_{i,j}(s+t)$$

$$(i,j \in E,\ s,t,s+t \in [0,C)).$$

5) 一般状态非时齐的马尔可夫链

其转移函数为 $P(m,x,n,A)$ ($n > m$, $m,n = 0,1,2,\cdots$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$),K-C 方程式为

$$\int_E P(m,x,n,\mathrm{d}y) P(n,y,k,A) = P(m,x,k,A),$$

$$(m < n < k,\ m,n,k = 0,1,2,\cdots,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}).$$

由 $P(m,x,n,A)$ 的参数 m 和 n 取离散值及 K-C 方程式可知:$P(m,x,n,A)$ 由 $P(m,x,m+1,A)$ ($m = 0,1,2,\cdots$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$) 所决定,且 K-C 方程式与

$$\int_E P(m,x,m+1,\mathrm{d}y) P(m+1,y,m+2,A) = P(m,x,m+2,A)$$

($m = 0,1,2,\cdots$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$) 等价.

6) 可数状态非时齐的马尔可夫链

其转移函数$P(m,i,n,A)$ ($m<n$, $m,n=0,1,2,\cdots$, $i\in E$ 是可数集,$A\subset E$) 由转移矩阵

$$P(m,m+1)\triangleq(p_{i,j}(m,m+1),i,j\in E)\ (m=0,1,\cdots)$$

所决定(其中 $p_{i,j}(m,m+1)=P(m,i,m+1,\{j\})$), K-C方程式为

$$P(m,m+1)P(m+1,m+2)$$
$$=P(m,m+2)\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

7)　一般状态时齐的马尔可夫链

其转移函数 $P(n,x,A)$ ($n=1,2,\cdots$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$) 由 $P(x,A)\triangleq P(1,x,A)$ 所决定,其 K-C 方程式等价于

$$P(2,x,A)=\int P(x,\mathrm{d}y)P(y,A)\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

8)　可数状态时齐的马尔可夫链

其转移函数 $P(n,i,A)$ ($n=1,2,\cdots$, $i\in E$ 是可数集,$A\subset E$) 由转移矩阵

$$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)\quad(\text{其中 } p_{i,j}=P(1,i,\{j\}))$$

决定,其 K-C 方程式等价于

$$P^2=(P(2,i,\{j\}),\ i,j\in E).$$

前面是根据第 1 至第 3 个标准来对马尔可夫过程进行分类的. 下面我们研究马尔可夫过程的轨道性质.

容易看出:第五章 §1 研究的 Poisson 过程是可数状态的时齐的纯间断的马尔可夫过程;第五章 §2 研究的 Brown 运动是一般状态的时齐的纯连续的马尔可夫过程. Lévy 过程是马尔可夫过程,但一般来说,它既不一定纯连续也不一定纯间断.

下面我们给出马尔可夫过程轨道纯连续的一个判别定理. 这就是下面的著名的 Дынкин-Kinney 定理.

定理 4.1　设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}=[0,C)\}$ 是以$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$为状态空间、以 $P(s,x,t,A)$ 为转移函数的可分的马尔可夫过程, C 可为正实数亦可为 ∞. 令 $V_\varepsilon(x)=\mathbf{R}-(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 为 x 的 ε

邻域之补集，

$$\varphi_\varepsilon(t) \triangleq \sup_{\substack{s,s+u\in\mathbf{T}\\ x\in\mathbf{R},0\leqslant u\leqslant t}} P(s,x,s+u,V_\varepsilon(x)), \tag{4.1}$$

如果

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\varphi_\varepsilon(t)}{t} = 0 \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{4.2}$$

则几乎所有的轨道 $X(\cdot,\omega)$ 在 $\mathbf{T}$ 上连续，即 X 是纯连续型马尔可夫过程.

证明参见[76] §5.3 定理 1.

注 条件(4.2)的概率意义是：当在时刻 s 质点处于 x 时，经过一段短时间 $u(\leqslant t)$，质点跑出 x 的 ε 邻域的概率对 x 和 s 一致地很小，小到比 t 的阶还要小($t\to 0$ 时).

下面我们研究定理 4.1 的逆问题. 首先我们引进几个概念.

定义 4.2 设(E,ρ)是度量空间，G 是 E 中开集，C 为正数或 ∞，

$$f:[0,C)\mapsto E,$$

令

$$\tau_G \triangleq \tau_G(f) \triangleq \inf\{t\in[0,C):\rho(f([0,t]),E-G)=0\}$$
$$(约定\ \inf\varnothing=\infty). \tag{4.3}$$

命题 4.1 若 f 在$[0,C)$上连续且 G 是开集，$0<\tau_G<\infty$，则 τ_G 是 f 初达 $E-G$ 的时刻，而且

$$f(\tau_G)\in\overline{G}\cap(E-G) \quad (\overline{G}\ 是\ G\ 之闭包).$$

证 由 f 的连续性及 τ_G 之定义和 G 是开集，立即可得 $f(\tau_G)\in\overline{G}$.

下面证明 $f(\tau_G)\in E-G$. 任取 $\varepsilon>0$，由 $\rho(f([0,\tau_G+\varepsilon]),E-G)=0$ 得知存在 $\varepsilon_n\to a\leqslant 0$，使

$$\rho(f(\tau_G+\varepsilon_n),E-G)<\frac{1}{n}. \tag{4.4}$$

若 $a<0$，由(4.4)及 f 和 $\rho(\cdot,A)$ 的连续性得

$$\rho(f(\tau_G + a), E - G) = 0.$$

这与 τ_G 的定义矛盾,所以 $a = 0$,即

$$\rho(f(\tau_G), E - G) = 0.$$

但 $E - G$ 是闭集,所以 $f(\tau_G) \in E - G$.命题证毕.

注意:此处 G 是开集,所以 $\bar{G} \cap (E - G) = \bar{G} - G = \bar{G} - G^0 \triangleq \partial G$ 是 G 的"边界".

定义 4.3　设 $f:[0,C) \mapsto \mathbf{R}$, $G = (a,b) \subset \mathbf{R}$, $\tau_G(f)$ 如(4.3)所定义,称 ***f* 在 *G* 中连续**,如果 f 对 $t \in [0, \tau_G(f)]$ 连续.称**随机过程** $X = \{X_t : t \in [0,C)\}$ **在 *G* 中连续**,如果对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 对 $t \in [0, \tau_G(X(\cdot,\omega))]$ 连续.此处 C 可为正实数亦可为 ∞.

定理 4.2　设 $X = \{X(t) : t \in [0,C)\}$ 是以 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ 为状态空间的时齐的以 $P(t,x,A)$ 为转移函数的右连续的强马尔可夫过程,G 是 $\mathbf{R}$ 中之开集.若 X 在 G 中连续,则对任意 $x \in U = (u_1, u_2) \subset G$,恒有

$$P(t,x,\mathbf{R} - U) = o(t) \quad (\text{当 } t \to 0). \tag{4.5}$$

证明参见[76] §5.3 定理 2.

第八章　纯间断马尔可夫过程

在第七章中，我们经常假定 E 是 L.C.C.B. T_2 空间，$\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$ 是 E 中全体 Borel 集合．从时齐的具有推移算子的以 $(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程 $X = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, \mathbf{T})$ 出发，引进过 X 的转移函数 $P(t,x,A)$ $(t \in \mathbf{T},\ x \in E_\Delta,\ A \in \mathscr{E}_\Delta)$ 及它所产生的半群 $\{P_t : t \in \mathbf{T}\}$ 和预解式 $\{U^\alpha : \alpha > 0\}$．

在这一章的§1和§2中，我们经常假定 $(E, \mathscr{E})$ 是任意可测空间（E 中不必有拓扑），并撇开马尔可夫过程 X，研究 $(E, \mathscr{E})$ 上的（准）转移函数 $P(t,x,A)$ $(t \in [0,\infty),\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$ 及它产生的半群 $\{P_t : t \in [0,\infty)\}$ 和预解式 $\{U^\alpha : \alpha > 0\}$ 的分析性质．本章恒设 $\mathbf{T} = [0,\infty)$，$\mathscr{B}_\infty = \mathscr{B}(\mathbf{T})$ 为 $\mathbf{T}$ 的全体 Borel 集合．

§1　准转移函数及其半群之连续性、可微性

在这一节，设对角线集合 $\{(x,x) : x \in E\} \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$，从而 E 的任何单点集合 $\{x\} \in \mathscr{E}$ $(x \in E)$．再设 $\mathbf{T} = [0,\infty)$．$b\mathscr{E}$ 按 sup 定义范数而成 Banach 空间．$P(t,x,A)$ $(t \in \mathbf{T},\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$ 是准转移函数，$\{P_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是由 $P(t,x,A)$ 所产生的 $b\mathscr{E}$ 上的半群：

$$(P_t f)(x) = \int_E P(t,x,\mathrm{d}y) f(y) \quad (t \in \mathbf{T},\ x \in E,\ f \in b\mathscr{E})$$

$P_0 = I$ 是恒等算子．$\{U^\alpha : \alpha > 0\}$ 是 $P(t,x,A)$（或 $\{P_t : t \in \mathbf{T}\}$）所确定的预解式：

$$(U^\alpha f)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}(P_t f)(x)\mathrm{d}x \ (\alpha > 0, x \in E, f \in \mathrm{b}\mathscr{E}).$$

定义 1.1　设 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 上的压缩型半群. 称

$$\mathbf{B}_0 = \{f : f \in \mathbf{B},\ (\mathrm{s}) \lim_{t=0+} F_t f = f\}$$

为 $\{F_t\}$ 的**连续域**.

(注意:此处及今后,极限、连续、导数、积分和(条件)期望号前冠以(s),仍如前所说明的,它们指强极限、强连续、强导数、强积分(Bochner 积分)和强(条件)期望.)

而称

$$\mathscr{D}_A = \{f : f \in \mathbf{B}_0, 且存在 g \in \mathbf{B}, 使 g = (\mathrm{s}) \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(F_h f - f)\}$$

为 $\{F_t\}$ 的**无穷小算子的定义域**,称由下式定义的 $\mathbf{A}$ 为 $\{F_t\}$ 的强无穷小算子,

$$\mathbf{A}f = (\mathrm{s}) \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(F_h f - f), \quad f \in \mathscr{D}_A.$$

命题 1.1　设 $\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 上压缩型半群 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的连续域,$\mathbf{A}$ 是其强无穷小算子,则

(1)　$\mathbf{B}_0$ 是 $\mathbf{B}$ 的闭线性子空间;

(2)　任意固定 $f \in \mathbf{B}_0$, $t \mapsto F_t f$ 在 $\mathbf{T}$ 上强连续;

(3)　任意固定 $f \in \mathscr{D}_A$,有

$$(\mathrm{s}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_t f) = \mathbf{A} \circ F_t f = F_t \circ \mathbf{A}f \quad (t \in \mathbf{B});$$

(4)　$\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠,从而 $\overline{\mathscr{D}}_A = \mathbf{B}_0$($\overline{\mathscr{D}}_A$ 表示 $\mathscr{D}_A$ 之闭包);

(5)　对任何 $\alpha > 0$, $\alpha I - \mathbf{A}$ 有逆算子:$(\alpha I - \mathbf{A})^{-1} = R_\alpha$, $\{R_\alpha : \alpha > 0\}$ 称为 $\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的强预解式,其中

$$R_\alpha f = (\mathrm{s})\int_{[0,\infty)} e^{-\alpha t} F_t f \mathrm{d}t \quad (f \in \mathbf{B}_0).$$

注意:由于 $F_t f$ 对 t 而言强连续,从而强可测,再注意 $\| F_t f \|$

$\leqslant \| f \|$ 得知上式右端是 Bochner 可积的.

证明可参见第三章 §5.

定理 1.1(Hille-Yosida) 设 $\mathbf{B}_0$ 是 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 的一个闭线性子空间,$\mathscr{D}_A \subset \mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}: \mathscr{D}_A \mapsto \mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}$ 是线性算子,则 $\mathbf{A}$ 决定唯一一个 $\mathbf{B}_0$ 上的强连续的压缩型的半群$\{F_t: t \in \mathbf{T}\}$,使其强无穷小算子就是 $\mathbf{A}$ 的充要条件是:

(i) $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathbf{B}_0$ 中稠;

(ii) 任取 $f \in \mathbf{B}_0$,方程式

$$\begin{cases}(\alpha I - \mathbf{A})g = f, \\ g \in \mathscr{D}_A\end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

恰有唯一一个解,记此解为$(\alpha I - \mathbf{A})^{-1} f$ 或$R_\alpha f$;

(iii) R_α 是有界线性算子,且 $\| R_\alpha \| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

证明请参看三章定理 5.5.

定义 1.2 称准转移函数 $P(t,x,A)$ 是**标准的**,如果

$$\lim_{t \to 0+} P(t,x,A) = P(0,x,A) = I_A(x) \quad (x \in E,\ A \in \mathscr{E}).$$

定理 1.2 若 $P(t,x,A)$ 是标准的准转移函数,则

(1) $P(t,x,\{x\}) > 0$ $(t \in \mathbf{T},\ x \in E)$;

(2) $| P(t,x,A) - P(u,x,A) | \leqslant 1 - P(| t - u |, x, \{x\})$ $(t, u \in \mathbf{T},\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$,

从而对每一个固定的 $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$, $P(\cdot,x,A)$ 在 $\mathbf{T}$ 上一致连续,而且对 $A \in \mathscr{E}$ 而言是等度的;

(3) 对每个固定的 $t \in \mathbf{T}$, $h(x) \equiv P(t,x,B_x)$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数,其中 $B \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, $B_x = \{y: (x,y) \in B\}$ 是 B 在 x 处的截口集.特别地,由于$\{x\}$ 是对角线集在 x 处的截口集,而又假定了对角线集属于 $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$,所以 $P(t,x,\{x\})$ 是 x 的 E 可测函数.

证 (1) 因为对任何 $u, v \in \mathbf{T}$,有

$$P(u + v,x,A) = \int_E P(u,x,\mathrm{d}y) P(v,y,A)$$

$$\geqslant P(u,x,\{x\})P(v,x,A),$$

$$P(t,x,\{x\}) \geqslant \left[P\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)\right]^{2^n},$$

由 $\lim_{t\to 0+} P(t,x,\{x\}) = 1$ 即得(1).

(2) 不失普遍性,可令 $t \geqslant u, t = u + v$,则

$$\begin{aligned} &P(t,x,A) - P(u,x,A) \\ &= \int_B P(v,x,\mathrm{d}y)P(u,y,A) - P(u,x,A) \\ &= \int_{E-\{x\}} P(v,x,\mathrm{d}y)P(u,y,A) - P(u,x,A) \\ &\quad \cdot (1 - P(v,x,\{x\})), \end{aligned}$$

所以

$$P(t,x,A) - P(u,x,A) \geqslant -(1 - P(v,x,\{x\})).$$

又因为

$$\begin{aligned} &P(t,x,A) - P(u,x,A) \\ &\leqslant \int_{E-\{x\}} P(v,x,\mathrm{d}y)P(u,y,A) \\ &\leqslant P(v,x,E - \{x\}) \\ &\leqslant 1 - P(v,x,\{x\}). \end{aligned}$$

由上述两个不等式即得(2).

(3) 若 $B = A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathscr{E}\,(i = 1,2)$,则

$$P(t,x,B_x) = \mathbf{1}_{A_1}(x)P(t,x,A_2)$$

是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数,注意到全体上述形状的 B 形成了 $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ 中的一个 Π 系,而

$$\mathscr{H} \equiv \{B: B \in \mathscr{E}\times\mathscr{E},\ P(t,x,B_x)\text{ 是 } x \text{ 的 } \mathscr{E}\text{ 可测函数}\}$$

是 d 系,此外,$\mathscr{H}$ 还包含了上述 Π 系,上述 Π 系生成的 σ 代数就是 $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$,所以

$$\mathscr{H} \supset \mathscr{E}\times\mathscr{E}.$$

(3) 得证.

系 对标准的准转移函数 $P(t,x,A)$, 对任意固定的 $A\in\mathscr{E}$, 恒有 $P(\cdot,\cdot,A)\in\mathscr{B}_\infty\times\mathscr{E}$.

下面我们还要引进一个由 $P(t,x,A)$ 所产生的半群.

令 $\mathscr{L}(\mathscr{E})=\{\mu:\mu$ 是 $\mathscr{E}$ 上的全变差有限的完全可加的实值的集合函数$\}$. 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中定义线性运算如下:

$$(c_1\mu_1+c_2\mu_2)(A)=c_1\mu_1(A)+c_2\mu_2(A)$$
$$(\mu_1,\mu_2\in\mathscr{L}(\mathscr{E}),\ c_1,c_2\in\mathbf{R},\ A\in\mathscr{E});$$

范数如下:

$$\|\mu\|=|\mu|(E)\quad(\mu\in\mathscr{L}(\mathscr{E})),$$

其中, $|\mu|=\mu^++\mu^-$, $\mu^+(A)=\mu(AF)$, $\mu^-(A)=-\mu(AG)$, $A\in\mathscr{E}$, (F,G) 是 μ 的一组 Hahn 分解, 即是 F,G 分别为 μ 的正、负集, $F\cap G=\varnothing$, $F\cup G=E$.

容易证明: $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 成一 Banach 空间, 而且 $\|\mu\|$ 就是"全变差"范数, 即

$$\begin{aligned}\|\mu\|&=|\mu|(E)\\&=\sup\Big\{\sum_{i=1}^n|\mu(A_i)|:A_1,\cdots,A_n\ 两两不交,\\&\qquad A_i\in\mathscr{E},\ \bigcup_{i=1}^nA_i=E,\ n\geqslant1\Big\}.\end{aligned}$$

定义一个由 $P(t,x,A)$ 导出的定义在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 上的半群 $\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$: 任取 $\mu\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$, 定义

$$(V_t\mu)(A)=\int_E\mu(\mathrm{d}x)P(t,x,A)\quad(t\in\mathbf{T},\ A\in\mathscr{E}).$$

显然, V_t 是定义在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 上取值于 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中的有界线性算子, 而由 $P(t,x,A)$ 满足 K-C 方程式可得

$$\begin{aligned}(V_{s+t}\mu)(A)&=\int_E\mu(\mathrm{d}x)P(s+t,x,A)\\&=\int_E\mu(\mathrm{d}x)\int_EP(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)\\&=(V_t\circ V_s\mu)(A)\quad(s,t\in\mathbf{T},\ A\in\mathscr{E}).\end{aligned}$$

显然, $\| V_t\mu \| \leqslant \| \mu \|$ $(\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E}),\ t \in \mathbf{T})$,所以$\{V_t : t \in \mathbf{T}\}$是压缩型的半群.

命题 1.2　任取 $f \in b\mathscr{E},\ \mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$,定义

$$(f,\mu) \equiv \int_E \mu(\mathrm{d}x) f(x),$$

则$(P_t f,\mu) = (f, V_t\mu)$,从而$\{P_t : t \in \mathbf{T}\}$的$\{V_t : t \in \mathbf{T}\}$相互唯一决定.

证

$$(P_t f,\mu) = \int_E \mu(\mathrm{d}x)\int_E P(t,x,\mathrm{d}y) f(y) = (f, V_t\mu).$$

若令 ε_x 为 $\mathscr{E}$ 上的测度值集中在$\{x\}$的概率测度,则

$$(V_t\mu)(A) = (\mathbf{1}_A, V_t\mu) = (P_t\mathbf{1}_A,\mu);$$
$$(P_t f)(x) = (P_t f,\varepsilon_x) = (f, V_t\varepsilon_x).$$

定理 1.3　若 $P(t,x,A)$ 是标准的准转移函数,则$\{V_t : t \in \mathbf{T}\}$是$\mathscr{L}(\mathscr{E})$上的强连续的半群.

证　任取 $\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$,令 A_t, B_t 是 $V_t\mu - \mu$ 的一组 Hahn 分解,则

$$\begin{aligned}
\| V_t\mu - \mu \| &= \int_E \mu(\mathrm{d}x)(P(t,x,A_t) - \mathbf{1}_{A_t}(x)) \\
&\quad - \int_E \mu(\mathrm{d}x)(P(t,x,B_t) - \mathbf{1}_{B_t}(x)) \\
&\leqslant \int_E |\mu|(\mathrm{d}x)\,|P(t,x,A_t) - \mathbf{1}_{A_t}(x)| \\
&\quad + \int_E |\mu|(\mathrm{d}x)\,|P(t,x,B_t) - \mathbf{1}_{B_t}(x)|.
\end{aligned}$$

但是 $|\mu|(E) = \|\mu\| < \infty$, $|P(t,x,A_t) - \mathbf{1}_{A_t}(x)| \leqslant 2$,而且由定理 1.2 有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0+} |P(t,x,A_t) - \mathbf{1}_{A_t}(x)| \\
&\qquad \leqslant \limsup_{t\to 0+} |1 - P(t,x,\{x\})| = 0,
\end{aligned}$$

所以由控制收敛定理有

$$\lim_{t\to 0+}\int_E |\mu|(\mathrm{d}x)|P(t,x,A_t)-\mathbf{1}_{A_t}(x)|=0.$$

仿之有

$$\lim_{t\to 0+}\int_E |\mu|(\mathrm{d}x)|P(t,x,B_t)-\mathbf{1}_{B_t}(x)|=0.$$

故对任何 $\mu\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$,有

$$\lim_{t\to 0+}\|V_t\mu-\mu\|=0.$$

再利用$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$是压缩型半群及命题1.1得知$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$是强连续的.

定理1.4 若$P(t,x,A)$是标准的准转移函数,$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$为其产生的$\mathrm{b}\mathscr{E}$上的半群,$\{U^\alpha:\alpha>0\}$为$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$的预解式.令$\mathfrak{M}'$为$\mathrm{b}\mathscr{E}$的闭线性子空间,记

$$U^\alpha(\mathfrak{M}')\equiv\{f:f=U^\alpha g,\ g\in\mathfrak{M}'\},$$

若$U^\alpha(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'\ (\alpha>0)$,则下列诸陈述等价:

(i) $\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$在$\mathfrak{M}'$上强连续;

(ii) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\|\alpha U^\alpha f-f\|=0\ (f\in\mathfrak{M}')$;

(iii) $U^\alpha(\mathfrak{M}')$在$\mathfrak{M}'$中稠$(\alpha>0)$.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii).设$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$在$\mathfrak{M}'$上强连续.任取$f\in\mathfrak{M}'$,由于

$$\begin{aligned}\|\alpha U^\alpha f-f\|&=\left\|\int_0^\infty\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(P_tf-f)\mathrm{d}t\right\|\\&\leqslant\int_0^\infty\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\|P_tf-f\|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以,利用P_tf在$t\in\mathbf{T}=[0,\infty)$上强连续,并利用控制收敛定理,在上式中令$\alpha\to\infty$即得(ii).

(ii)$\Longrightarrow$(iii).设$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\|\alpha U^\alpha f-f\|=0\ (f\in\mathfrak{M}')$,则由$\{U^\alpha:\alpha>0\}$满足预解方程式

$$(U^\alpha-U^\beta)+(\alpha-\beta)U^\alpha\circ U^\beta=0\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$$

及 $U^\alpha(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'$ 可知

$$U^\alpha(\mathfrak{M}') = U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}') \quad (\text{不依赖 } \alpha > 0).$$

所以,任取 $\alpha > 0$, $f \in \mathfrak{M}'$,必有 $g \in \mathfrak{M}'$,使

$$U^\alpha f = U^{\alpha_0} g \quad (g \text{ 可依赖于} \alpha \text{ 及} f).$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \| \alpha U^{\alpha_0} g - f \| = \lim_{\alpha\to\infty} \| \alpha U^\alpha f - f \| = 0,$$

此即 $U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')$ 在 $\mathfrak{M}'$ 中稠.

(ii)$\Longrightarrow$(i). 设 $U^\alpha(\mathfrak{M}')$ 在 $\mathfrak{M}'$ 中稠($\alpha > 0$). 由于 $U^\alpha(\mathfrak{M}') = U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')$ 不依赖 $\alpha > 0$,所以任取 $f \in U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')$,必存在 $g \in \mathfrak{M}'$,使 $f = U^\beta g$. 因此,由 $\{U^\alpha : \alpha > 0\}$ 满足预解方程式可得

$$\begin{aligned}\| \alpha U^\alpha f - f \| &= \| \alpha U^\alpha \circ U^\beta g - U^\beta g \| \\ &= \left\| \frac{\alpha}{\beta - \alpha}(U^\alpha - U^\beta) g - U^\beta g \right\| \\ &= \left\| \frac{\alpha}{\beta - \alpha} U^\alpha g \right\| + \left\| \left(\frac{\alpha}{\beta - \alpha} + 1 \right) U^\beta g \right\| \\ &\leqslant \frac{2}{|\beta - \alpha|} \| g \|.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\alpha\to\infty} \| \alpha U^\alpha f - f \| = 0 \quad (f \in U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')). \tag{1.1}$$

但是 $U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')$ 在 $\mathfrak{M}'$ 中稠, 所以, 任取 $f \in \mathfrak{M}'$, 均有 $f_n \in U^{\alpha_0}(\mathfrak{M}')$,使 $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$. 因此由 $\| \alpha U^\alpha \| \leqslant 1$ 及(1.1)式可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{\alpha\to\infty} \| \alpha U^\alpha f - f \| \\ &\leqslant \limsup_{\alpha\to\infty} (\| \alpha U^\alpha f - \alpha U^\alpha f_n \| + \| \alpha U^\alpha f_n - f_n \| \\ &\quad + \| f_n - f \|) \\ &\leqslant \limsup_{\alpha\to\infty} (2 \| f_n - f \| + \| \alpha U^\alpha f_n - f_n \|) \\ &= 2 \| f_n - f \|.\end{aligned} \tag{1.2}$$

在上式中令 $n \to \infty$ 即得

$$\lim_{\alpha\to\infty} \| \alpha U^\alpha f - f \| = 0 \quad (f \in \mathfrak{M}'). \tag{1.3}$$

任取一个固定的$\beta>0$. 由于$\{U^{\alpha}:\alpha>0\}$满足预解方程式，且$U^{\alpha}(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'$(对一切$\alpha>0$)，所以对任何$f\in\mathfrak{M}'$，均有

$$“U^{\alpha_0}f=0\Longrightarrow U^{\alpha}f=0\ (\text{对一切}\ \alpha>0)”. \qquad (1.4)$$

若$U^{\beta}f=0$，则由(1.4)、(1.3)式得

$$f=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha U^{\alpha}f=0.$$

此即把U^{β}的定义域由$b\mathscr{E}$局限到$\mathfrak{M}'$去时，U^{β}是由$\mathfrak{M}'$到$U^{\beta}(\mathfrak{M}')$的一对一的算子. 又因为$U^{\beta}(\mathfrak{M}')$在$\mathfrak{M}'$中稠，而且U^{β}是有界线性算子. $\|\beta U^{\beta}\|\leqslant 1$. 所以，由命题1.1 (5)及定理1.1得知在$\mathfrak{M}'$上存在唯一一个强连续的压缩型的半群$\{\widetilde{P}_t:t\in\mathbf{T}\}$，使

$$U^{\alpha}f=(\mathrm{s})\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\alpha t}\widetilde{P}_t f\mathrm{d}t\quad(f\in\mathfrak{M}',\ \alpha>0), \qquad (1.5)$$

更有

$$U^{\alpha}f(x)=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\alpha t}\widetilde{P}_t f(x)\mathrm{d}t\quad(f\in\mathfrak{M}',\ x\in E,\ \alpha>0), \qquad (1.6)$$

和“$f\in\mathfrak{M}'\Longrightarrow\widetilde{P}_t f\in\mathfrak{M}'\ (t\in\mathbf{T})$.”但是，

$$U^{\alpha}f(x)=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\alpha t}P_t f(x)\mathrm{d}t\quad(f\in\mathfrak{M}',\ x\in E,\ \alpha>0). \qquad (1.7)$$

所以若能证明对任何$f\in\mathfrak{M}'$，$P_t f(x)$，$\widetilde{P}_t f(x)$是$t\in\mathbf{T}$的连续函数，则由(1.6)、(1.7)式及Laplace变换的唯一性定理可得

$$\widetilde{P}_t f=P_t f\quad(f\in\mathfrak{M}',\ t\in\mathbf{T}),$$

从而$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$在$\mathfrak{M}'$上强连续，且$P_t(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'(t\in\mathbf{T})$，定理1.4得证.

事实上，任取$f\in\mathfrak{M}'$，由$\widetilde{P}_t f$在$t\in\mathbf{T}$上强连续，更有$(\widetilde{P}_t f)(x)$在$t\in\mathbf{T}$上连续，又因为对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，由定理1.2知$P(t,x,A)$是$t\in\mathbf{T}$的连续函数，所以对$(E,\mathscr{E})$上的任何简单函数，即对

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{A_i}(x)$$

$$(c_i\in\mathbf{R},\ A_i\in\mathscr{E},\ \{A_i\}\text{ 两两不交,且 }\bigcup_{i=1}^{n}A_i=E)$$

来说,$(P_tf)(x)$ 是 $t\in\mathbf{T}$ 的连续函数.今任取 $f\in\mathfrak{M}'$,必有简单函数列 $\{f_n\}$,使

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0. \tag{1.8}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to t_0}|(P_tf)(x)-(P_{t_0}f)(x)|\\
&\quad\leqslant\limsup_{t\to t_0}(|(P_tf)(x)-(P_tf_n)(x)|\\
&\qquad+|(P_tf_n)(x)-(P_{t_0}f_n)(x)|\\
&\qquad+|(P_{t_0}f_n)(x)-(P_{t_0}f)(x)|)\\
&\quad\leqslant\limsup_{t\to t_0}(|\int_E P(t,x,\mathrm{d}y)(f(y)-f_n(y))|\\
&\qquad+|\int_E P(t_0,x,\mathrm{d}y)(f_n(y)-f(y))|)\\
&\quad\leqslant 2\|f-f_n\|.
\end{aligned}\tag{1.9}$$

在(1.9)式中令 $n\to\infty$,并由(1.8)式得

$$\lim_{t\to t_0}|(P_tf)(x)-(P_{t_0}f)(x)|=0.$$

定理 1.4 得证.

系 若 $U^\alpha(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'(\alpha>0)$,定理1.4的(i)(或者(ii),或者(iii))成立,则

$$P_t(\mathfrak{M}')\subset\mathfrak{M}'\quad(t\in\mathbf{T}).$$

此事实在定理 1.4 的(iii)⟹(i) 的证明中已证.

下面我们研究标准的准转移函数及半群的可微性.

定理 1.5 设 $P(t,x,A)$ 是标准的准转移函数,则对任何 $x\in E$,极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))$$

收敛到 $q(x)=\sup\limits_{t>0}\frac{1}{t}f(t,x)$,其中 $f(t,x)=-\log P(t,x,\{x\})$, $q(x)$ 可为 ∞. 此外,还有

(i) $q(\cdot)\in\mathscr{E}$;

(ii) $1-P(t,x,\{x\})\leqslant 1-\mathrm{e}^{-q(x)t}$; (1.10)

(iii) $|P(u,x,A)-P(v,x,A)|\leqslant 1-\mathrm{e}^{-q(x)|u-v|}$

(约定:当 $q(x)=\infty$, $t>0$ 时, $\mathrm{e}^{-q(x)t}=0$). (1.11)

先给出一个引理.

引理 1.1 设 $f:[0,\infty)\mapsto[0,\infty]$,且满足:

(i) 半可加性: $f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)$ $(u,v\geqslant 0)$;

(ii) $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=0$,

则 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}f(t)=\sup\limits_{t>0}\frac{f(t)}{t}$.

证明甚易,留给读者作为习题.

现在利用引理 1.1 来证明定理 1.5. 任意取定 $x\in E$,令 $f(t)=-\log P(t,x,\{x\})$,则 $f(t)$ 满足引理 1.1 的全部条件,所以

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\xlongequal{\text{记作}}q(x). \tag{1.12}$$

若 $q(x)=0$,则 $f(t)\equiv 0$ (对一切 $t>0$),所以 $P(t,x,\{x\})\equiv 1$ (对一切 $t>0$),从而

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))=q(x).$$

若 $q(x)>0$,则当 t 充分接近于 0 时有 $f(t)>0$,所以

$$\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))=\frac{1-\mathrm{e}^{-f(t)}}{f(t)}\cdot\frac{f(t)}{t}. \tag{1.13}$$

在(1.13)式中令 $t\to 0+$ 并由 $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=0$ 可得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))=q(x).$$

由定理 1.2 的(3)立得

(i)　$q(\cdot) \in \mathscr{E}$.

由(1.12)式立得

(ii)　$1 - P(t,x,\{x\}) \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-q(x)t}$.

由(ii)及定理1.2的(2)立得

(iii)　$|P(u,x,A) - P(v,x,A)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-q(x)|u-v|}$.

定义1.3　若 $q(x) = \infty$，则称 x 是 $P(t,x,A)$ 的**瞬变状态**；若 $0 \leqslant q(x) < \infty$，则称 x 是 $P(t,x,A)$ 的**稳定状态**；特别地，当 $q(x) = 0$ 时，称稳定状态 x 是**吸收状态**.

记 $\mathscr{E}(u) = \{A: A \in \mathscr{E},\ \lim\limits_{t\to 0+} \sup\limits_{x\in A}(1 - P(t,x,\{x\})) = 0\}$，易证 $\mathscr{E}(u)$ 是环，且"$A \in \mathscr{E}(u),\ B \subset A,\ B \in \mathscr{E} \Longrightarrow B \in \mathscr{E}(u)$".

定理1.6　设 $P(t,x,A)$ 是标准的准转移函数，$A \in \mathscr{E}(u)$，$x \in A$，则

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} P(t,x,A) = q(x,A)$$

收敛且有穷，即 $0 \leqslant q(x,A) < \infty$.

先证一个引理.

引理1.2　任给 $B \in \mathscr{E}(u)$，$\varepsilon < \frac{1}{4}$，若对一切 $y \in B$，$0 \leqslant t \leqslant \tau$，都有

$$1 - P(t,y,\{y\}) < \varepsilon, \tag{1.14}$$

则对一切 $v \in (0,\tau]$，$\frac{u}{v} \in (0,\varepsilon]$，$A \in \mathscr{E}$，$A \subset B$，$x \in B - A$，均有

$$(1 - 4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u} \leqslant \frac{P(v,x,A)}{v}. \tag{1.15}$$

证　令

$$F_1(y,D) = P(u,y,D) \quad (y \in E,\ D \in \mathscr{E}),$$

$$F_{m+1}(y,D) = \int_{E-A} F_m(y,\mathrm{d}z) P(u,z,D)$$

$$(m \geqslant 1,\ y \in E,\ D \in \mathscr{E}),$$

则对任何固定的 $y \in E$, $F_m(y,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度,对任何固定的 $D \in \mathscr{E}$, $F_m(\cdot,D) \in \mathscr{E}\ (m \geqslant 1)$. 此外,对 m 作归纳法可证

$$P(t,x,D) = \sum_{j=1}^{m}\int_A F_j(x,\mathrm{d}y)P(t-ju,y,D) + \int_{E-A} F_m(x,\mathrm{d}y)P(t-mu,y,D)$$
$$(t \geqslant mu,\ m \geqslant 1,\ D \in \mathscr{E}). \tag{1.16}$$

记 $n = \left[\frac{v}{u}\right]$为不大于$\frac{v}{u}$ 的最大整数.

取 $D = A$, $m = n$, $t = v$,则由(1.14)式和(1.16)式得

$$\begin{aligned} P(v,x,A) &\geqslant \sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,\mathrm{d}y)P(v-ju,y,A) \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,\mathrm{d}y)P(v-ju,y,\{y\}) \\ &\geqslant (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} F_j(x,A). \end{aligned} \tag{1.17}$$

所以,由 $x \overline{\in} A$,及(1.14)、(1.17)式得

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(x,A) \leqslant \frac{P(v,x,A)}{1-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{1.18}$$

取 $D = \{x\}$, $t = mu\ (1 \leqslant m \leqslant n)$,则由(1.16)式得

$$P(mu,x,\{x\}) \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} F_j(x,A) + F_m(x,\{x\}),$$

所以,由上式和(1.18)式及 $P(mu,x,\{x\}) > 1-\varepsilon$ 得

$$\begin{aligned} F_m(x,\{x\}) &\geqslant P(mu,x,\{x\}) - \sum_{j=1}^{m-1} F_j(x,A) \\ &> (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ &> \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (n \geqslant m \geqslant 1). \end{aligned} \tag{1.19}$$

取 $D = A$, $m = n$, $t = v$,则由(1.14),(1.16),(1.19)式及 $x \overline{\in} A$ 与

$$F_{m+1}(x,M) = \int_{E-A} F_m(x,\mathrm{d}y)P(u,y,M)$$
$$\geqslant F_m(x,\{x\})P(u,x,M)$$

可得

$$P(v,x,A) \geqslant \sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,\mathrm{d}y)P(v-ju,y,A)$$
$$\geqslant \int P(u,x,\mathrm{d}y)P(v-u,y,A)$$
$$+\sum_{j=2}^{n} F_j(x,\mathrm{d}y)P(v-ju,y,A)$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)P(u,x,A)$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\int_A\left(\int_{E-A}F_{j-1}(x,\mathrm{d}y)P(u,y,\mathrm{d}z)\right)P(v-ju,z,A)$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)P(u,x,A)$$
$$+\sum_{j=2}^{n}\int_A P(u,x,\mathrm{d}y)P(v-ju,y,A)F_{j-1}(x,\{x\})$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)P(u,x,A)\sum_{j=2}^{n}P(u,x,A)\frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon)$$
$$=((1-\varepsilon)+(n-1)(1-3\varepsilon))P(u,x,A),$$

所以

$$\frac{P(v,x,A)}{v} \geqslant (1-3\varepsilon)\frac{nu}{v}\frac{P(u,x,A)}{u}.$$

但是

$$\frac{nu}{v} = \left[\frac{v}{u}\right]\frac{u}{v} \geqslant 1-\frac{u}{v} \geqslant 1-\varepsilon,$$

所以

$$(1-4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u} \leqslant \frac{P(v,x,A)}{v}.$$

下面我们应用引理 1.2 来证明定理 1.6. 令 $B = A\cup\{x\}$,则有

$$(1-4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u}\geqslant\frac{P(v,x,A)}{v}$$

$$\left(0<\varepsilon<\frac{1}{4},\ 0<\frac{u}{v}\leqslant\varepsilon\right). \tag{1.20}$$

在(1.20)式中先令 $u\to0+$,取上极限,再令 $v\to0+$ 取下极限,并注意 $\varepsilon>0$ 可以任意小及 $P(t,x,A)\geqslant0$ 可得定理1.6.

定理1.6所确定的 $q(x,A)$,只对 $x\in E,\ x\overline{\in}A,\ A\in\mathscr{E}(u)$ 才有定义,为方便起见,可依下面方法把 $q(\cdot,\cdot)$ 的定义域扩大到 $x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u)$ 上去:

$$q(x,A)=q(x,A-\{x\}),\quad x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u).$$

定理1.7 $q(x,A)$ $(x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u)$ 具有下列性质:

(1) $q(x,\{x\})=0,\ q(x,A)\leqslant q(x)\ (x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u))$;

(2) 任意固定 $x\in E$, $q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}(u)$ 上的有限测度;

(3) 任意固定 $A\in\mathscr{E}(u)$, $q(\cdot,A)\in\mathscr{E}$.

证 (1)、(3)显然成立.只证(2).由于 $q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}(u)$ 上的满足有限可加性的集合函数,又 $q(x,\varnothing)=0,\ 0\leqslant q(x,A)<\infty$,所以为证(2),只需证明:

$$\text{“}A_n\in\mathscr{E}(u),\ A_{n+1}\subset A_n,\ \bigcap_n A_n=\varnothing\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}q(x,A_n)=0\text{”}.$$

事实上,在引理1.2中取 $B=A_n\cup\{x\},\ v=\tau,\ \varepsilon=\dfrac{1}{8}$,有

$$\frac{1}{u}P(u,x,A_n-\{x\})\leqslant\frac{2}{\tau}P(\tau,x,A_n-\{x\})\ \left(0\leqslant\frac{u}{\tau}\leqslant\varepsilon\right),$$

在上式中令 $u\to0+$ 得

$$q(x,A_n)\leqslant\frac{2}{\tau}P(\tau,x,A_n-\{x\}).$$

而 $P(\tau,x,\cdot)$ 是有限测度,所以在上式中令 $n\to\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}q(x,A_n)=0\quad(A_n\in\mathscr{E}(u),\ A_n\downarrow\varnothing).$$

定理1.8 若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\ E_n\in\mathscr{E}(u)$,则 $\mathscr{E}$ 是由 $\mathscr{E}(u)$ 所产生

的 σ 代数(注意 $\mathscr{E}(u)$ 是环),从而 $q(x,\cdot)$ 可由 $\mathscr{E}(u)$ 唯一地扩张到 $\mathscr{E}$ 上去,扩张后所得之测度,仍用 $q(x,\cdot)$ 记之.这时仍有

(1)　$q(x,A)\leqslant q(x)\ (x\in E,\ A\in\mathscr{E})$;

(2)　任意固定 $x\in E$, $q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的 σ 有限测度;

(3)　任意固定 $A\in\mathscr{E}$, $q(\cdot,A)\in\mathscr{E}$.

证　由于在定理 1.8 条件下,对任何 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$,有

$$A=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=1}^{n}(E_k\cap A),\quad E_k\cap A\in\mathscr{E}(u),$$

所以,$\mathscr{E}$ 是由 $\mathscr{E}(u)$ 所产生的 σ 代数.而 $q(x,\cdot)$ 在 $\mathscr{E}(u)$ 是有限测度,所以 $q(x,\cdot)$ 可唯一地扩张到 $\mathscr{E}$ 上去而得一 σ 有限的测度,仍用 $q(x,\cdot)$ 记之,由于有

$$q(x,A)=\lim_{n\to\infty}q(x,\bigcup_{k=1}^{n}E_k\cap A)\leqslant q(x)\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$

所以由定理 1.7 立得定理 1.8 的 3 个结论.

定理1.9　若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, $E_n\subset E_{n-1}$, $E_n\in\mathscr{E}(u)$, $q(x_0)=q(x_0,E)<\infty$,则

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x_0,A)\right)_{t=0}=q(x_0,A)-q(x_0)\mathbf{1}_A(x_0)\ (A\in\mathscr{E}).\tag{1.21}$$

证　由 $q(x_0)=q(x_0,E)<\infty$ 及定理1.8知:$q(x_0,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度.

若 $x_0\in A\in\mathscr{E}$,则

$$\begin{aligned}&\left|\frac{P(t,x_0,A)}{t}-q(x_0,A)\right|\\&\quad\leqslant\left|\frac{P(t,x_0,E_n\cap A)}{t}-q(x_0,E_n\cap A)\right|\\&\qquad+\frac{P(t,x_0,A-E_n)}{t}+q(x_0,A-E_n).\end{aligned}\tag{1.22}$$

但是,由 $E_n\cap A\in\mathscr{E}(u)$,用定理 1.6 有

$$\lim_{t\to 0+}\left|\frac{P(t,x_0,E_n\cap A)}{t}-q(x_0,E_n\cap A)\right|=0. \quad (1.23)$$

又由定理1.5,1.6还有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0+}\frac{P(t,x_0,A-E_n)}{t}\\
&\quad\leqslant\limsup_{t\to 0+}\left(\frac{1-P(t,x_0,\{x_0\})}{t}-\frac{P(t,x_0,E_n-\{x_0\})}{t}\right)\\
&\quad=q(x_0)-q(x_0,E_n),
\end{aligned}\quad (1.24)$$

所以,若注意 $E_n\uparrow E$, $q(x_0,E)=q(x_0)<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}q(x_0,A-E_n)=0, \quad (1.25)$$

则在(1.22)式中先令 $t\to 0+$,再令 $n\to\infty$,由(1.23)、(1.24)和(1.25)即得(1.21)式.

若 $x_0\in A\in\mathscr{E}$,则

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{P(t,x_0,A)}{t}-q(x_0,A)+q(x_0)\right|\\
&\quad\leqslant\left|\frac{P(t,x_0,A-\{x_0\})}{t}-q(x_0,A-\{x_0\})\right|\\
&\quad\quad+\left|\frac{P(t,x_0,\{x_0\})-1}{t}+q(x_0)\right|,
\end{aligned}$$

由以上证明及定理1.5,在上式中令 $t\to 0+$ 即得(1.21)式.定理证毕.

定理1.10 若 $q(x)<\infty$ (对一切 $x\in E$),则必有 $E_n\in\mathscr{E}(u)$, $E_n\uparrow E$,从而由定理1.8得知 $\mathscr{E}$ 是由 $\mathscr{E}(u)$ 所产生的 σ 代数,且 $q(x,\cdot)$ 可唯一地由 $\mathscr{E}(u)$ 扩张到 $\mathscr{E}$ 上去,且扩张后之测度仍为有限测度.若再设 $q(x)\equiv q(x,E)$ $(x\in E)$,则

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x,A)\right)_{t=0}=q(x,A)-q(x)\mathbf{1}_A(x)$$
$$(x\in E,\ A\in\mathscr{E}). \quad (1.26)$$

证 令 $E_n=\{x:x\in E,\ q(x)<n\}$,则 $E_n\uparrow E$.又因为由定理1.5有

$$1-P(t,x,\{x\})\leqslant 1-\mathrm{e}^{-q(x)t}\leqslant 1-\mathrm{e}^{-nt}\quad (x\in E_n),$$

所以

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{x\in E_n}(1-P(t,x,\{x\}))=0\quad (n\geqslant 1),$$

即 $E_n\in\mathscr{E}(u)$. 因此由定理 1.8、1.9 即得定理 1.10.

引理 1.3 设 $\{\mu_n\}$ 是可测空间 $(E_1,\mathscr{E}_1)$ 上一串有限测度, μ 是 $(E_1,\mathscr{E}_1)$ 上一个有限测度, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)\ (A\in\mathscr{E}_1)$, 则

(1) $f\in \mathrm{b}\mathscr{E}_1\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_1}f\mathrm{d}\mu_n=\int_{E_1}f\mathrm{d}\mu$;

(2) $f,f_n\in \mathrm{b}\mathscr{E}_1,\ |f_n|\leqslant M\ (n\geqslant 1),\ f_n\to f$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{E_1}f_n\mathrm{d}\mu_n=\int_{E_1}f\mathrm{d}\mu.$$

证明甚易, 留给读者作为习题.

定理 1.11 在定理 1.10 的条件下, 总有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x,A)=-q(x)P(t,x,A)+\int_E q(x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$
$$(t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).\tag{1.27}$$

证 先取 $t>0,\ \Delta t>0,\ t-\Delta t>0$, 由 K-C 方程式有

$$\frac{P(t,x,A)-P(t-\Delta t,x,A)}{\Delta t}$$
$$=\frac{1}{\Delta t}(P(\Delta t,x,\{x\})-1)P(t-\Delta t,x,A)$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}P(\Delta t,x,\mathrm{d}y)P(t-\Delta t,y,A).\tag{1.28}$$

而由定理 1.5 和定理 1.2 得知 (1.28) 式右端第一项当 $\Delta t\to 0+$ 时, 它趋于 $-q(x)P(t,x,A)$. 而由引理 1.3 及定理 1.10 和定理 1.2 有 (注意 $q(x,\{x\})=0$)

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}P(\Delta t,x,\mathrm{d}y)P(t-\Delta t,y,A)$$
$$=\int_{E-\{x\}}q(x,\mathrm{d}y)P(t,y,A).\tag{1.29}$$

总之,

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}(P(t,x,A)-P(t-\Delta t,x,A))$$
$$=-q(x)P(t,x,A)+\int_E q(x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)\ (t>0).\tag{1.30}$$

再取 $t\geqslant 0$, $\Delta t>0$. 由 K-C 方程式有

$$\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t,x,A)-P(t,x,A))$$
$$=\frac{1}{\Delta t}P(\Delta t,x,\{x\}-1)P(t,x,A)$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}P(\Delta t,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A),$$

且有

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t,x,A)-P(t,x,A))$$
$$=-q(x)P(t,x,A)+\int_E q(x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)\ (t\geqslant 0).\tag{1.31}$$

由(1.30)、(1.31) 即得定理 1.11.

一般称(1.27) 式为 **Колмогоров 倒退方程式**.

定理 1.12 若$\sup\limits_{x\in E}q(x)=Q<\infty$, $q(x,E)=q(x)$ $(x\in E)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x,A)=\int_E P(t,x,\mathrm{d}y)(-q(y)\mathbf{1}_A(y)+q(y,A))$$
$$(t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).\tag{1.32}$$

一般称(1.32) 式为 **Колмогоров 前进方程式**.

证 由定理 1.5 及$\sup\limits_{x\in E}q(x)=Q<\infty$,可得

$$\sup_{\Delta t>0}\sup_{y\in E}\left|\frac{P(\Delta t,y,A)-P(0,y,A)}{\Delta t}\right|\leqslant\sup_{\Delta t>0}\frac{1-\mathrm{e}^{-Q\Delta t}}{\Delta t}\leqslant Q,\tag{1.33}$$

$$\sup_{y\in E} |-q(y)\mathbf{1}_A(y)+q(y,A)| \leqslant Q, \tag{1.34}$$

而当 $t\geqslant 0$, $\Delta t>0$ 时,由 K-C 方程式有

$$\frac{P(t+\Delta t,x,A)-P(t,x,A)}{\Delta t} = \int_E P(t,x,\mathrm{d}y)\left(\frac{P(\Delta t,y,A)-P(0,y,A)}{\Delta t}\right), \tag{1.35}$$

用定理 1.10 并注意(1.33)、(1.34)式,在(1.35)式中令 $\Delta t\to 0+$ 并应用控制收敛定理可得

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t+\Delta t,x,A)-P(t,x,A)}{\Delta t} = \int_E P(t,x,\mathrm{d}y)(-q(y)\mathbf{1}_A(y)+q(y,A))\ (t\geqslant 0). \tag{1.36}$$

若 $t>0$,取 $\Delta t>0$, $t-\Delta t>0$,则有

$$\frac{P(t,x,A)-P(t-\Delta t,x,A)}{\Delta t} = \int_E P(t-\Delta t,x,\mathrm{d}y)\left(\frac{P(\Delta t,y,A)-P(0,y,A)}{\Delta t}\right). \tag{1.37}$$

仍用定理 1.10 并注意(1.33)、(1.34)式及引理 1.3,在(1.37)式中令 $\Delta t\to 0+$ 即得

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t,x,A)-P(t-\Delta t,x,A)}{\Delta t} = \int_E P(t,x,\mathrm{d}y)(-q(y)\mathbf{1}_A(y)+q(y,A))\ (t>0). \tag{1.38}$$

由(1.36)、(1.38)式得(1.32)式.

定理 1.13 若 $\sup_{x\in E} q(x)=Q<\infty$, $q(x)=q(x,E)$ $(x\in E)$,令 $\tilde{q}(x,A)=-q(x)\mathbf{1}_A(x)+q(x,A)$,则 $P(t,x,A)$ 对 t 而言任意次可微,且

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(P(t,x,A)) = \int_E \tilde{q}(n,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$

$$(n \geqslant 1,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E},\ t \in \mathbf{T}), \tag{1.39}$$

其中 $\tilde{q}(1,x,A) = \tilde{q}(x,A)$,

$$\tilde{q}(n+1,x,A) = \int_E \tilde{q}(n,x,\mathrm{d}y)\tilde{q}(1,y,A)$$

$$= \int_E \tilde{q}(1,x,\mathrm{d}y)\tilde{q}(n,y,A)$$

$$(n \geqslant 1,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}). \tag{1.40}$$

证 对 n 作归纳法来证明(1.39)式. 当 $n = 1$ 时,由定理 1.11 得知(1.39)式成立. 设 $n = k$ 时,(1.39)式成立. 由于 $|\tilde{q}(k,x,A)| \leqslant (2Q)^k$,且由定理 1.5 还有

$$\left|\frac{P(t+\Delta t,y,A) - P(t,y,A)}{\Delta t}\right|$$

$$\leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-q(y)|\Delta t|}}{|\Delta t|} \leqslant q(y) \leqslant Q,$$

所以,由控制收敛定理和 Fubini 定理及定理 1.11 得

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}(P(t,x,A))$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\int_E \tilde{q}(k,x,\mathrm{d}y)\cdot\frac{P(t+\Delta t,y,A) - P(t,y,A)}{\Delta t}$$

$$= \int_E \tilde{q}(k,x,\mathrm{d}z)\int_E \tilde{q}(1,y,\mathrm{d}z)P(t,y,A)$$

$$= \int_E \tilde{q}(k+1,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$

$$(t \in \mathbf{T},\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}).$$

定理得证.

下面我们研究标准的准转移函数 $P(t,x,A)$ 所产生的半群 $\{P_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的可微性. 沿袭本节前部的符号.

设 **B** 是任意一个 Banach 空间,记 $L^*(\mathbf{B})$ 为由 **B** 到 **B** 的全体有界线性算子构成的 Banach 空间(其中线性运算按通常的算子的线

性运算,范数就取成通常的算子范数).若 $\Psi \in L^*(\mathbf{B})$,定义

$$e^{\Psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi^m}{m!} = (s)\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{\Psi^m}{m!}, \tag{1.41}$$

(1.41) 式右方的极限是按 $L^*(\mathbf{B})$ 中的范数强收敛,而 $\Psi^m = \underbrace{\Psi \circ \Psi \circ \cdots \circ \Psi}_{m\text{个}}$ 是 Ψ 的 m 重复合算子.

注意:(1.41) 式右方的极限是存在的,因为

$$\left\| \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\Psi^m}{m!} \right\| \leqslant \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\|\Psi^m\|}{m!} \leqslant \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{(\|\Psi\|)^m}{m!},$$

所以

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}} \left\| \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\Psi^m}{m!} \right\| = 0.$$

由 $L^*(\mathbf{B})$ 的完备性得知存在 $\Psi_0 \in L^*(\mathbf{B})$,使

$$(s)\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{\Psi^m}{m!} = \Psi_0,$$

记此极限 Ψ_0 为 e^{Ψ}.

命题 1.3　(1)　$\Psi \in L^*(\mathbf{B}) \Longrightarrow \|e^{\Psi}\| \leqslant e^{\|\Psi\|}$;

(2)　$\Psi_{m,n} \in L^*(\mathbf{B}),\ \sum_m \sum_n \|\Psi_{m,n}\| < \infty,$

$$\sum_m \sum_n \Psi_{m,n} = \Psi \in L^*(\mathbf{B}),$$

$$\sum_m \sum_n \Psi_{m,n} = \Phi \in L^*(\mathbf{B}) \Longrightarrow \Psi = \Phi;$$

(3)　$\Psi, \Phi \in L^*(\mathbf{B}),\ \Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi \Longrightarrow e^{\Psi+\Phi} = e^{\Psi} \circ e^{\Phi} = e^{\Phi} \circ e^{\Psi}$;

(4)　$\Psi \in L^*(\mathbf{B}) \Longrightarrow (s)\dfrac{d}{dt}e^{t\Psi} = \Psi \circ e^{t\Psi} = e^{t\Psi} \circ \Psi.$

此命题证明不难,且纯属泛函分析理论,留给读者作为习题.

命题 1.4　设 $\Psi \in L^*(\mathbf{B})$,令

$$F_t = e^{t\Psi}, \quad t \in \mathbf{T},$$

则$\{F_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathbf{B}$上的强连续的半群,其强无穷小算子$\mathbf{A}$就等于Ψ, $\mathbf{A}$的定义域$\mathscr{D}_A=\mathbf{B}$,且F_t对t任意次可微,还有

$$(\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}F_t=\Psi^n\circ F_t=F_t\circ\Psi^n\quad(t\in\mathbf{T},\ n\geqslant 1).\tag{1.42}$$

证 由命题1.3即得命题1.4.

定理1.14 设$P(t,x,A)$是标准的准转移函数,$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$是由$P(t,x,A)$所确定的$b\mathscr{E}$上的半群,若$q(x),q(x,A)$满足定理1.13中的条件,$\tilde{q}(x,A)=-q(x)\mathbf{1}_A(x)+q(x,A)$,定义由Banach空间$\mathrm{b}\mathscr{E}$到$\mathrm{b}\mathscr{E}$的有界线性算子$\tilde{q}$如下:

$$(\tilde{q}f)(x)=\int_E\tilde{q}(x,\mathrm{d}y)f(y)\ (f\in\mathrm{b}\mathscr{E},\ x\in E),\tag{1.43}$$

则

$$P_t=\mathrm{e}^{t\tilde{q}}\quad(t\in\mathbf{T}),\tag{1.44}$$

从而由命题1.4得知$\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$的强无穷小算子$\mathbf{A}=\tilde{q}$, P_t对t任意次可微,还有

$$(\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}P_t=\tilde{q}^n\circ P_t=P_t\circ\tilde{q}^n.\tag{1.45}$$

证 由于$\tilde{q}$是由$b\mathscr{E}$到$b\mathscr{E}$的有界线性算子,所以由命题1.3得知$\mathrm{e}^{t\tilde{q}}$是$b\mathscr{E}$到$b\mathscr{E}$的有界线性算子(对每个$t\in\mathbf{T}$),任取$A\in\mathscr{E}$,由定理1.13有

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{t\tilde{q}}\mathbf{1}_A)(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{q}^n\mathbf{1}_A)(x)\cdot\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_E\tilde{q}(n,x,\mathrm{d}y)\mathbf{1}_A(y)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}P(u,x,A)\right)_{u=0}\\&=P(t,x,A)=(P_t\mathbf{1}_A)(x)\ (x\in E).\end{aligned}\tag{1.46}$$

由$\mathrm{e}^{t\tilde{q}}$, P_t皆为线性算子及(1.46)式得知对任意简单函数$f=\sum_{i=1}^{k_n}c_i^{(n)}\mathbf{1}_A(u)$,有

$$e^{t\tilde{q}}f_n = P_t f_n. \tag{1.47}$$

而对 b$\mathscr{E}$ 中任一函数 f,必有简单函数列 $\{f_n\}$,使 $\|f_n - f\| \to 0$. 再用(1.47) 式及 $e^{t\tilde{q}}, P_t$ 皆为有界线性算子得知

$$e^{t\tilde{q}} = P_t f.$$

定理证毕.

定理1.15 设 $P(t,x,A)$ 是标准的转移函数,则下列两条件等价:

(i) $\sup_{x\in E} q(x) = Q < \infty$;

(ii) $\lim_{t\to 0+} P(t,x,\{x\}) = 1$ (对 $x \in E$ 一致成立).

若(i)、(ii) 中有一个成立,则还有

(iii) $q(x) \equiv q(x,E)$ $(x \in E)$;

(iv) $\lim_{t\to 0+} \dfrac{1 - P(t,x,\{x\})}{t} = q(x)$

(对 $x \in E$ 一致成立).

证 用定理1.5可证(i)$\Longrightarrow$(ii). 若(ii) 成立,用定理1.5及定理 1.6 和 $P(t,x,A)$ 是标准的转移函数可得

$$\begin{aligned} q(x) &= \lim_{t\to 0+} \frac{1 - P(t,x,\{x\})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{P(t,x,E - \{x\})}{t} = q(x,E). \end{aligned}$$

再用引理1.2和定理1.6还有

$$(1 - 4\varepsilon) q(x,A) \leqslant \frac{P(v,x,A)}{v}$$

$$\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{4},\ 0 < v \leqslant \tau = \tau(\varepsilon),\ x \overline{\in} A \in \mathscr{E}\right),$$

在上式中取 $A = E - \{x\}$,并注意 $q(x) = q(x, E - \{x\})$ 得

$$q(x) \leqslant \frac{1}{1 - 4\varepsilon} \cdot \frac{1 - P(u,x,\{x\})}{v}$$

$$\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{4},\ x \in E,\ v \in (0,\tau]\right).$$

所以$\sup_{x\in E} q(x) = Q < \infty$.再用定理 1.5 有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant q(x) - \frac{1 - P(v,x,\{x\})}{v}\\ &\leqslant q(x) - (1-4\varepsilon)q(x)\\ &\leqslant 4\varepsilon Q \quad \left(0<\varepsilon<\frac{1}{4},\ x\in E,\ v\in(0,\tau]\right).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{v\to 0+}\frac{1-P(v,x,\{x\})}{v} = q(x) \quad (\text{对 } x\in E \text{ 一致成立}).$$

§2 q 过程的存在性及唯一性定理

在这一节中，恒设$(E,\mathscr{E})$为任一可测空间，对角线集合$\{(x,x):x\in E\}\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$,从而$E$的任何单点集合$\{x\}\in\mathscr{E}$ $(x\in E)$.再设$\mathrm{T}=[0,\infty)$.在本节中,我们将要研究 §1 中的逆问题,即所谓q过程问题.

定义 2.1 称$q(x)-q(x,A)$ $(x\in E,\ A\in\mathscr{E})$是一对 **$q$ 函数**,如果

(i) $0\leqslant q(x)<\infty,\ 0\leqslant q(x,A)<\infty$ $(x\in E,\ A\in\mathscr{E})$;

(ii) $q(\cdot)\in\mathscr{E},\ q(\cdot,A)\in\mathscr{E}$ $(A\in\mathscr{E})$;

(iii) $q(x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度且$q(x,\{x\})=0$ $(x\in E)$;

(iv) $q(x,E)\leqslant q(x)$ $(x\in E)$.

特别地,满足$q(x,E)\equiv q(x)$ $(x\in E)$的q函数称为**保守的**.

定义 2.2 设$q(x)-q(x,A)$是一对q函数.若标准的准转移函数$P(t,x,A)$满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x,A)\right)_{t=0} = -q(x)\mathbf{1}_A(x)+q(x,A) \qquad (x\in E,\ A\in\mathscr{E}), \tag{2.1}$$

则称$P(t,x,A)$是一个 **q 过程**,若$P(t,x,E)\equiv 1$,则称之为**不断的**.

为简单起见，有时记$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t,x,A)$为$P'(t,x,A)$如同§1一样，记$\tilde{q}(x,A)=-q(x)\mathbf{1}_A(x)+q(x)$.

命题 2.1 设$P(t,x,A)$是标准的准转移函数，$q(x)-q(x,A)$是q函数对，则下列陈述等价：

(i) $P(t,x,A)$是q过程；

(ii) $P'(t,x,A)=-q(x)P(t,x,A)+\int_E q(x,\mathrm{d}y)\,P(t,y,A)$ $(t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(iii) $P(t,x,A)=\mathrm{e}^{-q(x)t}\mathbf{1}_A(x)+\int_0^t \mathrm{e}^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x,\mathrm{d}y)P(s,y,A)\right)\mathrm{d}s\ (t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$ $\qquad(B)'$

证明甚易，留给读者作为习题.

定理 2.1 任给一对q函数$q(x)-q(x,A)$，恒存在一个最小的q过程$\overline{P}(t,x,A)$（所谓$\overline{P}(t,x,A)$是最小的q过程，意即它是q过程且对任何q过程$P(t,x,A)$，有

$$P(t,x,A)\geqslant\overline{P}(t,x,A)).$$

证 令$P^{(0)}(t,x,A)=\mathrm{e}^{-q(x)t}\mathbf{1}_A(x)$,

$$P^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t \mathrm{e}^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x,\mathrm{d}y)P^{(n)}(s,y,A)\right)\mathrm{d}s\ (n\geqslant 0),$$

$$\overline{P}(t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,A),$$

推证$\overline{P}(t,x,A)$即为所求.

显然，$P^{(0)}(t,x,A)$是t的连续函数（固定x和A），是x的$\mathscr{E}$可测函数（固定t和A），是$\mathscr{E}$上的有限测度（固定t和x）. 对n作归纳法可以证明对任何$n\geqslant 0$，$P^{(n)}(t,x,A)$均具有上述性质.

对一切$t\in\mathbf{T}$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，有$0\leqslant P^{(0)}(t,x,A)\leqslant 1$，对$n$作归纳法可以证明对一切$n\geqslant 0$，恒有$\leqslant\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(t,x,E)\leqslant 1$,

从而$0\leqslant\overline{P}(t,x,E)\leqslant 1$,且$\overline{P}(t,x,A)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数.又因为$P^{(n)}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度,所以$\overline{P}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的具有有限可加性的集合函数.今任取$A_k\supset A_{k+1}$, $A_k\in\mathscr{E}\,(k\geqslant 1)$, $\bigcap\limits_k A_k=\varnothing$,若能证$\lim\limits_{k\to\infty}\overline{P}(t,x,A_k)=0\ (t\in\mathbf{T},\ x\in E)$,则$\overline{P}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度.事实上,

$$P^{(n)}(t,x,A_k)\leqslant P^{(n)}(t,x,E),$$

$$0\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,E)\leqslant\overline{P}(t,x,E)\leqslant 1,$$

由$P^{(n)}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度并应用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\overline{P}(t,x,A_k)&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,A_k)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{k\to\infty}P^{(n)}(t,x,A_k)=0.\end{aligned}$$

所以$\overline{P}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度$(t\in\mathbf{T},\ x\in E)$.

$\overline{P}(t,x,A)$满足K-C方程式.事实上

$$\begin{aligned}&\overline{P}(s+t,x,A)\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\int_B P^{(\nu)}(s,x,\mathrm{d}y)P^{(n-\nu)}(t,y,A)\\&\quad=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_E P^{(\nu)}(s,x,\mathrm{d}y)\overline{P}(t,y,A)\\&\quad=\int_E\overline{P}(s,x,\mathrm{d}y)\overline{P}(t,y,A).\end{aligned}\tag{2.2}$$

显然

$$\begin{aligned}\overline{P}(t,x,A)&=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,A)=P^{(0)}(t,x,A)\\&\quad+\int_0^t\mathrm{e}^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x,\mathrm{d}y)\overline{P}(s,y,A)\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{2.3}$$

所以

$$\lim_{t\to 0+}\overline{P}(t,x,A)=\lim_{t\to 0+}P^0(t,x,A)=\mathbf{1}_A(x).$$

由以上证明,可知 $\overline{P}(t,x,A)$ 是标准的准转移函数. 所以由定理1.2得知 $\overline{P}(\cdot,x,A)$ 是连续函数. 用(2.3)式并使用中值公式与控制收敛定理可以证明 $\overline{P}(t,x,A)$ 是 q 过程.

设 $P(t,x,A)$ 是任一 q 过程,由命题2.1有

$$P(t,x,A)=P^{(0)}(t,x,A)+\int_0^t \mathrm{e}^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x,\mathrm{d}y)P(s,y,A)\right)\mathrm{d}s,$$

若注意 $P^{(n+1)}(t,x,A)$ 的定义,用上式,并对 n 用归纳法可证

$$P(t,x,A)\geqslant\sum_{\nu=0}^{n}P^{(\nu)}(t,x,A)\quad(n\geqslant 0),$$

从而 $P(t,x,A)\geqslant\overline{P}(t,x,A)$. 定理证毕.

下面我们研究 q 过程的唯一性.

首先我们引进标准的准转移函数 $P(t,x,A)$ 的Laplace变换,设 $\{U^{\alpha}:\alpha>0\}$ 为 $\{P_t:t\in\mathbf{T}\}$ 所确定的预解式,记

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda,x,A)&=(U^{\lambda}\mathbf{1}_A)(x)\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}(P_t\mathbf{1}_A)(x)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}P(t,x,A)\mathrm{d}t\\&\qquad(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})\end{aligned}\tag{2.4}$$

为 $P(t,x,A)$ 的 Laplace 变换.

定理 2.2　任意给定 $\Psi(\lambda,x,A)$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$,它是某一个标准的准转移函数 $P(t,x,A)$ 的 Laplace 变换的充要条件是:

(i)　固定 $\lambda>0,\ x\in E$, $\Psi(\lambda,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度,固定 $\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}$, $\Psi(\lambda,\cdot,A)\in b\mathscr{E}$;

(ii)　$0\leqslant\lambda\Psi(\lambda,x,A)\leqslant 1$ $(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$;

(iii)　满足预解方程式:

$$\Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\int_E\Psi(\lambda,x,\mathrm{d}y)\Psi(\mu,y,A)$$

$= 0 \quad (\lambda > 0,\ \mu > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$;

(iv) **连续性条件**:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(\lambda, x, A) = \mathbf{1}_A(x)\ (x \in E, A \in \mathscr{E}).$$

证 必要性. 若 $\Psi(\lambda, x, A)$ 是标准的准转移函数 $P(t, x, A)$ 的 Laplace 变换, 则由 $P(t, x, A)$ 是 t 的连续函数得知它是 (t, x) 的关于 $\mathscr{B}_\infty \times \mathscr{E}$ 的二元可测函数, 再利用 $P(t, x, \cdot)$ 是测度, $0 \leqslant P(t, x, A) \leqslant 1$ 得知(i) 和(ii) 成立. 再用 $P(t, x, A)$ 满足 K-C 方程式得知 $\Psi(\lambda, x, A)$ 满足预解方程式. 由 $\lim\limits_{t \to 0+} P(t, x, A) = \mathbf{1}_A(x)$ 得知(iv) 成立.

充分性. 设 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 是命题 1.2 前面定义的 Banach 空间. 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 上定义一族算子如下:

$$(\Psi_\lambda^* \mu)(B) = \int_E \mu(\mathrm{d}x) \Psi(\lambda, x, B)$$

$$(\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E}),\ \lambda > 0,\ B \in \mathscr{E}),$$

显然 $\Psi_\lambda^* : \mathscr{L}(\mathscr{E}) \mapsto \mathscr{L}(\mathscr{E})$, 且 Ψ_λ^* 是有界线性算子, $\| \Psi_\lambda^* \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$. 如果还能证

(a) Ψ_λ^* 是一对一的, 则可以定义算子 $\mathbf{A}_\lambda : (\lambda I - \mathbf{A}_\lambda) = (\Psi_\lambda^*)^{-1}$.

(b) $\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A}$ 与 $\lambda > 0$ 无关, 且其定义域 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中稠. 则由定理 1.1 得知存在唯一一个 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 上的强连续的压缩型的半群 $\{V_t : t \in \mathbf{T}\}$, 其强预解式为 $\{\Psi_\lambda^* : \lambda > 0\}$, 即

$$\Psi_\lambda^* \mu = (\mathrm{s}) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} V_t \mu \mathrm{d}t \quad (\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E})).$$

且有

$$(\Psi_\lambda^* \mu)(B) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} (V_t \mu)(B) \mathrm{d}t \quad (\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{E}),\ B \in \mathscr{E}),$$

取 $\mu_x(A) = \mathbf{1}_A(x)\ (A \in \mathscr{E},\ x \in E)$, 则 $\mu_x \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$, 且 $\mu_x(A)$ 是

x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数. 令 $P(t,x,A)=(V_t\mu_x)(A)$, 推证 $P(t,x,A)$ 即为所求. 事实上, 由半群的表示性定理(参见[28]第一编定理3.6)有

$$
\begin{aligned}
(V_t\mu_x)(A) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((n^2t\Psi_n^*-ntI)^m\mu_x)(A)\\
&= \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{(n^2t\Psi_n^*-ntI)}\mu_x(A)\quad (A\in\mathscr{E}).
\end{aligned}
$$

由 $\mu_x(A)$ 及 $(\Psi_\lambda^*\mu_x)(A)=\Psi(\lambda,x,A)$ 皆为 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数得知 $((n^2t\Psi_n^*-ntI)\mu_x)(A)$ 亦然, 对 m 用归纳法可以证明对任何 $m\geqslant 0$, $((n^2t\Psi_n^*-ntI)^m\mu_x)(A)$ 亦为 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数, 所以 $P(t,x,A)=(V_t\mu_x)(A)$ 是 x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数. 又因为有界线性算子 e^{-ntI} 与 $\mathrm{e}^{n^2t\Psi_n^*}$ 都把 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中的测度映射成测度, 而 μ_x 是测度, 所以 $\mathrm{e}^{(n^2t\Psi_n^*-ntI)}\mu_x$ 是测度, $V_t\mu_x$ 也是测度, 亦即 $P(t,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度. 而 $\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是压缩型半群, 所以 $P(t,x,E)=V_t\mu_x(E)\leqslant 1$. 又因为 $\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是强连续的, 所以更有 $P(t,x,A)=(V_t\mu_x)(A)$ 是 $t\in\mathbf{T}$ 的连续函数, 而且

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}P(t,x,A)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(V_t\mu_x)(A)\mathrm{d}t\\
&= (\Psi_\lambda^*\mu_x)(A)\\
&= \Psi(\lambda,x,A)\\
&\qquad (\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).
\end{aligned}
$$

所以, 若能证 $P(t,x,A)$ 满足 K-C 方程式, 则 $P(t,x,A)$ 就是一个以 $\Psi(\lambda,x,A)$ 为 Laplace 变换的标准的准转移函数.

事实上, 由于 $P(t,x,A)$ 是 $t\in\mathbf{T}$ 的连续函数, 所以, 用引理1.3得知 $\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$ 既是 s 的连续函数(t 固定), 又是 t 的连续函数(s 固定), 当然 $P(s+t,x,A)$ 亦复如此. 因此

$$
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}\left(\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)\right)\mathrm{d}t,
$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}P(s+t,x,A)\mathrm{d}t$$

皆为 s 的连续函数,但是由 $\Psi(\lambda,x,A)$ 满足预解方程式可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \left(\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)e^{-\lambda s-\mu t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_E \Psi(\lambda,x,\mathrm{d}y)\Psi(\mu,y,A) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}(\Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A)) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t(P(s+t,x,A)e^{-\lambda s-\mu t}) \\
&\quad (\lambda>0,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ \lambda\neq\mu)
\end{aligned}$$

而当 $\lambda=\mu>0$ 时,用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)e^{-\lambda(s+t)}\right) \\
&= \lim_{\substack{\mu\to\lambda\\ \mu\neq\lambda}}\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)e^{-\lambda s-\mu t)}\right) \\
&= \lim_{\substack{\mu\to\lambda\\ \mu\neq\lambda}}\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t(P(s+t,x,A)e^{-\lambda s-\mu t}) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t(P(s+t,x,A)e^{-\lambda(s+t)})
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)e^{-\lambda s-\mu t)}\right) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}t(P(s+t,x,A)e^{-\lambda s-\mu t}) \\
&\quad (\lambda>0,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})
\end{aligned}$$

所以,两次利用 Laplace 变换的唯一性有

$$P(s+t,x,A)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$
$$(s,\ t\in\mathbf{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

因此,我们证明了 $P(t,x,A)$ 是以 $\Psi(\lambda,x,A)$ 为 Laplace 变换的标准的准转移函数.

最后补证(a) 和(b).

(a) Ψ_λ^* 是一对一的算子.

任意取定一 $\varphi\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$,令 $B_1=B_1(\lambda)$, $B_2=B_2(\lambda)$ 为 $\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi$ 的一组正、负集合,则

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi\|\\
&\quad=(\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)(B_1)-(\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)(B_2)\\
&\quad=\int_E\varphi(\mathrm{d}x)(\mathbf{1}_{B_1}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_1))\\
&\qquad-\int_E\varphi(\mathrm{d}x)(\mathbf{1}_{B_2}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_2))\\
&\quad\leqslant\int_E|\varphi|(\mathrm{d}x)|\mathbf{1}_{B_1}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_1)|\\
&\qquad+\int_E|\varphi|(\mathrm{d}x)|\mathbf{1}_{B_2}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_2)|.
\end{aligned}
$$

(如通常意义, $|\varphi|=\varphi^++\varphi^-$, $\varphi^+(A)=\varphi(A\cap A_1)$, $\varphi^-(A)=-\varphi(A\cap A_2)$, A_1,A_2 为 φ 的一组正负集合,以后 $|\varphi|$ 亦表示此意.)

在上式中令 $\lambda\to\infty$,并注意在条件(i) ~ (iv) 下,可推出: $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi(\lambda,x,A)=\mathbf{1}_A(x)$ 对 $A\in\mathscr{E}$ 等度成立.(此事实作为一个习题,留给读者证明.) 再利用控制收敛定理可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi\|=0.$$

但是,由(iii) 得知

$$\Psi_{\lambda_0}^*\varphi=0\Longrightarrow\Psi_\lambda^*\varphi=0\quad(\text{对一切 }\lambda>0).$$

所以

$$\Psi_{\lambda_0}^*\varphi=0\Longrightarrow\varphi=(\mathrm{s})\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi_\lambda^*\varphi=0.$$

即 $\Psi_{\lambda_0}^*$ 是一对一的. 而 $\lambda_0>0$ 可以任意,故(a) 得证.

(b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_\lambda$ 与 $\lambda > 0$ 无关，$\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中稠.

首先证明 $\boldsymbol{A}_\lambda$ 的定义域与 λ 无关. 任取 $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$，由(iii) 有

$$\Psi_\mu^* \varphi = \Psi_\lambda^* (\varphi + (\lambda - \mu) \Psi_\mu^* \varphi),$$
$$\Psi_\lambda^* \varphi = \Psi_\mu^* (\varphi + (\mu - \lambda) \Psi_\lambda^* \varphi),$$

即 Ψ_λ^* 与 Ψ_μ^* 的值域一样，从而 $\boldsymbol{A}_\lambda$ 与 $\boldsymbol{A}_\mu$ 的定义域一样.

其次证明：任取 $\varphi \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}_\lambda} = \mathscr{D}_{\boldsymbol{A}_\mu}$，有 $\boldsymbol{A}_\lambda \varphi = \boldsymbol{A}_\mu \varphi$. 事实上，这时 φ 必属于 Ψ_λ^* 与 Ψ_μ^* 的值域，所以必存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$，使 $\varphi = \Psi_\lambda^* \varphi_1 = \Psi_\mu^* \varphi_2$. 再用(iii) 得

$$\Psi_\lambda^* \varphi_1 - \Psi_\mu^* \varphi_1 + (\lambda - \mu) \Psi_\mu^* \circ \Psi_\lambda^* \varphi_1 = 0,$$

即

$$\Psi_\mu^* \varphi_2 - \Psi_\mu^* \varphi_1 + (\lambda - \mu) \Psi_\mu^* \circ \Psi_\lambda^* \varphi_1 = 0,$$

而 Ψ_μ^* 是一对一的线性算子，所以

$$\varphi_2 - \varphi_1 + (\lambda - \mu) \Psi_\lambda^* \varphi_1 = 0,$$

即

$$(\Psi_\mu^*)^{-1} \varphi - (\Psi_\lambda^*)^{-1} \varphi + (\lambda - \mu) \varphi = 0,$$

亦即 $\boldsymbol{A}_\lambda \varphi = \boldsymbol{A}_\mu \varphi$.

最后证明 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中稠. 事实上，在(a) 的证明中已证：任取 $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$，必有 $\varphi = (\mathrm{s}) \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi_\lambda^* \varphi$，而 $\lambda \Psi_\lambda^* \varphi \in \mathscr{D}_A$，即 $\mathscr{D}_A$ 在 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ 中稠. 定理证毕.

定理 2.3 设 $q(x) - q(x, A)$ 是任意一对 q 函数，则 $\Psi(\lambda, x, A)$ 是某个 q 过程的 Laplace 变换的充要条件是定理 2.2 中条件(i) ~ (iii) 成立及

$$(\lambda + q(x)) \Psi(\lambda, x, A) - \int_E q(x, \mathrm{d}y) \Psi(\lambda, y, A) = \mathbf{1}_A(x)$$
$$(\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}). \qquad (B_\lambda)$$

证 必要性. 若 $\Psi(\lambda, x, A)$ 是 q 过程 $P(t, x, A)$ 的 Laplace 变换，由定理 2.2，$\Psi(\lambda, x, A)$ 必满足定理 2.2 中的(i) ~ (iv). 再用命题 2.1，有

$$P(t,x,A)=e^{-q(x)t}\mathbf{1}_A(x)$$
$$+\int_0^t e^{-q(x)(t-8)}\left(\int_E q(x,dy)P(s,y,A)\right)ds,$$

把$(B)'$式两边取 Laplace 变换即可得(B_λ)式.

充分性.设定理 2.2 中的条件(i) ~ (iii) 成立,而且(B_λ)式亦成立.由 $0\leqslant\lambda\Psi(\lambda,x,A)\leqslant 1$ 对一切 $\lambda>0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$成立得知:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(\lambda,x,A)=0\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

所以在(B_λ)式中令 $\lambda\to\infty$ 并利用控制收敛定理得

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda\Psi(\lambda,x,A)=\mathbf{1}_A(x),$$

即定理 2.2 中的条件(iv) 成立.所以由定理 2.2 得知 $\Psi(\lambda,x,A)$ 是某个标准的准转移函数 $P(t,x,A)$ 的 Laplace 变换.

设$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$是由$P(t,x,A)$所产生的$\mathscr{L}(\mathscr{E})$上的连续的半群(定义见定理 1.3),$\mathbf{A}$ 是其强无穷小算子,$\mathscr{D}_A$ 是$\mathbf{A}$ 的定义域,推证对任何 $x\in E$,有 $\varepsilon_x\in\mathscr{D}_A$,其中 $\varepsilon_x(B)=\mathbf{1}_B(x)$ $(x\in E,$ $B\in\mathscr{E})$, 且

$$(A\varepsilon_x)(B)=-q(x)\mathbf{1}_B(x)+q(x,B)\quad(x\in E,\ B\in\mathscr{E}).$$

事实上,如前,令 $\tilde{q}(x,B)=-q(x)\mathbf{1}_B(x)+q(x,B)$.再令$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$为$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的强预解式.由于$\{V_t:t\in\mathbf{T}\}$ 在$\mathscr{L}(\mathscr{E})$强连续,所以 Ψ_λ^* 的定义域为 $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ $(\lambda>0)$.因此由(B_λ)式有

$$\begin{aligned}&(\Psi_\lambda^*(\lambda\varepsilon_x-\tilde{q}(x,\cdot)))(A)\\&=\int_0^\infty dt\int_E(\lambda\varepsilon_x(dy)-\tilde{q}(x,dy))P(t,y,A)e^{-\lambda t}\\&=\int_0^\infty dt\left(e^{-\lambda t}\left[\lambda P(t,x,A)-\int_E\tilde{q}(x,dy)P(t,y,A)\right]\right)\\&=(\lambda+q(x))\Psi(\lambda,x,A)-\int_E q(x,dy)\Psi(\lambda,y,A)\\&=\varepsilon_x(A)\quad(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).\end{aligned}$$

而 Ψ_λ^* 是一对一的,且$(\Psi_\lambda^*)^{-1} = (\lambda I - \boldsymbol{A})$,所以 $\varepsilon_x \in \mathscr{D}_A$,且

$$\lambda\varepsilon_x - \tilde{q}(x,\cdot) = (\Psi_\lambda^*)^{-1}\varepsilon_x = (\lambda I - \boldsymbol{A})\varepsilon_x,$$

即 $\varepsilon_x \in \mathscr{D}_A$ 且 $\boldsymbol{A}\varepsilon_x = \tilde{q}(x,\cdot)$.

最后证明 $P(t,x,A)$ 是 q 过程.事实上

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{t\to 0+}\sup\left|\frac{P(t,x,A)-\mathbf{1}_A(x)}{t} - \tilde{q}(x,A)\right| \\
&\quad = \varlimsup_{t\to 0+}\sup\left|\frac{P(t,x,A)-\mathbf{1}_A(x)}{t} - (\boldsymbol{A}\varepsilon_x)(A)\right| \\
&\quad \leqslant \varlimsup_{t\to 0+}\sup\left\|\frac{V_t\varepsilon_x - \varepsilon_x}{t} - \boldsymbol{A}\varepsilon_x\right\| \\
&\quad = 0 \quad (x\in E,\ A\in\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

定理证证毕.

设 $q(x)-q(x,A)$ 是给定的 q 函数对.对任何 $\lambda>0$,令

$$\begin{aligned}
\Xi_\lambda = \{&\xi(\lambda,\cdot):\ \xi(\lambda,\cdot):E\mapsto[0,\infty),\ \xi(\lambda,\cdot)\in b\mathscr{E}, \\
&\int_E q(x,\mathrm{d}y)\xi(\lambda,y) = (\lambda+q(x))\xi(\lambda,x),\ x\in E\}
\end{aligned}$$

称 Ξ_λ 中的极大线性无关函数的个数为Ξ_λ 的维数,记之为 $\dim\Xi$.

命题 2.2 $\dim\Xi_\lambda$ 不依赖于$\lambda>0$,故可简记 $\dim\Xi_\lambda$ 为 $\dim\Xi$.

证明留给读者作为习题.

命题 2.3 设 $q(x)-q(x,A)$ 是任意一对 q 函数,$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 是最小 q 过程的 Laplace 变换,任取 $y_1,y_2\in E$, $y_1\neq y_2$,则必存在 $\lambda_0>0$,使

$$\frac{\overline{\Psi}(\lambda_0,y_1,\{y_1\})}{\overline{\Psi}(\lambda_0,y_1,E)} \neq \frac{\overline{\Psi}(\lambda_0,y_2,\{y_1\})}{\overline{\Psi}(\lambda_0,y_2,E)}. \tag{2.5}$$

证 由定理 2.3 易证:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x,E) = 1 \quad (x\in E); \tag{2.6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,x,\{x\}) = \infty \quad (x\in E); \tag{2.7}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,x,\{y\}) = q(x,\{y\}) \quad (x,y\in E,\ x\neq y). \tag{2.8}$$

由(2.6) ~ (2.8) 式得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,y_1,\{y_1\})}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,y_1,E)}-\frac{\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,y_2,\{y_1\})}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,y_2,E)}\right]=\infty.$$

故(2.5) 式成立.

命题2.4　令 $\bar{\xi}(\lambda,x)=1-\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x,E)$,则对任何$\xi(\lambda,\cdot)\in\Xi_\lambda$, $0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1$,总有

$$\xi(\lambda,x)\leqslant\bar{\xi}(\lambda,x)\quad(x\in E).$$

证　令 $P^{(n)}(t,x,A),\overline{P}(t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,A)$ 如定理2.1所定义, $\Psi^{(n)}(\lambda,x,A),\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 分别为 $P^{(n)}(t,x,A)$, $\overline{P}(t,x,A)$ 的 Laplace 变换,再令

$$\pi^{(0)}(\lambda,x,A)=\mathbf{1}_A(x),$$

$$\pi(\lambda,x,A)=\pi^{(1)}(\lambda,x,A)=\frac{q(x,A)}{\lambda+q(x)},$$

$$\pi^{(n)}(\lambda,x,A)=\int_E\pi^{(n-1)}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\pi(\lambda,y,A)\quad(n\geqslant 1),$$

$$S^{(n)}(\lambda,x,A)=\sum_{k=0}^{n}\Psi^{(k)}(\lambda,x,A),$$

则有

$$\Psi^{(0)}(\lambda,x,A)=\mathbf{1}_A(x)/(\lambda+q(x)),\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&\Psi^{(n+1)}(\lambda,x,A)\\&=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_E q(x,\mathrm{d}y)\Psi^{(n)}(\lambda,y,A)\\&=\int_E\pi(\lambda,x,\mathrm{d}y)\Psi^{(n)}(\lambda,y,A)\\&=\int_E\pi^{(n+1)}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\Psi^{(0)}(\lambda,y,A)\quad(n\geqslant 0).\end{aligned}\tag{2.10}$$

由于 $\xi(\lambda,\cdot)\in\Xi_\lambda$, $0\leqslant\xi(\lambda,\cdot)\leqslant 1$,所以

$$\xi(\lambda,x)=\int_E\frac{q(x,\mathrm{d}y)}{\lambda+q(x)}\xi(\lambda,y)$$

$$= \int_E \pi(\lambda, x, dy)\xi(\lambda, y)$$
$$= \cdots = \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy)\xi(\lambda, y)$$
$$\leqslant \pi^{(n)}(\lambda, x, E) \quad (n \geqslant 1). \tag{2.11}$$

而由(2.10)式有

$$S^{(n)}(\lambda, x, A) = \sum_{k=0}^{n} \Psi^{(k)}(\lambda, x, A)$$
$$= \Psi^{(0)}(\lambda, x, A) + \int_E \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(\lambda, x, dy)\Psi^{(0)}(\lambda, y, A),$$

所以若记 $\mathbf{1}(x, A) = \mathbf{1}_A(x)$，则由(2.9),(2.10)式得

$$\int_E S^{(n)}(\lambda, x, dy)(\lambda + q(y))$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \int_E \pi^{(k)}(\lambda, x, dy) \int_E \frac{I(y, dz)}{\lambda + q(y)}(\lambda + q(z))$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(\lambda, x, E)$$
$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_E \pi^{(k)}(\lambda, x, dy)\pi^{(1)}(\lambda, y, E)$$
$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_E \pi^{(k)}(\lambda, x, dy) \int_E \Psi^{(0)}(\lambda, y, dz) q(z, E)$$
$$= 1 + \sum_{k=8}^{n-1} \int_E \Psi^{(k)}(\lambda, x, dy) q(y, E)$$
$$= 1 + \int_E S^{(n-1)}(\lambda, x, dy) q(y, E). \tag{2.12}$$

更有

$$\int_E S^{(n)}(\lambda, x, dy) q(y)$$
$$\leqslant 1 + \int_E S^{(n-1)}(\lambda, x, dy) q(y)$$
$$\leqslant \cdots \leqslant n + \int_E S^{(0)}(\lambda, x, dy) q(y)$$

$$= n + \int_E \Psi^{(0)}(\lambda, x, \mathrm{d}y) q(y)$$

$$= n + \frac{q(x)}{\lambda + q(x)} < \infty. \tag{2.13}$$

故在(2.12)式两边减去$\int_E S^{(n-1)}(\lambda, x, \mathrm{d}y) q(y)$，得

$$\lambda S^{(n)}(\lambda, x, E) + \int_E \Psi^{(n)}(\lambda, x, \mathrm{d}y) q(y) \leqslant 1. \tag{2.14}$$

将(2.10)代入(2.14)式得

$$\lambda S^{(n)}(\lambda, x, E) \leqslant 1 - \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, \mathrm{d}y)$$

$$\int_E \Psi^{(0)}(\lambda, y, \mathrm{d}z) q(z) \leqslant 1 - \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, \mathrm{d}y)$$

$$\int_E \Psi^{(0)}(\lambda, y, \mathrm{d}z) q(z, E) = 1 - \pi^{(n+1)}(\lambda, x, E). \tag{2.15}$$

将(2.15)代入(2.11)式并注意

$$\lim_{n \to \infty} (1 - \lambda S^{(n)}(\lambda, x, E)) = \bar{\xi}(\lambda, x)$$

得 $\xi(\lambda, x) \leqslant \bar{\xi}(\lambda, x)$ $(\lambda > 0,\ x \in E)$. 命题证毕.

命题2.5　若$q(x) - q(x, A)$是保守的q函数对，则$\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \in \Xi_\lambda$ （对一切$\lambda > 0$）.

证　为证命题2.5，只需证明

$$\int_E q(x, \mathrm{d}y) \bar{\xi}(\lambda, y) = (\lambda + q(x)) \bar{\xi}(\lambda, x)$$

$$(\lambda > 0,\ x \in E). \tag{2.16}$$

事实上，由定理2.3得知$\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$满足$(B_\lambda)$式，所以由$q(x) - q(x, A)$的保守性及$(B_\lambda)$式得

$$\int_E q(x, \mathrm{d}y) \bar{\xi}(\lambda, y)$$

$$= \int_E q(x, \mathrm{d}y)(1 - \lambda \overline{\Psi}(\lambda, y, E))$$

$$= q(x, E) + \lambda[1 - (\lambda + q(x)) \overline{\Psi}(\lambda, x, E)]$$

$$= (\lambda + q(x)(1 - \lambda\overline{\Psi}(\lambda, x, E))$$
$$= (\lambda + q(x))\bar{\xi}(\lambda, x) \quad (\lambda > 0,\ x \in E).$$

命题 2.6 设 $q(x) - q(x, A)$ 是任意的一对 q 函数,则

(1) 存在不断的 q 过程的充要条件是:$q(x) - q(x, A)$ 是保守的;

(2) 若 $q(x) - q(x, A)$ 保守,则 q 过程唯一的充要条件是:$\dim \Xi_\lambda = 0$ (对一个 $\lambda > 0$ 或一切 $\lambda > 0$);

(3) 若 $q(x) - q(x, A)$ 保守,那么或恰有唯一一个不断的 q 过程,或有无穷多个不断的 q 过程,且恰有唯一一个不断的 q 过程的充要条件是

$$\dim \Xi_\lambda = 0.$$

附注 以后 q 过程 $P(t, x, A)$ 的 Laplace 变换 $\Psi(\lambda, x, A)$ 也称为 q 过程. 显然,$P(t, x, A)$ 是不断的 q 过程的充要条件是 $\lambda\Psi(\lambda, x, E) \equiv 1$.

证 (1) 必要性. 设有不断的 q 过程 $\Psi(\lambda, x, A)$,由 $\Psi(\lambda, x, E) \equiv \dfrac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0,\ x \in E)$ 得

$$0 = \lim_{\lambda \to \infty}(\lambda^2 \Psi(\lambda, x, E) - \lambda) = q(x, E) - q(x) \ (x \in E),$$

即 $q(x) - q(x, A)$ 是保守的.

充分性. 设 $q(x) - q(x, A)$ 是保守的,由命题 2.5 得知 $\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \in \Xi_\lambda$,若 $\dim \Xi_\lambda = 0$,则由命题 2.4 得知 $\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \equiv 0$,亦即最小 q 过程 $\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$ 是不断的. 若 $\dim \Xi_\lambda > 0$,令

$$\Psi(\lambda, x, A) = \overline{\Psi}(\lambda, x, A) + \bar{\xi}(\lambda, x) \cdot \frac{\overline{\Psi}(\lambda, x_0, A)}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda, x_0, E)}, \tag{2.17}$$

(注意:若存在一个 $\lambda_0 > 0$,一个 $x_0 \in E$,使 $\overline{\Psi}(\lambda_0, x_0, E) = 0$ 则由 (B_λ) 式得

$$\overline{\Psi}(\lambda_0, x_0, E) - \overline{\Psi}(\mu, x_0, E)$$

$$+(\lambda_0-\mu)\int_E \overline{\Psi}(\lambda_0,x_0,\mathrm{d}y)\overline{\Psi}(\mu,y,E)=0,$$

从而 $\overline{\Psi}(\mu,x_0,E)=0$,对一切 $\mu>0$,这与

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\overline{\Psi}(\mu,x_0,E)=1$$

矛盾,所以 $\overline{\Psi}(\lambda,x,E)>0$ (对一切 $\lambda>0$, $x\in E$.) 推证 $\Psi(\lambda,x,A)$ 是不断的 q 过程. 利用定理 2.3,只需证明 $\Psi(\lambda,x,A)$ 满足定理2.2中的条件(i)~(ii)和(B_λ)式. 显然,$\Psi(\lambda,x,A)$ 满足定理2.2中的条件(i)和(ii),至于(iii),只需注意 $\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足预解方程式即可得出 $\Psi(\lambda,x,A)$ 满足(iii),事实上,若令 $f(\lambda)=\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x_0,E)$,则

$$\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\bar{\xi}(\lambda,x)\overline{\Psi}(\lambda,x_0,A)/f(\lambda),\tag{2.18}$$

$$\bar{\xi}(\lambda,x_0)-\bar{\xi}(\mu,x_0)=f(\mu)-f(\lambda),\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}&(\mu-\lambda)\int_E \overline{\Psi}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\overline{\Psi}(\mu,y,A)\\&\quad=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)-\overline{\Psi}(\mu,x,A),\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}&(\mu-\lambda)\int_E \overline{\Psi}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\bar{\xi}(\mu,y)\\&\quad=(\mu-\lambda)\int_E \overline{\Psi}(\lambda,x,\mathrm{d}y)(1-\mu\overline{\Psi}(\mu,x,E))\\&\quad=(\mu-\lambda)\overline{\Psi}(\lambda,x,E)-\mu(\overline{\Psi}(\lambda,x,E)-\overline{\Psi}(\mu,x,E))\\&\quad=\mu\overline{\Psi}(\mu,x,E)-\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x,E)\\&\quad=\bar{\xi}(\lambda,x)-\bar{\xi}(\mu,x),\end{aligned}\tag{2.21}$$

所以,由(2.18)~(2.21)式得

$$\begin{aligned}&(\mu-\lambda)\int_E \Psi(\lambda,x,\mathrm{d}y)\Psi(\mu,y,A)\\&\quad=(\mu-\lambda)\int_E \overline{\Psi}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\overline{\Psi}(\mu,x,\mathrm{d}y)\\&\qquad+(\mu-\lambda)\int_E \overline{\Psi}(\lambda,x,\mathrm{d}y)\bar{\xi}(\mu,y)\,\frac{\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)}{f(\mu)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\mu-\lambda)\frac{\bar{\xi}(\lambda,x)}{f(\lambda)}\int_E\overline{\Psi}(\lambda,x_0,\mathrm{d}y)\overline{\Psi}(\mu,y,A)\\
&+(\mu-\lambda)\frac{\bar{\xi}(\lambda,x)}{f(\lambda)}\int_E\overline{\Psi}(\lambda,x_0,\mathrm{d}y)\bar{\xi}(\mu,y)\frac{\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)}{f(\mu)}\\
=&\ [\overline{\Psi}(\lambda,x,A)-\overline{\Psi}(\mu,x,A)]\\
&+[\bar{\xi}(\lambda,x)-\bar{\xi}(\mu,x)]\frac{\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)}{f(\mu)}\\
&+\frac{\bar{\xi}(\lambda,x)}{f(\lambda)}[\overline{\Psi}(\lambda,x_0,A)-\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)]\\
&+\frac{\bar{\xi}(\lambda,x)}{f(\lambda)}[\bar{\xi}(\lambda,x_0)-\bar{\xi}(\mu,x_0)]\frac{\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)}{f(\mu)}\\
=&\ \Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A)\\
&+\bar{\xi}(\lambda,x)\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)\left(\frac{1}{f(\mu)}-\frac{1}{f(\lambda)}\right.\\
&\left.+\frac{\bar{\xi}(\lambda,x_0)-\bar{\xi}(\mu,x_0)}{f(\lambda)f(\mu)}\right)\\
=&\ \Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A)\\
&+\bar{\xi}(\lambda,x)\overline{\Psi}(\mu,x_0,A)\left(\frac{f(\lambda)-f(\mu)+f(\mu)-f(\lambda)}{f(\lambda)f(\mu)}\right)\\
=&\ \Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A),
\end{aligned}
$$

此即 $\Psi(\lambda,x,A)$ 满足定理 2.2 中的条件(iii)(预解方程式).

最后证明 $\Psi(\lambda,x,A)$ 满足(B_λ)式. 这只需注意 $\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足(B_λ)式而 $\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in\Xi_\lambda$. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&\int_E q(x,\mathrm{d}y)\Psi(\lambda,y,A)\\
&\quad=\int_E q(x,\mathrm{d}y)\overline{\Psi}(\lambda,y,A)\\
&\qquad+\int_E q(x,\mathrm{d}y)\bar{\xi}(\lambda,y)\frac{\overline{\Psi}(\lambda,x_0,A)}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x_0,E)}\\
&\quad=[(\lambda+q(x))\overline{\Psi}(\lambda,x,A)-\mathbf{1}_A(x)]
\end{aligned}
$$

$$+ (\lambda + q(x))\bar{\xi}(\lambda, x) \frac{\overline{\Psi}(\lambda, x_0, A)}{\lambda \overline{\Psi}(\lambda, x_0, E)}$$
$$= (\lambda + q(x))\Psi(\lambda, x, A) - \mathbf{1}_A(x),$$

即 $\Psi(\lambda, x, A)$ 满足(B_λ)式. 总之 $\Psi(\lambda, x, A)$ 是 q 过程, 显然 $\lambda\Psi(\lambda, x, E) \equiv 1$, 所以 $\Psi(\lambda, x, A)$ 是不断的 q 过程. (1) 的充分性获证.

(2)　设 $q(x) - q(x, A)$ 保守. 则由命题 2.4 和命题 2.5 得知

$$\dim \Xi_\lambda = 0 \Longleftrightarrow \bar{\xi}(\lambda, \cdot) \equiv 0.$$

而显然

$$\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \equiv 0\ (\lambda > 0) \Longrightarrow q \text{ 过程是唯一的.}$$

所以(2) 的充分性获证. 下面证必要性. 若 q 过程唯一, 即恰有 $\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$ 这个 q 过程, 由(1), 不断的 q 过程必存在, 故 $\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$ 不断, 亦即 $\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \equiv 0\ (\lambda > 0)$. 必要性获证.

(3)　设 $q(x) - q(x, A)$ 保守. 若 $\dim \Xi_\lambda = 0$, 则由(1) 和(2) 得知恰有唯一一个不断的 q 过程. 若 $\dim \Xi_\lambda > 0$, 令

$$\Psi_y(\lambda, x, A) = \overline{\Psi}(\lambda, x, A) + \bar{\xi}(\lambda, x) \frac{\overline{\Psi}(\lambda, y, A)}{\lambda \overline{\Psi}(\lambda, y, E)}, \tag{2.22}$$

则如(1) 的充分性中所证对每个 $y \in E$, (2.22) 式中定义的 $\Psi_y(\lambda, x, A)$ 都是不断的 q 过程. 而且当 $y_1 \neq y_2$ 时, 由命题 2.3, 存在 $\lambda_0 > 0$, 使

$$\frac{\overline{\Psi}(\lambda_0, y_1, \{y_1\})}{\lambda_0 \overline{\Psi}(\lambda_0, y_1, E)} \neq \frac{\overline{\Psi}(\lambda_0, y_2, \{y_1\})}{\lambda_0 \overline{\Psi}(\lambda_0, y_2, E)}. \tag{2.23}$$

而今 $\bar{\xi}(\lambda_0, \cdot) \in \Xi_0$, $\dim \Xi_\lambda > 0$, 所以由命题 2.4 知 $\bar{\xi}(\lambda_0, \cdot) \neq 0$, 所以存在 $x_0 \in E$, 使 $\bar{\xi}(\lambda_0, x_0) \neq 0$. 因此, 由 (2.22)、(2.23) 式知

$$\Psi_{y_1}(\lambda_0, x_0, \{y_1\})$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\Psi}(\lambda_0, x_0, \{y_1\}) + \bar{\xi}(\lambda_0, x_0) \frac{\bar{\Psi}(\lambda_0, y_1, \{y_1\})}{\lambda_0 \bar{\Psi}(\lambda_0, y_1, E)} \\
&\neq \bar{\Psi}(\lambda_0, x_0, \{y_1\}) + \bar{\xi}(\lambda_0, x_0) \frac{\bar{\Psi}(\lambda_0, y_2, \{y_1\})}{\lambda_0 \bar{\Psi}(\lambda_0, y_2, E)} \\
&= \Psi_{y_2}(\lambda_0, x_0, \{y_1\}).
\end{aligned}
$$

若还能证明 E 是无穷集，则(3) 证毕. 反设 E 是有穷集，则由 $\bar{\xi}(\lambda, \cdot) \in \Xi$，有

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in E} |\bar{\xi}(\lambda, x)| &= \sup_{x \in E} \left| \int_E \frac{q(x, \mathrm{d}y)}{\lambda + q(x)} \bar{\xi}(\lambda, y) \right| \\
&\leqslant \sup_{y \in E} |\bar{\xi}(\lambda, y)| \sup_{x \in E} \frac{q(x)}{\lambda + q(x)} \quad (\lambda > 0).
\end{aligned}
$$

由 E 为有穷集知

$$
0 \leqslant \sup_{x \in E} \frac{q(x)}{\lambda + q(x)} < 1 \quad (\lambda > 0).
$$

所以

$$
\sup_{x \in E} |\bar{\xi}(\lambda, x)| = 0 \quad (\lambda > 0),
$$

从而 $\dim \Xi_\lambda = 0$，与假设矛盾. 命题证毕.

在命题2.6中，对保守的 q 函数对 $q(x) - q(x, A)$，我们解决了 q 过程的唯一性准则，那就是 q 过程唯一的充要条件是 $\dim \Xi_\lambda = 0$. 而且还证明了不断的 q 过程恒存在，或恰有一个或有无穷多个.

对于一般的 q 函数对，情况如何呢?命题2.6只告诉我们对非保守的 q 函数对而言，不存在不断的 q 过程，而 q 过程唯一的充要条件是什么呢?下面我们将要解决这一问题，解决的途径是扩大状态空间$(E, \mathscr{E})$，把未必保守的 q 函数对化为保守的 q 函数对，再利用命题2.6.

设 $q(x) - q(x, A)$ 是可测空间$(E, \mathscr{E})$上的任意一对 q 函数，令 Δ 是 E 外一点，令 $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$，$\mathscr{E}_\Delta$ 是 E_Δ 上的由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ

代数.令

$$\begin{cases} q_\Delta(x) = \mathbf{1}_E(x)q(x) \quad (x \in E_\Delta); \\ q_\Delta(x,A) = \mathbf{1}_E(x)[q(x,A - \{\Delta\}) + \mathbf{1}_A(\Delta)(q(x) \\ \qquad\qquad - q(x,E))],\ x \in E_\Delta,\ A \in \mathscr{E}_\Delta, \end{cases}$$

易证:$q_\Delta(x) - q_\Delta(x,A)$ 是可测空间$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$上的一对保守的 q 函数,而且 $q_\Delta(x) = q(x)\ (x \in E)$, $q_\Delta(x,A) = q(x,A)\ (x \in E,\ A \in \mathscr{E})$.

命题2.7 设$P_\Delta(t,x,A)$是一个不断的 q_Δ 过程,令 $P(t,x,A)$ 是 $P_\Delta(t,x,A)$ 在$(E,\mathscr{E})$上的局限,即

$$P(t,x,A) = P_\Delta(t,x,A) \quad (当\ t \in \mathbf{T},\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}),$$

则 $P(t,x,A)$ 是一个 q 过程,而且

$$P_\Delta(t,x,A) = \begin{cases} \mathbf{1}_A(\Delta), & 当\ x = \Delta,\ A \in \mathscr{E}_\Delta,\ t \in \mathbf{T}; \\ P(t,x,A - \{\Delta\}) + \mathbf{1}_A(\Delta)(1 - P(t,x,E)), \\ \qquad 当\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}_\Delta,\ t \in \mathbf{T}, \end{cases}$$

从而对不同的不断的 q_Δ 过程而言,它们在$(E,\mathscr{E})$上的局限也是不同的 q 过程.

证明甚易,留给读者作习题.

定理 2.4 任给一对 q 函数$q(x) - q(x,A)$,其 q 过程唯一的充要条件是:$\dim \Xi_\lambda = 0$ (对一个 $\lambda > 0$ 或一切 $\lambda > 0$).

证 充分性.设$\dim \Xi_\lambda = 0$.令 $\Psi(\lambda,x,A)$是任一 q 过程,则由定理 2.3 知 $\Psi(\lambda,x,A)$ 及最小 q 过程$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 均满足(B)式,从而

$$(\lambda + q(x))(\Psi(\lambda,x,A) - \overline{\Psi}(\lambda,x,A))$$
$$= \int_E q(x,\mathrm{d}y)(\Psi(\lambda,y,A) - \overline{\Psi}(\lambda,y,A))$$
$$(\lambda > 0,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E}).$$

所以,对任何 $\lambda > 0$, $A \in \mathscr{E}$, $(\Psi(\lambda,\cdot,A) - \overline{\Psi}(\lambda,\cdot,A)) \in \Xi_\lambda$.由 $\dim \Xi_\lambda = 0$ 得 $\Psi(\lambda,x,A) \equiv \overline{\Psi}(\lambda,x,A)$.即 q 过程唯一.

必要性. 设 $\dim \Xi_\lambda > 0$. 任取 $\xi(\lambda,\cdot) \in \Xi_\lambda$, $\xi(\lambda,\cdot) \neq 0$, 作

$$\xi_\Delta(\lambda,x) = \begin{cases} \xi(\lambda,x), & \text{当 } x \in E, \\ 0, & \text{当 } x = \Delta, \end{cases}$$

则当 $x \in E$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_{E_\Delta} \frac{q_\Delta(x,\mathrm{d}y)}{\lambda + q_\Delta(x)} \xi_\Delta(\lambda,y) \\
&\quad = \int_E \frac{q(x,\mathrm{d}y)}{\lambda + q(x)} \xi(\lambda,y) + \frac{q_\Delta(x,\{\Delta\})}{\lambda + q_\Delta(x)} \xi_\Delta(\lambda,\Delta) \\
&\quad = \int_E \frac{q(x,\mathrm{d}y)}{\lambda + q(x)} \xi(\lambda,y) = \xi(\lambda,x) \\
&\quad = \xi_\Delta(\lambda,x),
\end{aligned}$$

而当 $x = \Delta$ 时, 显然有

$$\int_{E_\Delta} \frac{q_\Delta(x,\mathrm{d}y)}{\lambda + q_\Delta(x)} \xi_\Delta(\lambda,y) = 0 = \xi_\Delta(\lambda,\Delta).$$

这就证明了对 $q_\Delta(x) - q_\Delta(x,A)$ 而言, 它所对应的空间 $\Xi_\lambda(\Delta)$ 亦含非恒 0 函数 $\xi_\Delta(\lambda,\cdot)$. 所以, 由命题 2.6 得知必有无穷多个不断的 q_Δ 过程, 再用命题 2.7, 得知必有无穷多个 q 过程. 定理证毕.

系 对任何 q 函数对而言, 或恰有唯一一个 q 过程, 或有无穷多个 q 过程, 且恰有唯一一个 q 过程的充要条件是 $\dim \Xi_\lambda = 0$ (对一个 $\lambda > 0$ 或一切 $\lambda > 0$).

本节只讨论了 q 过程的存在及唯一性问题. 对于给定一对 q 函数 $q(x) - q(x,A)$, 如何求出其全部 q 过程的问题, 可参阅专著[28].

§1 和 §2 都只讨论了时齐的准转移函数的分析性质. 对于非时齐的场合, 限于篇幅, 并未论及. 这方面亦有不少文献予以研究, 可参看专著[28] 及文献[35] ~ [37].

§3 可数状态的场合

在 §1 和 §2 中, 我们研究了一般状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 上的时齐的

准转移函数 $P(t,x,A)$ 的分析理论. 对可数状态, 即 E 是可数集时, 虽为一般状态之特例, 但由于其鲜明的直观意义及广泛的应用性, 仍然值得单独提出来讨论一下. 不过为了节省篇幅, 我们只介绍有关问题的提法及主要结论, 不给详细证明. 有兴趣的读者, 请参阅专著[26],[29],[75],[80], 或由 §1、§2 的相应结果平行推导.

对于时齐的一般状态的马尔可夫过程而言, 描述其概率特征的主要工具是转移函数 $P(t,x,A)$ ($t\in\mathbf{T}=[0,\infty)$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$). 而对时齐的可数状态(即 E 是可数集) 的马尔可夫过程而言, 描述其概率特征的主要工具是转移矩阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$. 虽然由转移矩阵 $P(t)$ 亦可派生出其转移函数

$$P(t,x,A)=\sum_{j\in A}p_{x,j}(t)\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}),\qquad(3.1)$$

其中 $\mathscr{E}$ 由 E 的全体子集所构成.

然而我们并不这样来处理时齐的可数状态的马尔可夫过程的分析性质和轨道性质, 而用转移矩阵 $P(t)$ 来做工具处理问题. 这样做, 在大部分场合, 与一般状态是无区别的, 但有些问题二者是不同的. 例如, 在一般状态场合, 对转移函数的可微性问题, 我们是研究极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{P(t,x,A)-\delta(x,A)}{t}\qquad(3.2)$$

的存在性; 其中 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $\delta(x,A)=0$ 或 1 由 $x\overline{\in}A$ 或 $x\in A$ 而定. 但在可数状态场合, 我们研究的是极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{p_{i,j}(t)-\delta_{i,j}}{t}\qquad(3.3)$$

的存在性, 其中 $i,j\in E$, $\delta_{i,j}=\delta(i,\{j\})$. 这里应该着重指出的是: 极限(3.3) 存在, 并不能保证极限(3.2) 存在(在 E 为可数集时, (3.2) 中的 $P(t,x,A)$ 由(3.1) 式所定义).

本节自此恒设 E 为可数集, 转移矩阵 $P(t)$ 满足 $P(0)=P(0+)=I$ 为单位矩阵, 言及矩阵比较大小或取极限时, 均如第

六章 §2 约定的,是在“逐元意义下”的.

定理 3.1 设 $P(t)=(p_{i,j},\ i,\ j\in E)$ 是转移矩阵 $(t\in[0,\infty))$,则

(1) $$|P(t,i,A)-P(s,i,A)|\leqslant 1-p_{i,i}(|t-s|),\tag{3.4}$$

其中 $0\leqslant s,t<\infty,\ i\in E,\ A\subset E,\ P(t,i,A)$ 如(3.1)所定义.由(3.4)看出 $P(t,i,A)$ 对 t 来说在 $[0,\infty)$ 上一致连续,而且对 $A\subset E$ 来说是等度的;

(2) $$\lim_{t\to\infty}P(t)=\Pi\tag{3.5}$$

存在,称 Π 为 $P(t)$ 的**遍历极限**;

(3) $$\Pi P(t)=P(t)\Pi=\Pi^2=\Pi\tag{3.6}$$

(对任何 $0\leqslant t<\infty$).

证 参见[29]第二篇定理 3.1 及 3.2.

令

$$\mathfrak{M}=\{A\subset E:\lim_{t\to 0+}\sup_{i\in A}(1-p_{i,i}(t))=0\}.\tag{3.7}$$

定理 3.2 设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是转移矩阵,则恒有

(1) $$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i\quad(\forall i\in E)\tag{3.8}$$

存在(q_i 可为 ∞),且

$$p_{i,i}(t)\geqslant \mathrm{e}^{-q_it}\quad(\forall i\in E,\ t\geqslant 0),\tag{3.9}$$

此处 $\mathrm{e}^{-\infty}$ 定义为 0.

(2) 对任意固定的 $i\in E,\ B\in\mathfrak{M},\ i\overline{\in}B$,均有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(t,i,A)}{t}=q_{i,A}\tag{3.10}$$

存在($\forall A\subset B$),且 $0\leqslant q_{i,A}<\infty$,此外此极限对 $A\subset B$ 还是一致的,$q_{i,A}$ 对 $A\subset B$ 有可数可加性.当 $A=\{j\}$ 为单点集时,记 $q_{i,\{j\}}$ 为 $q_{i,j}$,这时恒有 $0\leqslant q_{i,j}<\infty\ (\forall i\neq j,\ i,j\in E)$.

(3) $\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leqslant q_i$. (3.11)

(4) $\sup_{i\in E} q_i < \infty \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0+}\sup_{i\in E}(1-p_{i,i}(t)) = 0$

$$\Longrightarrow q_i = \sum_{j\neq i} q_{i,j}, \text{且}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t} = q_i \tag{3.12}$$

对 $i \in E$ 一致成立.

证明参见[29]第二篇定理3.3～3.5.

定理3.3 设 $P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \in E)$ 是转移矩阵. 任意固定一个 $i \in E$, 若 $-q_{i,i} \triangleq q_i < \infty$, 则对任何 $j \in E$, $p_{i,j}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上有连续导数 $p'_{i,j}(t)$, 而且满足:

(1) $\sum_{j\in E} |p'_{i,j}(t)| \leqslant 2q_i \quad (t \geqslant 0)$; (3.13)

(2) $\sum_{j\in E} p'_{i,j}(t) = 0 \quad (t > 0)$; (3.14)

(3) $\sum_{k\in E} p'_{i,k}(t) p_{k,j}(s) = p'_{i,j}(s+t) \quad (t > 0,\ s \geqslant 0)$;

(3.15)

(4) $\lim_{t\to 0+} p'_{i,j}(t) = p'_{i,j}(0) = q_{i,j}$; (3.16)

(5) $\lim_{t\to\infty} p'_{i,j}(t) = 0$; (3.17)

(6) $\sum_{k\in E} q_{i,k} = 0 \Longleftrightarrow$

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k\in E} q_{i,k} p_{k,j}(t) \quad (t \geqslant 0,\ j \in E). \tag{3.18}$$

特别地, 若还加条件:

$$\sup_{i\in E} q_i \leqslant C < \infty, \tag{3.19}$$

记

$$Q = (q_{i,j},\ i,j \in E), \tag{3.20}$$

则还有:

(7) $P'(t) = QP(t) = P(t)Q \quad (t \geqslant 0)$; (3.21)

(8)　$P(t)=e^{Qt}\quad(t\geqslant 0)$;　　(3.22)

(9)　$Q\Pi=\Pi Q=0$;　　(3.23)

其中 $\Pi=\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$.

证明参见[29]第二编定理 3.6 ~ 3.8.

系　设 $Q^*=(q_{i,j}^*,i,j\in E)$, $-\infty<q_{i,i}^*\leqslant 0$, $0\leqslant q_{i,j}^*<\infty\ (i\in E,\ j\in E,\ i\neq j)$, $\sum\limits_{j\in E}q_{i,j}^*=0$, $\sup\limits_{i\in E}(-q_{i,i}^*)<\infty$, 则 $P(t)=e^{Q^*t}$ 是转移矩阵.

前面我们讨论的是转移矩阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 的分析性质. 如果 $P(t)$ 是准转移矩阵, 其分析性质如何? 是否还要平行地详细讨论呢? 回答是不需要了. 因为只要把状态空间 E 扩大, 就可以由准转移矩阵 $P(t)$ 导出转移矩阵, 办法如下:

任取一点 $\Delta\overline{\in}E$, 令 $E_\Delta=E\cup\{\Delta\}$, 再令

$$\tilde{p}_{i,j}(t)=\begin{cases}p_{i,j}(t), & \text{当 } i,j\in E,\\ \delta_{\Delta,j}, & \text{当 } i=\Delta,\ j\in E_\Delta,\\ 1-\sum\limits_{j\in E}p_{i,j}, & \text{当 } i\in E,\ j=\Delta,\end{cases}\tag{3.24}$$

则 $\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{i,j}(t),\ i,j\in E_\Delta)$ 是转移矩阵, 而 $P(t)$ 是 $\tilde{P}(t)$ 的子矩阵, 所以把前面 3 个定理对 $\tilde{P}(t)$ 成立, 再加上 $\tilde{P}(t)$ 局限在 $E\times E$, 则得到了有关 $P(t)$ 的分析性质.

下面我们研究前述三定理的反问题. 首先我们给一个定义. (简称转移矩阵为转移阵.)

定义 3.1　称矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$ 是**转强阵**, 如果

$$\infty>q_i\triangleq -q_{i,i}\geqslant 0,\ 0\leqslant q_{i,j}<\infty\ (i\neq j,\ i,j\in E),$$

$$\sum_{j\in E}q_{i,j}\leqslant 0\quad(\forall i\in E).\tag{3.25}$$

如果(3.25)之不等式改为等式, 则称 Q 为**保守的转强阵**.

称准转移阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是一个 **Q 过程**, 如果它满足 $P'(0)=Q$. 特别地, 若 $P'(t)=QP(t)\ (t\geqslant 0)$, 则称 $P(t)$ **满**

足倒退方程式,简称满足(B);若 $P'(t)=P(t)Q\ (t\geqslant 0)$,则称 $P(t)$ **满足前进方程式**,简称满足(F);若 $P(t)\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}\ (t\geqslant 0)$,则称 $P(t)$ 是**不间断的**,简称不断的.称

$$R(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}P(t)\mathrm{d}t\quad(\lambda>0)\tag{3.26}$$

为准转移阵 $P(t)$ 的 **Laplace 变换**.注意:此处对矩阵 $P(t)$ 的积分仍如以前的约定,是逐元意义下的积分.称 Q 过程的 Laplace 变换亦为 **Q 过程**.

定理 3.4　任意给定一个转强阵 Q,必存在一个 Q 过程 $\overline{P}(t)$,它满足(B)与(F),而且对任一个 Q 过程 $P(t)$,总有 $\overline{P}(t)\leqslant P(t)\ (t\geqslant 0)$.

证明参见[29]第二编定理 4.3.

定义 3.2　称转强阵 Q 是**有法的**,若 $\overline{P}(t)\mathbf{1}=\mathbf{1}\ (t\geqslant 0)$,即其最小的 Q 过程 $\overline{P}(t)$ 是转移阵.

定理 3.5　设 Q 是有法的转强阵,则 Q 必是保守的且其 Q 过程唯一.

证明由定义立即可证此定理.

定理 3.6　任给矩阵 $R(\lambda)=(r_{i,j}(\lambda),\ i,j\in E)\ (\lambda>0)$,它是某一个准转移阵 $P(t)$ 的 Laplace 变换的充要条件是:

(1)　正则化条件:$R(\lambda)\geqslant 0,\ \lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}\ (\lambda>0)$;

(2)　预解方程式:

$$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0\quad(\lambda,\mu>0);$$

(3)　连续性条件:$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I$ 是单位矩阵.

证明参见[29]第二编定理 4.8.

定义 3.3　令 $(l)=\{\alpha'=(\alpha_i,i\in E):\sum\limits_{i\in E}|\alpha_i|<\infty\}$, $(m)=\{y=(y_i,i\in E):\sup\limits_{i\in E}|y_i|<\infty\}$,再令

$$\mathscr{L}_\lambda=\{\alpha'\in(l):\alpha'\geqslant 0,\ \alpha'(\lambda I-Q)=0\},\ \lambda>0;$$

$$\mathfrak{M}_\lambda=\{y\in(m):y\geqslant 0,\ (\lambda I-Q)y=0\},\ \lambda>0.$$

记 l^+, m^+ 分别为 $\mathscr{L}_\lambda$, $\mathfrak{M}_\lambda$ 的维数(注意:它们的维数不依赖 λ,故这种记法是合理的).

定理 3.7 对任意转强阵 Q 来说,

(1) 满足(F)的 Q 过程或者恰有一个或者有无穷多个,且恰有一个的充要条件是下列两条件中有一个成立:

(a) Q 是有法的;

(b) $l^+ = 0$.

(2) 满足(F)的不断的 Q 过程或者没有,或者恰有一个,或者有无穷多个,而且

(a) Q 是无法的且 $l^+ > 1 \Rightarrow$ 有无穷多个;

(b) Q 保守且 Q 过程唯一,或者 $l^+ = 1 \Rightarrow$ 恰有一个;

(c) $l^+ = 0$ 且 Q 过程不唯一 $\Rightarrow$ 没有.

(3) 满足(B)的 Q 过程恒存在,且或者恰有一个或者有无穷多个,恰有一个的充要条件是 $m^+ = 0$.

(4) 满足(B)的不断的 Q 过程或者没有或者恰有一个或者有无穷多个,而且

(a) Q 非保守 $\Rightarrow$ 没有满足(B)的不断的 Q 过程;

(b) Q 保守且 $m^+ = 0 \Rightarrow$ 满足(B)的不断的 Q 过程恰有一个;

(c) Q 保守且 $m^+ > 0 \Rightarrow$ 满足(B)的不断的 Q 过程有无穷多个.

证明参见[29]第二编定理 4.11 与 4.13.

定理 3.8 设 Q 是任一转强阵,则 Q 过程唯一的充要条件是下列两条件成立:

(1) $\inf\limits_{i\in E}(\mathrm{e}_i'\lambda\bar{R}(\lambda)\mathbf{1}) \triangleq f(\lambda) > 0 \quad (\forall \lambda > 0)$;

(2) $l^+ = 0$ 或者 Q 是有法的,

其中 e_i' 是行向量,对应于 i 的分量为 1、其他分量为 0, $\bar{R}(\lambda)$ 是定理 3.4 中的最小 Q 过程 $\bar{P}(t)$ 的 Laplace 变换.

证明参见[29]第二编定理4.14.

§4　轨道的纯间断性

这一章的标题是纯间断的马尔可夫过程,但前面三节都是讨论转移函数及其产生的半群的分析性质,而且在讨论的过程中,把马尔可夫过程 X 暂时撇在一边.这一节将要在前三节的基础上研究马尔可夫过程的轨道性质.

定理4.1　设 $X=\{X(t):t\in[0,\infty)\}$ 是以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间、以标准转移函数 $P(t,x,A)$ 为转移函数的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可分的马尔可夫过程, $E\in\mathscr{B}_\infty\triangleq\mathscr{B}([0,\infty))$,设 P^x 是第七章命题1.1中所定义的 $\mathscr{G}^\circ\triangleq\sigma(X(t),t\in[0,\infty))$ 上的概率测度,则

$$P^x(X_u=x,\ 0\leqslant u\leqslant t)=\mathrm{e}^{-q(x)t}$$

$$(x\in E,\ t\geqslant 0,\ 0\leqslant q(x)\leqslant\infty \text{ 由定理 1.5 所确定}). \tag{4.1}$$

证　由于 $P(t,x,A)$ 是标准的,即

$$\lim_{t\to 0+}P(t,x,\{x\})=1,$$

若令 $\mu=P\circ X_0^{-1}$, $B(x,\varepsilon)$ 为以 x 为中心、以 ε 为半径之开球,则

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+}P(|X(t+s)-X(s)|\geqslant\varepsilon)\\&\quad=\lim_{t\to 0+}\int_E\mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(s,x_0,\mathrm{d}x_1)\int_E P(t,x_1,\mathrm{d}x_2)\\&\qquad\cdot\mathbf{1}_{\{|x_2-x_1|\geqslant\varepsilon\}}(x_1,x_2)\\&\quad=\lim_{t\to 0+}\int_E\mu(\mathrm{d}x_0)\int_E P(s,x_0,\mathrm{d}x_1)\,P(t,x_1,B^c(x_1,\varepsilon))\\&\quad=0,\end{aligned}$$

此即 $\{X_t:t\in T\}$ 随机右连续,从而它是完全可分的(参见第四章定理1.1).对任意固定的 $t>0$,令 $Q_t=\left\{\dfrac{kt}{2^n}:0\leqslant k\leqslant 2^n,\ n\geqslant 1\right\}$ 是

可分集. 由于

$$P^x(X_s = x,\ X_{s+t} = x) = P(s,x,\{x\})P(t,x,\{x\}), \tag{4.2}$$

所以由完全可分性、(4.2) 及定理 1.5 得

$$\begin{aligned} &P^x(X_u = x,\ 0 \leqslant u \leqslant t) \\ &= \lim_{n\to\infty} P^x\left(X_{\frac{kt}{2^n}} = x,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[P\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)\right]^{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\log P\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)}{\frac{t}{2^n}}\cdot\frac{t}{2^n}\cdot 2^n\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-q(x)t} \quad (\text{约定 } 0\cdot\infty = 0,\ \mathrm{e}^{-\infty} = 0). \end{aligned}$$

定理证毕.

在第八章定义 1.3 中,曾定义过:x 是稳定状态当且仅当 $0 \leqslant q(x) < \infty$,特别地,$q(x) = 0$ 时称 x 是吸收状态. x 是瞬变状态当且仅当 $q(x) = \infty$.

从定理 4.1 我们看出上述定义是符合直观的. 因为 $q(x) = 0$ 时,对任何 $t \geqslant 0$,总有 $P^x(X_u = x,\ 0 \leqslant u \leqslant t) = 1$,即是从状态 x 出发,永远滞留在 x 的概率为 1. 而当 $q(x) = \infty$ 时,对任何 $t > 0$,总有 $P^x(X_u = x,\ 0 \leqslant u \leqslant t) = 0$,即是从状态 x 出发,在 x 滞留一段任意小的正时间的概率为 0,亦即 x 是一个极不稳定的状态,故命名为瞬变状态. 当 $0 < q(x) < \infty$ 时,对任何 $t > 0$, $0 < P^x(X_u = x,\ 0 \leqslant u \leqslant t) < 1$,这是一种既不是极不稳定又不是吸收状态,故名曰非吸收状态的稳定状态.

定义 4.1 称实值函数 f 在 $[0,C)$ 上(C 可为实数,亦可为 ∞)是**跳跃函数**(或**阶梯函数**),如果 $\forall\, 0 < \alpha < C$, f 在 $[0,\alpha)$ 中最多只有有限个间断点 τ_i,而且它们都是跳跃点(即 $f(\tau_i +)$ 和 $f(\tau_i -)$ 都存在),而且在任一连续区间中,f 为常值,又 $f(\tau_i)$ 或

者等于 $f(\tau_i+)$ 或者等于 $f(\tau_i-)$. 简称 $[0,\infty)$ 上的跳跃函数为跳跃函数.

定理 4.2　在定理 4.1 的条件下,若还有

$$\lim_{t\to0+}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}=q(x)\quad(\forall x\in E_\Delta),$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{P(t,x,A)}{t}=q(x,A)\quad(\forall x\in E_\Delta,\ x\overline{\in}A,\ A\in\mathscr{E}_\Delta)$$

存在且有限, $0<q(x)<\infty$, $q(x)$-$q(x,A)$ 是保守的 q 函数对,则

$$P^x(X(\cdot,\omega)\text{ 有第一个间断点 }\tau(\omega)<\infty,\text{它是跳跃点},\ X(s,\omega)\equiv x,\text{当 }s<\tau(\omega),\ X(\tau(\omega)+,\omega)\neq x)=1\quad(\forall x\in E).$$

证　任取 $b>0$,令

$$D_{n,b}^{(M)}=\left\{\omega\in\Omega:\exists k,\ 2\leqslant k\leqslant 2^n,\text{使得 } X(t,\omega)=\begin{cases}x, & \text{当 }0\leqslant t\leqslant\dfrac{(k-1)M}{2^n},\\ y(\omega)\neq x, & \text{当 }\dfrac{kM}{2^n}\leqslant t\leqslant\dfrac{kM}{2^n}+b\end{cases}\right\}.$$

由于对任意的正整数 $n_1<n_2<n_3$,只要 n_1 充分大,就有

$$D_{n_1,b}^{(M)}\cap D_{n_3,b}^{(M)}\subset D_{n_2,b}^{(M)},$$

所以

$$D_b^{(M)}\triangleq\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}D_{n,b}^{(M)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}D_{n,b}^{(M)}=\lim_{n\to\infty}D_{n,b}^{(M)}.\tag{4.3}$$

又因为

$$b_1\leqslant b_2\Longrightarrow D_{b_1}^{(M)}\supset D_{b_2}^{(M)},$$

所以可令

$$D^{(M)}=\lim_{b\downarrow0}D_b^{(M)}=\lim_{n\to\infty}D_{\frac{1}{n}}^{(M)}=\bigcup_{b>0}D_b^{(M)},\tag{4.4}$$

$$D=\lim_{M\to\infty}D^{(M)}.\tag{4.5}$$

任取 $\omega\in D^{(M)}$,必存在 $\tau=\tau(\omega)\in(0,M]$, $\eta=\eta(\omega)>$

0, $y(\omega) \neq x$,使

$$X(t,\omega) = \begin{cases} x, & \text{当 } t \in [0,\tau(\omega)), \\ y(\omega), & \text{当 } t \in (\tau(\omega),\tau(\omega)+\eta(\omega)). \end{cases}$$

再用 X 的可分性,$X(\tau(\omega),\omega)$ 或者等于 $X(\tau(\omega)+,\omega)$ 或者等于 $X(\tau(\omega)-,\omega)$,即 $\tau(\omega)$ 为 $X(\cdot,\omega)$ 的第一个间断点且它还是跳跃点.

若能证 $P^x(D)=1$ ($\forall x \in E$),则定理 4.2 得证.事实上,由定理 4.1 及 X 的马尔可夫性与可分性得

$$P^x(D_{n,b}^{(M)}) = \sum_{k=2}^{2^n}\int_{E-\{x\}} e^{-q(x)(k-1)M/2^n} \cdot e^{-q(y)b}P\left(\frac{M}{2^n},x,dy\right)$$

$$= \frac{e^{-q(x)M/2^n} - e^{-q(x)M}}{(1-e^{-q(x)M/2^n})\Big/\frac{M}{2^n}} \cdot \int_{E-\{x\}} \frac{P\left(\frac{M}{2^n},x,dy\right)}{\frac{M}{2^n}} e^{-q(y)b}. \tag{4.6}$$

由于

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(t,x,A)}{t} = q(x,A) \quad (x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ x \overline{\in} A),$$

$$q(x,E-\{x\}) = q(x),$$

所以在(4.6)中先令 $n\to\infty$,其次令 $b \downarrow 0$,则可知

$$P^x(D^{(M)}) = \lim_{b\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}P^x(D_{n,b}^{(M)}) = 1 - e^{-q(x)M}. \tag{4.7}$$

在(4.7)中令 $M\to\infty$ 得 $P^x(D)=1$.定理证毕.

系 *在定理 4.2 的条件下,恒有*

$$P(X(\cdot,\omega)\text{ 有第一个间断点 } \tau(\omega)<\infty,\ \tau(\omega)\text{ 是跳跃点}) = 1.$$

证 $P(X(\cdot,\omega)$ 有第一个间断点 $\tau(\omega)<\infty$, $\tau(\omega)$ 是跳跃点$) = \int_E \mu(dx)P^x(X(\cdot,\omega)$ 有第一个间断点 $\tau(\omega)<\infty$, $\tau(\omega)$ 是跳跃点$) = 1$.

定理 4.2 说明,对规则的可分的马尔可夫过程而言,只要其标

准转移函数 $P(t,x,A)$ 产生的 q 函数对 $q(x)$-$q(x,A)$ 是保守的且无吸收状态,则此马尔可夫过程必为纯间断的马尔可夫过程.

定理 4.2 点明了这一章的主题,也说明我们为什么要花那么大的篇幅在 §1 和 §2 研究转移函数及其产生的半群和 q 函数对的分析性质.

作为这一章的结束,下面我们再给出一条有关马尔可夫过程的轨道性质.为省篇幅,只给结论,不予证明.

定理4.3　设 $X=\{X_t:t\in \mathrm{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可分的、时齐的、以$(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的马尔可夫过程,$E\in\mathscr{B}(\mathbf{R})$,$X$ 具有标准转移函数$P(t,x,A)$,且

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-P(t,x,\{x\})}{t}=q(x)\quad(x\in E),$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(t,x,A)}{t}=q(x,A)\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ x\overline{\in} A)$$

存在且有限,$q(x)$-$q(x,A)$ 是保守 q 函数对,则存在随机变量 $\eta(\leqslant\infty)$ 及 P 零测集Λ,当 $\omega\overline{\in}\Lambda$ 时,$\eta(\omega)$ 是 $X(\cdot,\omega)$ 的跳跃点的极限,而且 $X(\cdot,\omega)$ 是$[0,\eta(\omega))$ 上的跳跃函数.

特别地,若$\sup\limits_{x\in E}q(x)\leqslant M<\infty$,则对任何 $\omega\overline{\in}\Lambda$, $X(\cdot,\omega)$是$[0,\infty)$ 上的跳跃函数.

证明参见[76] §6.2 定理2.

第九章　鞅　论

§1　鞅不等式及收敛定理

定义1.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$\mathbf{T}\subset\overline{\mathbf{R}}$，$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{F}$中的一族单调非降子$\sigma$代数，$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是一个适应于$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$的以$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$为状态空间的随机过程，$\boldsymbol{E}(|X_t|)<\infty\ (t\in\mathbf{T})$(此处及今后，$\mathscr{B}^d\triangleq\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$)，如果

$$\boldsymbol{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\leqslant X_s\quad(s\leqslant t,\ s,t\in\mathbf{T}),\tag{1.1}$$

则称$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$是**上鞅**. 若(1.1)式代之以

$$\boldsymbol{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\geqslant X_s\quad(s\leqslant t,\ s,t\in\mathbf{T}),\tag{1.2}$$

则称X为**下鞅**. 既是上鞅又是下鞅者，称之为**鞅**. 本章总设概率空间是完备的.

定义1.1′　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\mathbf{T}\subset\overline{\mathbf{R}}$，$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{F}$中一族单调非升子$\sigma$代数，$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是一个以$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$为状态空间的随机过程，$\boldsymbol{E}(|X_t|)<\infty$，$X_t\in\mathscr{F}_t\ (t\in\mathscr{T})$. 如果

$$\boldsymbol{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\leqslant X_s\quad(s\geqslant t,\ s,t\in\mathbf{T}),\tag{1.1$'$}$$

则称$X=(X_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T})$是**反上鞅**. 若(1.1)′式代之以

$$\boldsymbol{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\geqslant X_s\quad(s\geqslant t,\ s,t\in\mathbf{T}),\tag{1.2$'$}$$

则称X为**反下鞅**. 既为反上鞅又为反下鞅者称之为**反鞅**.

例1.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mathbf{T}$，$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}\}$如定义1.1，$\xi$是一随机变量，$\boldsymbol{E}(|\xi|)<\infty$，则$X=\{X_t=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_t),\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$是一

个鞅.

例 1.2　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一概率空间，$\mathbf{T}=\{0,1,\cdots\}$，$\{X_n:n\in\mathbf{T}\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个自由随机徘徊，即

$$X_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k\ (n\in\mathbf{T}),\ \{\xi_k:k\in\mathbf{T}\}$$

是相互独立具有共同分布函数的随机变量序列：

$$P(\xi_k=1)=p,\ P(\xi_k=-1)=q\ (k\in\mathbf{T}),$$

$$0<p<1,\ p+q=1.$$

令$\mathscr{F}_n=\sigma(X_s,0\leqslant s\leqslant n)$，$X=(X_n,\mathscr{F}_n,n\in\mathbf{T})$，则

(1)　X是鞅$\Longleftrightarrow p=q$；

(2)　X是下鞅$\Longleftrightarrow p\geqslant q$；

(3)　X是上鞅$\Longleftrightarrow p\leqslant q$.

事实上，"$\boldsymbol{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n$(对应地$\geqslant$或$\leqslant$)$\Longleftrightarrow X$是鞅(对应地，下鞅或上鞅)". 而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=\boldsymbol{E}(X_n|\mathscr{F}_n)+\boldsymbol{E}(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=X_n+\boldsymbol{E}(\xi_{n+1})=X_n+(p-q)\quad(n\geqslant 0),\end{aligned}$$

故论断成立.

例 1.3　令$\Omega=[0,1)$，$\mathscr{F}$是Ω中全体Borel子集构成的σ代数，P是$\mathscr{F}$上的Lebesgue测度，遂得概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$. 令ξ是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机变量，且$\boldsymbol{E}(|\xi|)<\infty$. 把$\xi$的定义域由$[0,1)$按下法扩张到$[0,2)$上，

$$\xi(x+1)=\xi(x),\quad x\in[0,1).$$

再令

$$\eta_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k}{n}\right),\quad x\in[0,1),$$

$\mathscr{F}'_n=\{A:A\in\mathscr{F},\ A$是以$\frac{1}{n}$为周期的集合$\}$，$\mathscr{F}_{1/n}=\mathscr{F}'_{2^n}$. 所谓$A$是以$\frac{1}{n}$为周期的集合，即"$x\in A\Longleftrightarrow\left(x+\frac{1}{n}-\left[x+\frac{1}{n}\right]\right)\in A$",

$[\alpha]$ 表示不大于 α 的最大整数.则 $X=\{X_{1/n}=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_{1/n}),\mathscr{F}_{1/n},n\geqslant 1\}$ 是鞅,且 $X_{1/n}=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_{1/n})=\eta_{2^n}$.

首先证明 $\mathscr{F}'_n$ 是 σ 代数,显然 $\Omega\in\mathscr{F}'_n$.又若 $A_i\in\mathscr{F}'_n(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$,且

$$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Longleftrightarrow \text{存在 } i_0\geqslant 1,\text{使}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\left[x+\frac{1}{n}\right]\in A_{i_0}$$

$$\Longleftrightarrow\left(x+\frac{1}{n}\right)-\left[x+\frac{1}{n}\right]\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}'_n$.仿之可证 $A,B\in\mathscr{F}'_n\Longrightarrow A-B\in\mathscr{F}'_n$.所以 $\mathscr{F}'_n$ 是 σ 代数.

显然 $\{\mathscr{F}_{1/n}=\mathscr{F}'_{2^n}:n\geqslant 1\}$ 是单调非降的.所以,由例 1.1 得知 X 是鞅.

其次证明:$\eta_n=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}'_n)$.事实上,由 $\xi(x)=\xi(x+1)$ $(x\in[0,1))$,可得

$$\eta_n\left(x+\frac{1}{n}-\left[x+\frac{1}{n}\right]\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k+1}{n}-\left[x+\frac{1}{n}\right]\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k+1}{n}-1\right), & \text{当 } x\in\left[\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n}{n}\right),\\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k+1}{n}\right), & \text{当 } x\in\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right),\end{cases}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k+1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi\left(x+\frac{k}{n}\right)=\eta_n(x).$$

若令

$$A=\{x:x\in\Omega,\eta_n(x)<\lambda\},\quad \lambda \text{ 为实数},$$

则有

$$x \in A \Longleftrightarrow \eta_n(x) < \lambda \Longleftrightarrow \eta_n\left(x + \frac{1}{n} - \left[x + \frac{1}{n}\right]\right) < \lambda$$

$$\Longleftrightarrow x + \frac{1}{n} - \left[x + \frac{1}{n}\right] \in A.$$

显然 $A \in \mathscr{F}$,所以 $A \in \mathscr{F}'_n$,即 $\eta_n \in \mathscr{F}'_n$.再证对任何 $B \in \mathscr{F}'_n$,有

$$\int_B \eta_n \mathrm{d}P = \int_B \xi \mathrm{d}P. \tag{1.3}$$

令

$$B\left(-\frac{k}{n}\right) = \left\{x : x = y - \frac{k}{n},\ y \in B,\ y - \frac{k}{n} \geqslant 0\right\}$$
$$\cup \left\{x : x = y - \frac{k}{n} + 1,\ y \in B,\ y - \frac{k}{n} < 0\right\}, \tag{1.4}$$

若注意

$$x = \begin{cases} \left(\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left[x + \frac{k}{n}\right]\right) - \frac{k}{n}, \\ \qquad \text{当 } x \in [0,1),\ x + \frac{k}{n} < 1; \\ \left(\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left[x + \frac{k}{n}\right]\right) - \frac{k}{n} + 1, \\ \qquad \text{当 } x \in [0,1),\ x + \frac{k}{n} \geqslant 1, \end{cases}$$

$$x \in [0,1),\ x + \frac{k}{n} < 1 \Longleftrightarrow x \in [0,1),\ x - \left[x + \frac{k}{n}\right] \geqslant 0,$$

则有

$$x = \begin{cases} \left(\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left[x + \frac{k}{n}\right]\right) - \frac{k}{n}, \\ \qquad \text{当 } x \in [0,1),\ x - \left[x + \frac{k}{n}\right] \geqslant 0; \\ \left(\left(x + \frac{k}{n}\right) - \left[x + \frac{k}{n}\right]\right) - \frac{k}{n} + 1, \\ \qquad \text{当 } x \in [0,1),\ x - \left[x + \frac{k}{n}\right] < 0. \end{cases}$$

由 $B \in \mathscr{F}_n'$ 及 $B\left(-\frac{k}{n}\right)$，$\mathscr{F}_n'$ 的定义可得

$$x \in B\left(-\frac{k}{n}\right) \Longleftrightarrow \left(x+\frac{k}{n}\right)-\left[x+\frac{k}{n}\right] \in B \Longleftrightarrow x \in B.$$

即

$$B\left(-\frac{k}{n}\right) \equiv B, \quad k = 0,1,\cdots,n-1. \tag{1.5}$$

所以由 η_n 及 $B\left(-\frac{k}{n}\right)$ 的定义和(1.5)式得

$$\begin{aligned}\int_B \eta_n \mathrm{d}P &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_B \xi\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}P \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{B\left(-\frac{k}{n}\right)}\xi(x)\mathrm{d}P \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_B \xi(x)\mathrm{d}P = \int_B \xi \mathrm{d}P.\end{aligned}$$

这就证明了 $\eta_n = \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n')$. 且有

$$X_{\frac{1}{n}} = \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_{\frac{1}{n}}) = \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_{2^n}') = \eta_{2^n}.$$

例 1.4 设 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 S.B^1.M.O.，令 $\mathscr{G}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqslant t)$，$t \in [0,\infty)$，则

(1) $\{X_t, \mathscr{G}_t^0, t \in [0,\infty)\}$ 是鞅；

(2) $\{X_t^2 - t, \mathscr{G}_t^0, t \in [0,\infty)\}$ 是鞅；

(3) $\{\mathrm{e}^{aX_t - \frac{a^2 t}{2}}, \mathscr{G}_t^0, t \in [0,\infty)\}$ 是鞅.

证 由于 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 具有独立增量，若注意

$$\begin{aligned}&\sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) \\ &\quad = \sigma(X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\end{aligned}$$

对一切 $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ 成立，则可知

$$\text{“}t \geqslant s \Longrightarrow \sigma(X_t - X_s) \text{ 与 } \mathscr{G}_s^0 \text{ 独立”}.$$

所以

(1) $$E(X_t|\mathscr{G}_s^0)=E(X_s|\mathscr{G}_s^0)+E(X_t-X_s|\mathscr{G}_s^0)$$
$$=X_s+E(X_t-X_s)=X_s\quad(s\leqslant t),$$

故$\{X_t,\mathscr{G}_t^0,t\in[0,\infty)\}$是鞅.

(2) $$\begin{aligned}E(X_t^2-t|\mathscr{G}_s^0)&=E((X_s+X_t-X_s)^2|\mathscr{G}_s^0)-t\\&=E(X_s^2|\mathscr{G}_s^0)+2X_sE(X_t-X_s|\mathscr{G}_s^0)\\&\quad+E((X_t-X_s)^2|\mathscr{G}_s^0)-t\\&=X_s^2-2X_sE(X_t-X_s)+E((X_t-X_s)^2)-t\\&=X_s^2-0+(t-s)-t\\&=X_s^2-s\quad(s\leqslant t),\end{aligned}$$

所以$\{X_t^2-t,\mathscr{G}_t^0,t\in[0,\infty)\}$是鞅.

(3) 若$Z\sim N(0,\sigma^2)$,即Z服从期望为0、方差为σ^2的正态分布,则$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}aZ})=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2a^2}{2}}$, $E(e^{az})=\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2a^2}{2}}$,所以由$(X_t-X_s)\sim N(0,t-s)$得

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{aX_t-\frac{a^2t}{2}}|\mathscr{G}_s^0)&=E(\mathrm{e}^{a(X_t-X_s)}\mathrm{e}^{aX_s-\frac{a^2t}{2}}|\mathscr{G}_s^0)\\&=\mathrm{e}^{aX_s-\frac{a^2t}{2}}E(\mathrm{e}^{a(X_t-X_s)}|\mathscr{G}_s^0)\\&=\mathrm{e}^{aX_s-\frac{a^2t}{2}}E(\mathrm{e}^{a(X_t-X_s)})\\&=\mathrm{e}^{aX_s-\frac{a^2t}{2}}\mathrm{e}^{\frac{a^2(t-s)}{2}}=\mathrm{e}^{aX_s-\frac{a^2s}{2}}\quad(s\leqslant t).\end{aligned}$$

所以$\{\mathrm{e}^{X_t-\frac{a^2t}{2}},\mathscr{G}_t^0,t\in[0,\infty)\}$是鞅.

对于(上、下)鞅$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$的"时间"参数集$\mathbf{T}$,我们最感兴趣的是两种特例:(1) $\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots\}$; (2) $\mathbf{T}=[0,\infty)$. 对于特例(1),称X为离散时间(上、下)鞅,对于特例(2),称X为连续时间(上、下)鞅.

命题 1.1 设$\{X_n:n=0,1,\cdots\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$\{\mathscr{F}_n:n=0,1,\cdots\}$适应随机过程,$E(|X_n|)<\infty$, $n=0,1,\cdots$,则$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$是鞅的充要条件是:

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n \quad (n \geqslant 0). \tag{1.6}$$

证 必要性显然成立,现证充分性.设(1.6)式成立,则对任意 $m > 0,\ n \geqslant 0$,有

$$\begin{aligned} E(X_{n+m}|\mathscr{F}_n) &= E(E(X_{n+m}|\mathscr{F}_{n+m-1})|\mathscr{F}_n) \\ &= E(X_{n+m-1}|\mathscr{F}_n) = \cdots \\ &= E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n. \end{aligned}$$

所以 $X = \{X_m, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是鞅.

定义 1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为任一测度空间,$1 \leqslant p < \infty$,记

$$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) = \left\{ f: f \in \mathscr{F}, \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}, \tag{1.7}$$

$L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu) = \{f: f \in \mathscr{F}$,且存在实数 α,使 $|f| \leqslant \alpha$,[a.e.]$\}$.若 $f,g \in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,$\int_\Omega fg\mathrm{d}\mu = 0$,则称 f 与 g **互相垂直**,记作 $f \perp g$;若 $f_n \in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)\ (n \geqslant 0)$,且 $f_n \perp f_m\ (n \neq m)$,则称$\{f_n: n \geqslant 0\}$是正交系.

对 $f \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,记

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}};$$

对 $f \in L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,记 $\| f \|_\infty = \inf\{\alpha: |f| \leqslant \alpha,\ [\text{a.e.}]\}$.

定义 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任一测度空间,Γ是任一指标集合,$1 \leqslant p \leqslant \infty$,对每一个 $t \in \Gamma$,有

$$f_t: \Omega \mapsto \overline{\mathbf{R}}, \quad f_t \in \mathscr{F},$$

称 $f = \{f_t: t \in \Gamma\}$ 在$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上是 $\boldsymbol{L^p}$ **有界的**(简称 L^p 有界的)或 $f \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,如果

$$\sup_{t \in \Gamma} \| f_t \|_p < \infty, \tag{1.8}$$

记 $\| f \|_p = \sup_{t \in \Gamma} \| f_t \|_p$.

定义 1.4 设 $f = \{f_t: t \in \Gamma\}$ 是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上一族 $\mathscr{F}$ 可测函数,如果

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in\Gamma}\int_{\{|f_t|\geq k\}}|f_t|\mathrm{d}u = 0, \tag{1.9}$$

则称$\{f_t:t\in\Gamma\}$在$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上是**一致可积的**,简称一致可积.

下面我们先研究离散时间鞅.

首先研究离散时间鞅$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 0\}$与“鞅差序列”$\{D_n=X_n-X_{n-1},X_{-1}\equiv 0,n\geq 0\}$的关系.

定理1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$D_n\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,$n=0,1,\cdots$.

(1) 若$X_n=\sum_{k=0}^{n}D_k$,$\{\mathscr{F}_n:n\geq 0\}$是$\mathscr{F}$中一族非降子$\sigma$代数族,$D_n\in \mathrm{r}\mathscr{F}_n$,则

$$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 0\}\text{是鞅}\Longleftrightarrow \boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})=0\ (n\geq 1).$$

(2) 若令$\mathscr{F}_n=\sigma(D_0,D_1,\cdots,D_n)$ $(n\geq 0)$,则$\{D_n:n\geq 0\}$是某个鞅差序列,即存在鞅$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 0\}$,使$D_n=X_n-X_{n-1}(n\geq 0,\ X_{-1}\equiv 0)$的充要条件是:

$$\varphi(D_0,D_1,\cdots,D_{n-1})\perp D_n\quad (n\geq 1,\ \varphi\in \mathrm{b}\mathscr{B}^n). \tag{1.10}$$

(3) 若$X_n=\sum_{k=0}^{n}D_k$,$\mathscr{F}_n=\sigma(D_0,D_1,\cdots,D_n)$ $(n\geq 0)$,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 0\}$是$L^2$有界鞅,则$\{D_n:n\geq 0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上正交系,且

$$\varphi(D_0,D_1,\cdots,D_{n-1})\perp D_n\quad (n\geq 1,\ \varphi\in \mathrm{b}\mathscr{B}^n).$$

证 (1) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= \boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})+\boldsymbol{E}(X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})\\ &= \boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})+X_{n-1}\end{aligned}$$

即得.

(2) 必要性.若存在鞅$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 0\}$,使$X_n-X_{n-1}=D_n$ $(n\geq 0,\ X_{-1}\equiv 0)$,则由(1)得$\boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})=0$ $(n\geq 1)$.因此,对任何$\varphi\in \mathrm{b}\mathscr{B}^n$,有

$$
\begin{aligned}
0 &= \boldsymbol{E}(\varphi(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})\boldsymbol{E}(D_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \\
&= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(\varphi(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})D_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \\
&= \boldsymbol{E}(\varphi(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})D_n) \quad (n \geqslant 1).
\end{aligned}
$$

即(1.10)式成立.

充分性.设(1.10)式成立.任取 $B \in \mathscr{F}_{n-1}$, $h = \mathbf{1}_B$,则由Doob复合函数定理,必存在 $\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}^n$,使 $h = \varphi(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})$.所以由(1.10)式得

$$\boldsymbol{E}(hD_n) = 0,$$

亦即 $\int_B D_n \mathrm{d}P = 0\ (B \in \mathscr{F}_{n-1},\ n \geqslant 1)$.所以

$$\boldsymbol{E}(D_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

因此,由(1)得知 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅.

(3) 由(2)得知

$$\varphi(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) \perp D_n \quad (\varphi \in \mathrm{b}\mathscr{B}^n,\ n \geqslant 1).$$

又因为 X 是 L^2 有界的,所以 $D_n = (X_n - X_{n-1}) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$,且对任何 $n < m$,有

$$\boldsymbol{E}(D_n D_m) = \boldsymbol{E}(D_m \boldsymbol{E}(D_n \mid \mathscr{F}_m)) = 0.$$

故(3)得证.

命题 1.2 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots\}$, $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 为鞅(相应地,下鞅),则 $\{X_n + Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 为鞅(相应地,下鞅),$\{X_n \wedge Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 为上鞅.

证明显然.

命题 1.3 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为鞅(相应地,下鞅),f 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数(相应地,非降凸函数),$\boldsymbol{E}(|f(X_n)|) < \infty\ (n \geqslant 0)$,则 $\{f(X_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为下鞅.

证 若 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为鞅,f 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数,则用Jensen不等式得

$$\boldsymbol{E}(f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \geqslant f(\boldsymbol{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)) = f(X_n) \quad (n \geqslant 0),$$

所以$\{f(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅.

若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅,$f$是$\mathbf{R}$上的非降凸函数,由 Jensen 不等式及$f$的非降性得

$$\boldsymbol{E}(f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)\geqslant f(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n))\geqslant f(X_n)\quad(n\geqslant 0),$$

所以$\{f(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅.

命题 1.4 (1) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅(或非负下鞅),

$$\boldsymbol{E}(|X_n|^p)<\infty\quad(n\geqslant 0),$$

则$\{|X_n|^p,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅$(1\leqslant p<\infty)$.

(2) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅,则$\{X_n^+,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$亦然(其中$X_n^+=X_n\vee 0$).

证 (1) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅,由$f(x)=|x|^p(1\leqslant p<\infty)$是$\mathbf{R}$上的凸函数,由命题 1.3 得知$\{|X_n|^p,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅.

若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为非负下鞅,由于$f(x)=x^p(1\leqslant p<\infty)$是$[0,\infty)$上的非降凸函数,仍用命题 1.3 得知$\{X_n^p,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅.

(2) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅,令$f(x)=x^+$,则$f$是$\mathbf{R}$上的非降凸函数,用命题 1.3 得$\{X_n^+=f(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅.

定理 1.2 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的上鞅,则对任何$\lambda>0$, $n\geqslant 0$,有

$$\lambda P(\sup_{k\leqslant n}X_k>\lambda)\leqslant \boldsymbol{E}(X_0)-\int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n}X_k\leqslant\lambda\}}X_n\mathrm{d}P;\quad(1.11)$$

$$\lambda P(\inf_{k\leqslant n}X_k<-\lambda)\leqslant\int_{\{\inf\limits_{k\leqslant n}X_k<-\lambda\}}(-X_n)\mathrm{d}P;\quad(1.12)$$

$$\lambda P(\sup_{k\leqslant n}|X_k|>\lambda)\leqslant \boldsymbol{E}(X_0)+2\boldsymbol{E}(X_n^-),\quad(1.13)$$

其中$X_n^-=(-X_n)\vee 0$.

若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是鞅或非负下鞅,则

$$\lambda P(X_n^* > \lambda) \leqslant \int_{\{X_n^* > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P; \qquad (1.13)'$$

$$\lambda P(X^* > \lambda) \leqslant \sup_{n \geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_n|), \qquad (1.13)''$$

其中，$X_n^* = \sup_{k \leqslant n} |X_k|$；$X^* = \sup_{n \geqslant 0} X_n^*$.

证 令 $A_0 = \{X_0 < -\lambda\}$，$A_k = \{X_0 \geqslant -\lambda, X_1 \geqslant -\lambda, \cdots, X_{k-1} \geqslant -\lambda, X_k < -\lambda\}$ $(k \geqslant 1)$，则 $A_k \in \mathscr{F}_k$ $(k \geqslant 0)$，$\{A_k\}$ 不交. 而由 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是上鞅得 $\boldsymbol{E}(X_n | \mathscr{F}_k) \leqslant X_k$ $(n \geqslant k \geqslant 0)$，所以

$$\int_{A_k} X_n \mathrm{d}P \leqslant \int_{A_k} X_k \mathrm{d}P \quad (n \geqslant k \geqslant 0).$$

因此，

$$\begin{aligned}
\lambda P(\inf_{k \leqslant n} X_k < -\lambda) &= \lambda P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P(A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_{A_k} \lambda \mathrm{d}P \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{A_k} -X_k \mathrm{d}P \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{A_k} -X_n \mathrm{d}P = -\int_{\bigcup_{k=0}^{n} A_k} X_n \mathrm{d}P \\
&= \int_{\{\inf_{k \leqslant n} X_k < -\lambda\}} -X_n \mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

故(1.12)式得证.

下证(1.11)式. 令 $\tau = \inf\{k: k \geqslant 0, X_k > \lambda\} \wedge n$，$\tau_k = \tau \wedge k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$，则 $0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n = \tau$，$0 \leqslant \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant 1$，$\tau_k$ 皆为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时. 所以由第七章命题 3.4 可推出

$$\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{\tau_0} \subset \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \cdots \subset \mathscr{F}_{\tau_n} = \mathscr{F}_\tau,$$

且 $X_{\tau_k} \in \mathscr{F}_{\tau_k}$. 任取 $A \in \mathscr{F}_{\tau_k}$ $(0 \leqslant k < n)$，必有

$$A \cap \{\tau_k = j\} \cap \{\tau_{k+1} > j\} \in \mathscr{F}_j,$$

所以由上鞅性得

$$\int_A (X_{\tau_k} - X_{\tau_{k+1}})\mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{k}\int_{A\cap\{\tau_k=j\}\cap\{\tau_{k+1}>j\}}(X_j - X_{j+1})\mathrm{d}P \geqslant 0.$$

所以,若 $A \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{\tau_k}(k = 0,1,\cdots,n)$,则

$$\int_A (X_0 - X_\tau)\mathrm{d}P = \sum_{k=0}^{n-1}\int_A (X_{\tau_k} - X_{\tau_{k+1}})\mathrm{d}P \geqslant 0,$$

而 $X_0 \in \mathscr{F}_0$,所以

$$X_0 \geqslant E(X_\tau \mid \mathscr{F}_0), \tag{1.11$'$}$$

即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_0) \geqslant \boldsymbol{E}(X_\tau) &= \int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k > \lambda\}} X_\tau \mathrm{d}P + \int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k \leqslant \lambda\}} X_\tau \mathrm{d}P \\ &\geqslant \lambda P(\sup_{k\leqslant n} X_k > \lambda) + \int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k \leqslant \lambda\}} X_n \mathrm{d}P,\end{aligned}$$

此即(1.11)式.

又因为 $\{\sup\limits_{k\leqslant n}|X_k| > \lambda\} \subset \{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k > \lambda\} \cup \{\inf\limits_{k\leqslant n} X_k < -\lambda\}$,

$$\boldsymbol{E}(X_n^-) = \int_{\{X_n<0\}} -X_n \mathrm{d}P \geqslant \int_A -X_n \mathrm{d}P$$

对一切 $A \in \mathscr{F}$ 成立,所以把(1.11)与(1.12)式相加即得(1.13)式.

若 $\{X_n,\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是非负下鞅,则 $\{-X_n,\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是上鞅,故

$$\begin{aligned}\lambda P(X_n^* > \lambda) &= \lambda P(\sup_{k\leqslant n} X_k > \lambda) = \lambda P(\inf_{k\leqslant n}(-X_k) < -\lambda) \\ &\overset{(1.12)}{\leqslant} \int_{\{\inf\limits_{k\leqslant n}(-X_k)<-\lambda\}} -(-X_n)\mathrm{d}P \\ &= \int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P.\end{aligned}$$

(1.13)$'$ 式得证. 由(1.13)$'$ 式对 $n \to \infty$ 取极限可得(1.13)$''$ 式. 若 $\{X_n,\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是鞅,用命题 1.4 亦可证(1.13)$'$、(1.13)$''$ 式成立.

定理 1.3(Колмогорв 不等式) 设 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是

鞅，X_n^*, X^* 定义如前，则

(1) $\lambda^2 P(X_n^* > \lambda) \leqslant \boldsymbol{E}(X_n^2)\ (n \geqslant 0,\ \lambda > 0)$; (1.14)

(2) $\lambda^2 P(X^* > \lambda) \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(X_n^2)\ (\lambda > 0)$. (1.15)

证 (1) 不妨设 $\boldsymbol{E}(X_n^2) < \infty$，否则，(1.14) 式显然成立. 由于 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是鞅，所以

$$X_k^2 = [\boldsymbol{E}(X_n \mid \mathscr{F}_k)]^2 \quad (k \leqslant n).$$

再用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_k^2) &= \boldsymbol{E}([\boldsymbol{E}(X_n \mid \mathscr{F}_k)]^2) \leqslant \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X_n^2 \mid \mathscr{F}_k)) \\ &= \boldsymbol{E}(X_n^2) < \infty \quad (k \leqslant n).\end{aligned}$$

所以由命题 1.3 知 $\{-X_k^2, \mathscr{F}_k, k = 0,1,\cdots,n\}$ 为上鞅，对此上鞅及 λ^2 用 (1.11) 式（即在 (1.12) 式中以 $-X_k^2$ 代 X_k）得

$$\begin{aligned}\lambda^2 P(X_n^* > \lambda) &= \lambda^2 P\Big(\bigcup_{k\leqslant n} \{|X_k| > \lambda\}\Big) \\ &= \lambda^2 P\Big(\bigcup_{k\leqslant n} \{-X_k^2 < -\lambda^2\}\Big) \\ &= \lambda^2 P\big(\inf_{k\leqslant n}(-X_k^2) < -\lambda^2\big) \\ &\leqslant \int_{\{\inf\limits_{k\leqslant n}(-X_k^2) < -\lambda^2\}} -(-X_n^2)\mathrm{d}P \\ &\leqslant \boldsymbol{E}(X_n^2).\end{aligned}$$

即 (1.14) 式成立.

(2) 在 (1.14) 式中令 $n \to \infty$ 取上极限即得 (1.15) 式.

定理 1.4（Doob 不等式） 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为鞅或非负下鞅，X_n^*, X^* 如前，则

(1) $\boldsymbol{E}(X^*) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\big(1 + \sup\limits_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_n| \log^+ |X_n|)\big)$; (1.16)

(2) $\|X^*\|_p \leqslant q \|X\|_p \left(p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$, (1.17)

其中 $\|X^*\|_p = \left(\int_\Omega |X^*|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}}$（未必小于 ∞），

$$\| X \|_p = \sup_{n\geqslant 0} \| X_n \|_p = \sup_{n\geqslant 0}\left(\int_\Omega |X_n|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}} (\text{未必小于 } \infty),$$

$$f^+ = f \vee 0.$$

证 (1) 任取 $n \geqslant 0$, $\lambda > 0$,令 $F_n(\lambda) = P(X_n^* > \lambda)$. 由(1.11)式得

$$F_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{X_n^* > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P. \tag{1.18}$$

设 $\Psi(\lambda)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的非降右连续函数且 $\Psi(0) = 0$,则由 F_n 的定义并用分部积分公式及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\Psi(X_n^*)) &= -\int_{(0,\infty)} \Psi(\lambda)\mathrm{d}F_n(\lambda) \\
&= \int_{(0,\infty)} F_n(\lambda)\mathrm{d}\Psi(\lambda) - (\Psi(\infty)F_n(\infty) \\
&\quad - \Psi(0)F_n(0)) \\
&\leqslant \int_{(0,\infty)} F_n(\lambda)\mathrm{d}\Psi(\lambda) \\
&\overset{(1.18)}{\leqslant} \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{\lambda}\int_{\{X_n^* > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P\right)\mathrm{d}\Psi(\lambda) \\
&= \boldsymbol{E}\left(|X_n| \int_{(0,X_n^*)} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\Psi(\lambda)\right).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

在(1.19)式中取 $\Psi(\lambda) = (\lambda - 1)^+$,若注意 $\Psi(\lambda)$ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度在$(-\infty, 1]$之测度为 0,则得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}((X_n^* - 1)) &\leqslant \boldsymbol{E}((X_n^* - 1)^+) \\
&\overset{(1.19)}{\leqslant} \boldsymbol{E}(|X_n| \int_{(0,X_n^*)} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\Psi(\lambda); X_n^* \leqslant 1) \\
&\quad + \boldsymbol{E}(|X_n| \int_{(0,X_n^*)} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\Psi(\lambda); X_n^* > 1) \\
&= 0 + \boldsymbol{E}\left(|X_n| \int_{(1,X_n^*)} \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\lambda; X_n^* > 1\right) \\
&= \boldsymbol{E}(|X_n| \log X_n^*; X_n^* > 1)
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E}(|X_n|\log^+ X_n^*). \tag{1.20}$$

由于 $\log x \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$ $(x \geqslant 0)$,故对任意 $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$,有

$$a\ \log^+ b \leqslant a\ \log^+ a + \frac{b}{\mathrm{e}}, \tag{1.21}$$

从而

$$\boldsymbol{E}(|X_n|\log^+ X_n^*) \leqslant \boldsymbol{E}(|X_n|\log^+ |X_n|) + \frac{1}{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}(X_n^*).$$

代入(1.20)式得

$$\boldsymbol{E}(X_n^*) \leqslant 1 + \boldsymbol{E}(|X_n|\log^+ |X_n|) + \frac{1}{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}(X_n^*),$$

即

$$\boldsymbol{E}(X_n^*) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1 + \boldsymbol{E}(|X_n|\log^+ |X_n|)).$$

但 $X_n^* \uparrow X^*$ $(n \uparrow \infty)$,所以在上式中令 $n \to \infty$ 并应用 Fatou 引理可得(1.16)式.

(2) 在(1.19)式中取 $\Psi(\lambda) = \lambda^p$,则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}((X_n^*)^p) &\leqslant \boldsymbol{E}\left(|X_n|\int_{(0,X_n^*)} p \cdot \lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda\right)\\ &= \frac{p}{p-1}\boldsymbol{E}(|X_n|(X_n^*)^{p-1})\\ &= q\boldsymbol{E}(|X_n|(X_n^*)^{p-1}).\end{aligned}$$

再用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}((X_n^*)^p) &\leqslant q(\boldsymbol{E}(|X_n|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \boldsymbol{E}((X_n^*)^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}})\\ &= q(\boldsymbol{E}(|X_n|^p)^{\frac{1}{p}}\boldsymbol{E}((X_n^*)^p)^{\frac{1}{q}}).\end{aligned} \tag{1.22}$$

为证(1.17)式,不妨设 $\|X\|_p < \infty$.于是

$$\|X_n^*\|_p \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{n}|X_k|\right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n}\|X_k\|_p < \infty. \tag{1.23}$$

若 $\|X_n^*\|_p \equiv 0$ (一切 $n \geqslant 0$),则由 $X_n^* \uparrow X^*$ 得 $\|X^*\|_p = 0$,

从而(1.17)式成立. 若存在一个 $n_0 \geqslant 0$, 使 $\| X_{n_0}^* \|_p > 0$, 则 $\| X_n^* \|_p > 0$ (对一切 $n \geqslant n_0$). 所以由(1.23)式知 $\| X_n^* \|_p$ 是正实数($n \geqslant n_0$), 故在(1.22)式两边除以 $E((X_n^*)^p)^{\frac{1}{q}} = \| X_n^* \|_p^{\frac{p}{q}}$ 可得

$$\| X_n^* \|_p \leqslant q \| X_n \|_p .$$

而 $X_n^* \uparrow X^*$, 所以在上式中令 $n \to \infty$ 取极限即得(1.17)式.

下面我们研究鞅收敛定理. 为此先给出两个引理.

引理1.1(上穿不等式)　设 $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots)$ 为广义实数列, a, b 为二实数, $a < b$. 令 $u_0(x) = 1$,

$$u_{n+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_n > b, \\ u_n(x), & \text{若 } x_n \in [a, b], \quad (n \geqslant 0), \\ 0, & \text{若 } x_n < a \end{cases} \tag{1.24}$$

$g_n^{(a,b)}(x)$ 是"上穿函数", 即

$$g_n^{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & (x_0, x_1, x_2, \cdots) \text{ 在时刻 } n \text{ 上穿}[a, b), \\ 0, & \text{反之} \end{cases} \quad (n \geqslant 0). \tag{1.25}$$

所谓$(x_0, x_1, x_2, \cdots)$在时刻 n 上穿$[a, b]$, 或 x_n 上穿$[a, b]$, 即是 $x_n > b$, 且存在 $m > 0$, 使 $x_{n-m} < a$, $x_k \in [a, b]$ $(n > k > n - m)$. 显然 $g_0^{(a,b)}(x) = 0$. 再令

$$U_n^{(a,b)}(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(a,b)}(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k^{(a,b)}(x) \tag{1.26}$$

为 x 到时刻 n 为止上穿$[a, b]$的次数, 亦即 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上穿$[a, b]$的次数, 则

$$(b - a) U_n^{(a,b)}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - a)(u_{k+1}(x) - u_k(x)) \quad (n \geqslant 1). \tag{1.27}$$

证 由(1.24)、(1.25)式有

$$\text{“}g_k^{(a,b)}(x)=1 \Longrightarrow x_k=b,\text{存在 } m>0,\text{使 } x_{k-m}<a,\text{且 } x_j\in[a,b]\ (k>j>k-m)$$
$$\Longrightarrow u_{k+1}(x)=1,\ u_k(x)=u_{k-1}(x)=\cdots=u_{k-m+1}(x)=0$$
$$\Longrightarrow u_{k+1}(x)-u_k(x)=1\text{”}.$$

所以

$$U_n^{(a,b)}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}(x)-u_k(x))^-. \tag{1.28}$$

但是,由 u_k 的定义有

$$\text{“}u_{k+1}(x)-u_k(x)>0\Longrightarrow x_k>b\text{”};$$
$$\text{“}u_{k+1}(x)-u_k(x)<0\Longrightarrow x_k<a\text{”}.$$

所以

$$(b-a)(u_{k+1}(x)-u_k(x))^+\leqslant(x_k-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x)),$$

代入(1.28)式即得(1.27)式.

引理 1.2(Doob 下鞅上穿不等式) 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0\}$为下鞅.记 $X=(X_0,X_1,X_2,\cdots)$.定义 $u_k(X),g_n^{(a,b)}(X),U_n^{(a,b)}(X)$ 如引理 1.1.令

$$U^{(a,b)}(X)=\lim_{n\to\infty}U_n^{(a,b)}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(a,b)}(X)$$

是 X 上穿$[a,b]$的总次数,则

$$\boldsymbol{E}(U_n^{(a,b)})\leqslant\frac{\boldsymbol{E}(|X_n|)+|a|}{b-a}; \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{E}(U^{(a,b)}(X))\leqslant\frac{\sup_{n\geqslant0}\boldsymbol{E}(|X_n|)+|a|}{b-a}. \tag{1.30}$$

证 由 $u_k(X)$ 的定义知 $u_k(X)$ 仅依赖于 $X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}$,且 $u_k(X)\in\mathscr{F}_{k-1}(k\geqslant1)$.因此由下鞅的定义知

$$
\begin{aligned}
E(u_k(X)(X_k-a)) &= E(E(u_k(X)(X_k-a)|\mathscr{F}_{k-1})) \\
&= E(u_k(X)E(X_k-a|\mathscr{F}_{k-1})) \\
&\geqslant E(u_k(X)(X_{k-1}-a)) \quad (k\geqslant 1)
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

再用引理 1.1 及(1.31)式得

$$
\begin{aligned}
&(b-a)E(U_n^{(a,b)}(X)) \\
&\leqslant E\Big(\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)(u_{k+1}(X)-u_k(X))\Big) \\
&\overset{(1.31)}{\leqslant} E\Big(\sum_{k=1}^{n}((X_k-a)u_{k+1}(X)-(X_{k-1}-a)u_k(X))\Big) \\
&= E((X_n-a)u_{n+1}(X)-(X_0-a)u_1(X)) \\
&\leqslant E((X_n-a)u_{n+1}(X))
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

(因为 $u_1(X)\geqslant 0$, 而且“$u_1(X)=0 \Longleftrightarrow X_0<a$”). 再注意 $|u_{n+1}(X)|\leqslant 1$,由(1.32)式得

$$(b-a)E(U_n^{(a,b)}(X))\leqslant E(|X_n|)+|a|.$$

即(1.29)式成立. 由(1.29)式即得(1.30)式.

定理 1.5(Doob 收敛定理) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的下鞅或上鞅, $\|X\|_1=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|X_n\|_1=\sup\limits_{n\geqslant 0}E(|X_n|)<\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty,\ [\text{a.e.}]; \tag{1.33}$$

$$E(|X_\infty|)\leqslant\|X\|_1<\infty. \tag{1.34}$$

若 X 是反下鞅或反上鞅,(1.33)、(1.34)式亦成立.

证 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是下鞅. 令 $U^{(a,b)}(X)$ 的定义如引理 1.2. 则有

$$E(U^{(a,b)}(X))\leqslant\frac{\|X\|_1+|a|}{b-a}<\infty,$$

从而

$$0=P(U^{(a,b)}(X)=\infty)$$

$$\geqslant P(\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n). \tag{1.35}$$

令 Q 为有理数集，则

$$\begin{aligned}&\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ 不存在}\}^{①}\\ &\quad\subset \{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\}\\ &\quad\subset \bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in Q}} \{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

由(1.35)、(1.36)式得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \ [\text{a.e.}].$$

再用 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|X_\infty|) &= \boldsymbol{E}(\lim_{n\to\infty}|X_n|) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(|X_n|)\\ &\leqslant \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_n|) = \|X\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是反下鞅，令 $Y^{(k)} = \{Y_n^{(k)}, \mathscr{F}_n^{(k)}, n \geqslant 0\}$，$Y_n^{(k)} = X_{(k-n)\vee 0}$，$\mathscr{F}_n^{(k)} = \mathscr{F}_{(k-n)\vee 0}$，则 $Y^{(k)}$ 是下鞅. 由引理 1.2 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(U^{(a,b)}(Y^{(k)})) &\leqslant \frac{\sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|Y_n^{(k)}|) + |a|}{b-a}\\ &\leqslant \frac{\|X\|_1 |a|}{b-a}.\end{aligned}$$

所以若令

$$V^{(a,b)}(X) = \lim_{k\to\infty} U^{(a,b)}(Y^{(k)}),$$

则由积分单调收敛定理得 $\boldsymbol{E}(V^{(a,b)}(X)) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{E}U^{(a,b)}(Y^{(k)}) < \infty$. 而

$$\{\liminf_{k\to\infty} X_k < a < b < \limsup_{k\to\infty} X_k\} \subset \{V^{(a,b)}(X) = \infty\},$$

所以

---

① 此处及今后，当 $\lim_{n\to\infty} X_n$ 存在(收敛)时，它可以为 $\pm\infty$. 若 $\lim_{n\to\infty} X_n$ 收敛且为有穷，则"有穷"二字要强调.

$$P(\liminf_{k\to\infty} X_k < a < b < \limsup_{k\to\infty} X_k) = 0.$$

因此仿前可证

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X_\infty, \text{[a.e.]}, \quad \boldsymbol{E}(|X_\infty|) \leqslant \|X\|_1 < \infty.$$

引理1.3 设 ξ_n 和 ξ 皆为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，$\boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty$, $\boldsymbol{E}(|\xi_n|) < \infty$ $(n \geqslant 0)$，则

"$\xi_n \to \xi$, $[L^1] \Longleftrightarrow \xi_n \to \xi$, $[P.]$ 且 $\{\xi_n\}$ 一致可积"，

其中 $\xi_n \to \xi$, $[P.]$，即 $\lim_{n\to\infty} P(|\xi - \xi_n| \geqslant \varepsilon) = 0$.

证 设 $\xi_n \to \xi$, $[L^1]$，则 $\boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty$. 对任何 $A \in \mathscr{F}$，有

$$\boldsymbol{E}(|\xi_n|;A) \leqslant \boldsymbol{E}(|\xi_n - \xi|) + \boldsymbol{E}(|\xi|;A). \tag{1.37}$$

任给 $\varepsilon > 0$，由 $\xi_n \to \xi$, $[L^1]$，可选取 N，使

$$\text{“}n > N \Longrightarrow \boldsymbol{E}(|\xi_n - \xi|) < \frac{\varepsilon}{2}\text{”}. \tag{1.38}$$

由 $\boldsymbol{E}(|\xi_n|) < \infty$, $\boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty$ 可选取 $\delta > 0$，使得对一切 $n \leqslant N$，当 $P(A) < \delta$ 时，有

$$\boldsymbol{E}(|\xi_n|;A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \boldsymbol{E}(|\xi|;A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.39}$$

由(1.37),(1.38),(1.39)式得

$$\boldsymbol{E}(|\xi_n|;A) \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant 0,\ P(A) \leqslant \delta). \tag{1.40}$$

又由 $\xi_n \to \xi$, $[L^1]$，可知 $\boldsymbol{E}(|\xi_n|) \to \boldsymbol{E}(|\xi|)$，所以存在实数 a，使

$$a = \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|\xi_n|) \geqslant \boldsymbol{E}(|\xi|).$$

取 $K = \frac{a}{\delta}$, $A = \{|\xi_n| \geqslant K\}$，则有

$$P(A) = P(|\xi_n| \geqslant K) \leqslant \frac{1}{K}\boldsymbol{E}(|\xi_n|)$$

$$\leqslant \frac{a}{K} = \delta \quad (n \geqslant 0). \tag{1.41}$$

因此，由(1.40)及(1.41)式得

$$\boldsymbol{E}(|\xi_n|;\{|\xi_n| \geqslant K\}) \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant 0),$$

从而

$$\sup_{n\geqslant 0}\int_{\{|\xi_n|\geqslant K\}}|\xi_n|\mathrm{d}P\leqslant\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 可任意小得知 $\{\xi_n\}$ 是一致可积的. 而“$\xi_n\to\xi,\ [L^1]\Longrightarrow\xi_n\to\xi,\ [P.]$”.

设 $\{\xi_n\}$ 一致可积，且 $\xi_n\to\xi,\ [P.]$. 由 $\xi\to\xi,\ [P.]$，及 Fatou 引理得

$$\boldsymbol{E}(|\xi|)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(|\xi_n|)\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(|\xi_n|).$$

由 $\{\xi_n\}$ 一致可积得

$$\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(|\xi_n|)<\infty.$$

所以 $\boldsymbol{E}(|\xi_n|)<\infty$. 再用 $|\xi_n|$ 一致可积得 $|\xi_n-\xi|$ 亦一致可积. 所以，任给 $\varepsilon>0$，存在 K，使

$$\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|;\{|\xi_n-\xi|\geqslant K\})\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\tag{1.42}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2K}>0$，由 $\xi_n\to\xi,[P.]$，得知存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)<\delta\quad(n\geqslant N).\tag{1.43}$$

由(1.42)、(1.43)式得知当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|)\\
&=\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|;\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}\cap\\
&\quad\{|\xi_n-\xi|<K\})+\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|;\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}\cap\\
&\quad\{|\xi_n-\xi|\geqslant K\})+\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|;\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\})\\
&\leqslant KP(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)+\boldsymbol{E}(|\xi_n-\xi|;\{|\xi_n-\xi|\geqslant K\})+\varepsilon\\
&\leqslant K\delta+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=2\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $\xi_n\to\xi,\ [L^1]$.

定理 1.6　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的鞅(相应地，为上鞅)，$\{X_n\}$ 一致可积，则存在随机变量 X_∞，

$E(|X_\infty|) < \infty$,使

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \text{[a.e.]}, [L^1]. \tag{1.44}$$

且对一切 $n \geqslant 0$,有

$$E(|X_\infty| \mathscr{F}_n) = X_n \quad (\text{相应地}, \leqslant X_n). \tag{1.45}$$

若 X 为反上鞅,$\{X_n\}$ 一致可积,则(1.44)式亦成立.

证 由于$\{X_n\}$是一致可积鞅,所以

$$\sup_{n\geqslant 0} E(|X_n|) < \infty,$$

由定理1.5,存在随机变量 X_∞,使

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \text{[a.e.]},$$

$$E(|X_\infty|) < \infty.$$

再用引理1.3得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, [L^1].$$

最后,推证(1.45)式成立.由于 $X_n \in \mathscr{F}_n$,只需证明

$$E(X_n; \Lambda_n) = E(X_\infty; \Lambda_n) \quad (\Lambda_n \in \mathscr{F}_n). \tag{1.46}$$

事实上,任取 $\Lambda_n \in \mathscr{F}_n$,有

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\Lambda_n} X_{m+n} = \mathbf{1}_{\Lambda_n} X_\infty, [L^1],$$

$$\lim_{m\to\infty} E(\mathbf{1}_{\Lambda_n} X_{m+n}) = E(\mathbf{1}_{\Lambda_n} X_\infty).$$

但是

$$E(\mathbf{1}_{\Lambda_n} X_{m+n}) = E(X_n \mathbf{1}_{\Lambda_n}),$$

在上式中令 $m \to \infty$ 得

$$E(\mathbf{1}_{\Lambda_n} X_\infty) = E(\mathbf{1}_{\Lambda_n} X_n).$$

即(1.46)式成立.

若 X 是一致可积的反上鞅,由定理1.5及引理1.3得知(1.43)式仍然成立.定理证毕.

关于连续时间参数的鞅,亦有类似定理1.2、定理1.6的结果.

设 $x:[0,\infty) \mapsto [-\infty,\infty]$, $A = \{t_1,\cdots,t_n\} \subset [0,\infty)$,将 A

中元素依大小顺序排列：$t_{k_1} < t_{k_2} < \cdots < t_{k_n}$. 令 $U_A^{(a,b)}(x)$ 为 $x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_k)$ 上穿 $[a,b]$ 的次数（定义见(1.26)式）. 对 $[0,\infty)$ 中任一子集 B，定义

$$U_B^{(a,b)}(x) = \sup_{\substack{A \subset B \\ A\text{为有限集}}} U_A^{(a,b)}(x).$$

若 $B = \{t_1, t_2, \cdots\}$ 为可数集，$A_n = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，则显然有

$$U_B^{(a,b)}(x) = \lim_{n\to\infty} U_{A_n}^{(a,b)}(x).$$

定理 1.2′ 设 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的下鞅，D 为 $[0,\infty)$ 上任一可数稠子集，则对任何 $r < s$ $(r, s \in [0,\infty))$，$a < b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ 及 $\lambda > 0$，有

$$(1) \quad \lambda P\Big(\sup_{t \in D \cap [r,s]} |X_t| > \lambda\Big) \leqslant -\boldsymbol{E}(X_r) + 2\boldsymbol{E}(X_s^+); \tag{1.47}$$

$$(2) \quad \boldsymbol{E}\big(U_{D\cap[r,s]}^{(a,b)}(X)\big) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(|X_s|) + |a|}{-a+b}. \tag{1.48}$$

若 $\{X_t\}$ 的几乎所有的轨道右连续，则(1.47)、(1.48)式中的 $D \cap [r,s]$ 可以代之以 $[r,s]$.

证 设 $D \cap [r,s] = \{t_0, t_1, \cdots\}$，令 $A_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$，而 $\{-X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$ 为上鞅，则由(1.13)式得

$$\begin{aligned}\lambda P\Big(\sup_{k\leqslant n} |X_{t_k}| > \lambda\Big) &\leqslant \boldsymbol{E}(-X_{t_0}) + 2\boldsymbol{E}((-X_{t_n})^-) \\ &= -\boldsymbol{E}(X_{t_0}) + 2\boldsymbol{E}(X_{t_n}^+), \\ &\leqslant -\boldsymbol{E}(X_r) + 2\boldsymbol{E}(X_s^+) \\ &\quad (\text{因 } r \leqslant t_0 \leqslant t_n \leqslant s).\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即得(1.47)式.

仿之可证(1.48)式，只不过在使用(1.13)式的地方将其改用(1.29)式罢了.

定理的最后一个论断是明显的.

定理 1.3′（Колмогоров 不等式） 设 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的鞅，对 [a.e.] 的 ω，$X(\cdot, \omega)$ 右连续，

$X^* = \sup_{t \in [0,\infty)} |X_t|$,则

$$\lambda^2 P(X^* > \lambda) \leqslant \sup_{t \in [0,\infty]} \boldsymbol{E}(X_t^2) \quad (\lambda > 0). \tag{1.49}$$

定理 1.4′(Doob 不等式) 设$\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的鞅或非负下鞅,对[a.e.]的$\omega$, $X(\cdot,\omega)$右连续,$X^* = \sup_{t \in [0,\infty]} |X_t|$,则

(1) $$\boldsymbol{E}(X^*) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 + \sup_{t \in [0,\infty)} \boldsymbol{E}(|X_t| \log^+ |X_t|)\right), \tag{1.50}$$

(2) $$\| X^* \|_p \leqslant q \| X \|_p = q \sup_{t \in [0,\infty)} \| X_t \|_p \quad \left(p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{1.51}$$

定理 1.5′(Doob 收敛定理) 设$X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$为概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的下鞅或上鞅,$\| X \|_1 \equiv \sup_{t \in [0,\infty)} \boldsymbol{E}(|X_t|) < \infty$,对[a.e.]的$\omega$,$X(\cdot,\omega)$右连续,则存在随机变量$X_\infty$,使

$$\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty, \quad [\text{a.e.}] \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{E}(|X_\infty|) \leqslant \| X \|_1 < \infty. \tag{1.53}$$

定理 1.6′ 设$X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty)\}$为概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的鞅(相应地,上鞅),$\{X_t\}$一致可积,对[a.e.]的$\omega$,$X(\cdot,\omega)$右连续,则存在随机变量$X_\infty$,$\boldsymbol{E}(|X_\infty|) < \infty$,使

$$\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty, \ [\text{a.e.}],\ [L^1], \tag{1.54}$$

且对一切$t \in [0,\infty)$,有

$$\boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_t) = X_t, \ (\text{相应地}, \leqslant X_t). \tag{1.55}$$

§2 上鞅的 Riesz 分解及轨道的正则性

与§1类似,我们先研究离散时间上鞅的 Riesz 分解.

定义 2.1 称非负上鞅$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$为**位势**,如果

$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(Z_n)=0$,即

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=0,\ [L^1].$$

称上鞅$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$有**Riesz分解**,如果存在鞅$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$及位势$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$,使

$$X_n=Y_n+Z_n\quad(n\geqslant 0).$$

定理2.1 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为上鞅,则

(1) 若它有Riesz分解,则其分解必唯一(在[a.e.]的意义下);

(2) 它有Riesz分解的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n)>-\infty;\tag{2.1}$$

(3) 若$X_n\geqslant 0$, $n\geqslant 0$ (这时(2.1)式自然成立,从而它有Riesz分解),$X_n=Y_n+Z_n$为其Riesz分解,则$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是非负鞅;

(4) 若$\{X_n:n\geqslant 0\}$一致可积,则存在X_∞,使$X_n\to X_\infty$, $[L^1]$,令$Y_n=\boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$, $n\geqslant 0$, $Z_n=X_n-Y_n$,则$X_n=Y_n+Z_n$为它的Riesz分解.

证 (1) 设$X_n=Y_n+Z_n=Y_n'+Z_n'$有二组Riesz分解,即$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$, $\{Y_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是鞅, $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$, $\{Z_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是位势,则$\{Y_n-Y_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是鞅,而且

$$(Y_n-Y_n')=(Z_n'-Z_n)\to 0,\ [L^1]\quad(n\to\infty),$$

所以,由引理1.3,$\{Y_n-Y_n':n\geqslant 0\}$一致可积,再用(1.45)式知对一切$n\geqslant 0$,有

$$0=\boldsymbol{E}(0|\mathscr{F}_n)=Y_n-Y_n'=Z_n'-Z_n,\ [\text{a.e.}].$$

(1)得证.

(2) 必要性.设$X_n=Y_n+Z_n$是Riesz分解,由$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是位势得$Z_n\to 0$, $[L^1]$,即$\boldsymbol{E}(Z_n)\to 0$.由$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是鞅得$\boldsymbol{E}(Y_n)\equiv c$ (不依赖$n\geqslant 0$),所以

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(Y_n) = c > -\infty.$$

充分性. 设(2.1)式成立. 对任何非负整数 n 和 p, 令

$$Y_{n,p-1} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X_{n+p+1} | \mathscr{F}_{n+\nu}) | \mathscr{F}_n). \tag{2.2}$$

则由 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是上鞅得知

$$Y_{n,p+1} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X_{n+p+1} | \mathscr{F}_{n+p}) | \mathscr{F}_n) \leqslant \boldsymbol{E}(X_{n+p} | \mathscr{F}_n) = Y_{n,p},$$

即对任意固定的 n, $\{Y_{n,p}: p \geqslant 0\}$ 对 p 单调非升, 故可再令

$$Y_n = \lim_{p\to\infty} Y_{n,p}; \tag{2.3}$$

$$Y_n \in \mathscr{F}_n.$$

由(2.1)、(2.2)式有

$$\lim_{P\to\infty} \boldsymbol{E}(Y_{n,p}) = \lim_{P\to\infty} \boldsymbol{E}(X_{n+p}) > -\infty. \tag{2.4}$$

又

$$-Y_{n,p} = \boldsymbol{E}(-X_{n+p} | \mathscr{F}_n) \geqslant -X_n,$$

$$-Y_{n,p+1} \geqslant -Y_{n,p},$$

$$\boldsymbol{E}(|X_n|) < \infty,$$

所以由(2.3)式及单调收敛定理得

$$\lim_{p\to\infty} \boldsymbol{E}(Y_{n,p}) = \boldsymbol{E}(Y_n). \tag{2.5}$$

显然,

$$\boldsymbol{E}(Y_n) \leqslant \boldsymbol{E}(Y_{n,p}) = \boldsymbol{E}(X_{n+p}) < \infty, \tag{2.6}$$

由(2.4),(2.5),(2.6)式

$$-\infty < \boldsymbol{E}(Y_n) < \infty \quad (n \geqslant 0).$$

而由 $Y_n \leqslant Y_{n,p}$ 及(2.5)式得知当 $p \to \infty$ 时有

$$\boldsymbol{E}(|Y_{n,p} - Y_n|) = \boldsymbol{E}(Y_{n,p}) - \boldsymbol{E}(Y_n) \to 0, \tag{2.7}$$

即

$$\lim_{p\to\infty} Y_{n,p} = Y_n, \ [L^1] \quad (\text{对一切 } n \geqslant 0). \tag{2.8}$$

故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(Y_{n+1} | \mathscr{F}_n) &= \lim_{p\to\infty} \boldsymbol{E}(Y_{n+1,p} | \mathscr{F}_n) = \lim_{p\to\infty} \boldsymbol{E}(X_{n+1+p} | \mathscr{F}_n) \\ &= \lim_{p\to\infty} Y_{n,p+1} = Y_n, \end{aligned}$$

所以 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅. 令 $Z_n = X_n - Y_n$, 由(2.2)式及 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是上鞅得

$$Y_{n,p} = \boldsymbol{E}(X_{n+p}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n \quad (p\geqslant 0),$$

所以

$$Y_n\leqslant X_n \quad (n\geqslant 0).$$

由 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是上鞅, $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅, $Y_n\leqslant X_n$ 得知 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是非负上鞅,此外还有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(Z_n) &\xlongequal{(2.8)} \lim_{p\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n - Y_{n,p})\\ &\xlongequal{(2.4)} \lim_{p\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n - X_{n+p})\\ &= \boldsymbol{E}(X_n) - \lim_{p\to\infty}\boldsymbol{E}(X_p).\end{aligned}$$

再令 $n\to\infty$,即得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(Z_n) = 0,$$

故 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是位势,即 $X_n = Y_n + Z_n(n\geqslant 0)$ 是一组 Riesz 分解.

(3) 若 $X_n\geqslant 0$,在(2)的证明中所定义的 $Y_n\geqslant 0$.

(4) 若 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 一致可积,则由定理 1.6 得知存在 X_∞, $\boldsymbol{E}(|X_\infty|)<\infty$,使

$$\lim_{n\to\infty}X_n = X_\infty,\ [\text{a.e.}],\ [L^1].$$

$$\boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n \quad (n\geqslant 0).$$

若令 $Y_n = \boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$, $Z_n = X_n - Y_n$,则由例 1.1 知 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅,再利用 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是上鞅可知 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是上鞅. 显然 $Z_n\geqslant 0\ (n\geqslant 0)$. 又因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(Z_n) &= \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n) - \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(Y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n) - \boldsymbol{E}(X_\infty) = 0,\end{aligned}$$

所以 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是位势. 故 $X_n = Y_n + Z_n$ 是一组 Riesz 分解.

定义 2.1′ 若 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty]\}$ 为非负上鞅,其几乎所有

的轨道 $Z(\cdot,\omega)$ 是右连续的,如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{E}(Z_t)=0$,则称 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 是**位势**. 设 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 是上鞅,其几乎所有的轨道右连续. 如果存在鞅 $\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 和位势 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$,使 $X_t=Y_t+Z_t$, $t\in[0,\infty)$,则称 $X_t=Y_t+Z_t$ 为其一组 **Riesz 分解**.

定理 2.1′ 设 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 是上鞅,其几乎所有的轨道右连续,则

(1) 若 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in(0,\infty)\}$ 有 Riesz 分解,则 Riesz 分解必唯一(在[a.e.]的意义下);

(2) 若 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续,即 $\mathscr{F}_t\equiv\mathscr{F}_{t+}$,则 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 有 Riesz 分解的充要条件是:

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{E}(X_t)>-\infty;$$

(3) 若 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续,$X_t\geqslant 0$(由(2),必有 Riesz 分解),$X_t=Y_t+Z_t$ 为其 Riesz 分解,则 $\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 为非负鞅;

(4) 若 $\{X_t,t\in[0,\infty)\}$ 一致可积,则必有随机变量 X_∞, $\boldsymbol{E}(|X_\infty|)<\infty$,使

$$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty,\ [L^1]$$

及几乎所有的轨道右连续的鞅 $\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$, $Y_t=\boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_t)$, [a.e.],令 $Z_t=X_t-Y_t$,则 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 为位势,而 $X_t=Y_t+Z_t$ 是其一组 Riesz 分解.

证明仿定理 2.1,留给读者作为习题.

下面我们介绍上鞅轨道的正则性定理.

定理 2.2 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的上鞅或下鞅,D 为 $[0,\infty)$ 中的可数稠子集,则

(1) 对几乎所有的 ω 及一切 $t\in[0,\infty)$ (相应地,对一切 $t\in(0,\infty)$),极限

$$\lim_{\substack{s\in D\\ s\downarrow t}}X_s(\omega)\quad(\text{相应地},\lim_{\substack{s\in D\\ s\uparrow t}}X_s(\omega))$$

存在且有穷;

(2) 若对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 右连续,则对几乎所有的 ω,对一切 $t\in(0,\infty)$,极限

$$X_{t-}(\omega)=\lim_{\substack{s\in[0,\infty)\\ s\uparrow t}}X_s(\omega)$$

存在且有穷.

证 不失普遍性可设 X 为下鞅.

(1) 任取 $t\in[0,\infty)$, $a<b$, $a,b\in\mathbf{R}$,令 $U_B^{(a,b)}(X)$ 如定理 1.2′ 前所定义,

$$\Omega_u^{(a,b)}=\{\omega:\omega\in\Omega,\sup_{v\in D\cap[0,u]}|X_v(\omega)|=\infty$$

$$\text{或 } U_{D\cap[0,u]}^{(a,b)}(X(\cdot,\omega))=\infty\},$$

则显然 $\Omega_u^{(a,b)}\in\mathscr{F}_u$,且由定理 1.2′ 得知 $P(\Omega_u^{(a,b)})=0$ ($u\in[0,\infty)$). 再令

$$\Omega_u=\bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in Q}}\Omega_u^{(a,b)},\quad \Omega^*=\bigcup_{u\in[0,\infty)}\Omega_u,$$

其中 Q 为有理数集,由 $\Omega_v\subset\Omega_u$, $\Omega_v\in\mathscr{F}$, $P(\Omega_v)=0$ ($0\leqslant v\leqslant u<\infty$) 得知

$$\Omega^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\in\mathscr{F},\quad P(\Omega^*)=0.$$

而由 Ω^* 的定义得知,当 $\omega\overline{\in}\Omega^*$ 时,对任何 $u\in[0,\infty)$,

$$\sup_{s\in D\cap[0,u]}|X_s(\omega)|<\infty,\quad U_{D\cap[0,u]}^{(a,b)}(X(\cdot,\omega))<\infty.$$

由后一不等式,仿定理 1.5 可证 $\lim\limits_{\substack{s\in D\\ s\downarrow t}}X_s(\omega)$ 存在,由前一不等式知上述极限有穷.

(2) 若对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 右连续,则在(1) 的证明中可用$[0,t]$代 $D\cap[0,t]$ (这时,虽然 $\Omega_u^{(a,b)}$ 未必属于 $\mathscr{F}_u$,但仍有 $\Omega_u^{(a,b)}$ 含于某个P零测集内,从而 Ω^* 亦含于某个 P 零测集内),当 $\omega\overline{\in}\Omega^*$ 时,对一切 $t\in(0,\infty)$,有

$$\lim_{\substack{s\in[0,\infty)\\ s\uparrow t}}X_s(\omega)$$

存在且有穷.

§3 鞅的 Doob 停时理论

先从离散时间鞅讨论起,设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots,\infty\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的鞅,τ 为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时. 令

$$X_n^\tau = X_{\tau\wedge n}; \tag{3.1}$$

$$X^\tau = \{X_n^\tau,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}, \tag{3.2}$$

X^τ(X^τ 称为 X 的 τ 前过程)是否为鞅?若 τ_k 是 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时,$\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\cdots$,$\mathscr{F}_{\tau_k}$ 是τ_k 前σ代数(见第七章定义3.3),$\{X_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n=0,1,\cdots\}$ 是否为鞅?回答都是肯定的.

定理3.1 若 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$ 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的鞅(相应地,上鞅),τ 为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时,则 X^τ 是鞅(相应地,上鞅),且 $\boldsymbol{E}(X_0)=\boldsymbol{E}(X_{\tau\wedge n})=\boldsymbol{E}(X_n)$(相应地,$\boldsymbol{E}(X_0)\geqslant\boldsymbol{E}(X_{\tau\wedge n})\geqslant\boldsymbol{E}(X_n)$),$n\geqslant 0$.

若 X 是L^1 有界的鞅或非负下鞅,则

$$\|X_\tau\|_1\leqslant\|X^\tau\|_1\leqslant\|X\|_1 \tag{3.3}$$

(X_∞ 定义为 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$).

若 X 是一致可积的鞅(相应地,上鞅),则 X_τ 亦然.

证 令 $D_n=X_n-X_{n-1}$($n\geqslant 0$, $X_{-1}\equiv 0$),因 X 是鞅,τ 是 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时,故

$$\mathbf{1}_{\{\tau\geqslant n\}}\in\mathscr{F}_{n-1},\ \boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})=0\ (n\geqslant 1), \tag{3.4}$$

但是

$$\begin{aligned}X_{n\wedge\tau}&=\sum_{k=0}^n X_k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}+X_n\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}\\&=\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^k D_j\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}+\sum_{j=0}^n D_j\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} D_j \mathbf{1}_{\{n \geqslant \tau \geqslant j\}} + \sum_{j=0}^{n} D_j \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant j\}} D_j. \tag{3.5}$$

由(3.5)式得 $\boldsymbol{E}(|X_{n\wedge\tau}|) < \infty$,且

$$\boldsymbol{E}(X_n) - \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}) \overset{(3.5)}{=\!=\!=} \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{\{\tau<j\}} D_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{\{\tau<j\}} D_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{\{\tau<j\}} \boldsymbol{E}(D_j \mid \mathscr{F}_{j-1})) \overset{(3.4)}{=\!=\!=} 0.$$

显然 $\boldsymbol{E}(X_0) = \boldsymbol{E}(X_n)$.

下面证明 X^τ 是鞅,任取 $B \in \mathscr{F}_n, \Lambda \in \mathscr{B}^1$,有

$$\{X_{n\wedge\tau} \in \Lambda\} = \{X_n \in \Lambda : \tau \geqslant n\} \cup$$
$$\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} \{X_j \in \Lambda : \tau = j\}\right) \in \mathscr{F}_n \quad (n \geqslant 0).$$

$$\int_B X_{n\wedge\tau} \mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{B\cap\{\tau=j\}} X_j \mathrm{d}P + \int_{B\cap\{\tau\geqslant n\}} X_n \mathrm{d}P.$$

但是由 X 是鞅,$B \cap \{\tau > n\} \in \mathscr{F}_n$,得

$$\int_{B\cap\{\tau>n\}} X_n \mathrm{d}P = \int_{B\cap\{\tau>n\}} X_{n+1} \mathrm{d}P,$$

代入上式得

$$\int_B X_{n\wedge\tau} \mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{n} \int_{B\cap\{\tau=j\}} X_j \mathrm{d}P + \int_{B\cap\{\tau>n\}} X_{n+1} \mathrm{d}P$$
$$= \int_B X_{(n+1)\wedge\tau} \mathrm{d}P \quad (n \geqslant 0).$$

所以 X^τ 是鞅.

若 X 是 L^1 有界鞅或非负下鞅,由于

$$X_\tau = \lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} \quad (\text{因 } X_\infty \equiv \lim_{n\to\infty} X_n),$$

所以由 Fatou 引理得

$$\|X_\tau\|_1 \equiv E(|X_\tau|) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(|X_{\tau\wedge n}|)$$
$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} E(|X_{\tau\wedge n}|) \equiv \|X^\tau\|_1.$$

但是$|X| = \{|X_n|, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$是非负下鞅,$\{\tau = k\} \in \mathscr{F}_k$,所以,当$k < n$时,有

$$\int_{\{\tau=k\}} |X_k| \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{\tau=k\}} |X_n| \mathrm{d}P.$$

因此

$$E(|X_{\tau\wedge n}|) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{\tau=k\}} |X_k| \mathrm{d}P + \int_{\{\tau\geqslant n\}} |X_n| \mathrm{d}P$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{\tau=k\}} |X_n| \mathrm{d}P + \int_{\{\tau\geqslant n\}} |X_n| \mathrm{d}P$$
$$= E(|X_n|) \quad (n \geqslant 0).$$

所以

$$\|X^\tau\|_1 \equiv \sup_{n\geqslant 0} E(|X_{\tau\wedge n}| \leqslant \sup_{n\geqslant 0} E(|X_n|) \equiv \|X\|_1.$$

若X是一致可积鞅,如前所证,X^τ必为鞅,且$\|X_\tau\|_1 < \infty$(因为X一致可积蕴含了X是L^1有界的).推证$\{X_{n\wedge\tau}: n \geqslant 0\}$是$L^1$收敛,果能如此,用引理1.3得知$\{X_{n\wedge\tau}: n \geqslant 0\}$必为一致可积的.

事实上,当$m < n$时,有

$$\|X_{n\wedge\tau} - X_{m\wedge\tau}\|_1$$
$$\leqslant \int_{\{\tau<m\}} |X_\tau - X_\tau| \mathrm{d}P + \int_{\{m\leqslant\tau<n\}} |X_\tau - X_m| \mathrm{d}P$$
$$+ \int_{\{\tau\geqslant n\}} |X_n - X_m| \mathrm{d}P$$
$$\leqslant \int_{\{m\leqslant\tau<\infty\}} |X_\tau - X_m| \mathrm{d}P + \int_{\{\tau\geqslant n\}} |X_n - X_m| \mathrm{d}P.$$

但X是一致可积鞅,由定理1.6,有

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \ [L^1], [\mathrm{a.e.}];$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{\{\tau\geqslant n\}}|X_n - X_m|\mathrm{d}P = 0.$$

令 $Y_m = \mathbf{1}_{\{m\leqslant\tau<\infty\}}|X_\tau - X_m|$,则由

$$\lim_{n\to\infty}X_n = X_\infty, [\text{a.e.}].$$

得

$$\lim_{n\to\infty}Y_m = 0, [\text{a.e.}]$$

但是 X_τ 可积,$\{X_n:n\geqslant 0\}$ 一致可积,所以 $\{Y_n:n\geqslant 0\}$ 是一致可积的.因此,由引理 1.3 得

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\{m\leqslant\tau<\infty\}}|X_\tau - X_m|\mathrm{d}P = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega Y_m\mathrm{d}P$$
$$= \int_\Omega(\lim_{m\to\infty}Y_m)\mathrm{d}P = 0.$$

故 $\lim_{m,n\to\infty}\|X_{n\wedge\tau} - X_{m\wedge\tau}\|_1 = 0$,即 $\{X_{n\wedge\tau}:n\geqslant 0\}$,当 $n\to\infty$ 时,$[L^1]$ 收敛,定理证毕.

定理 3.2 设 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n,n = 0,1,2,\cdots,\infty\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的鞅(相应地,上鞅),τ 和 η 皆为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时,$\tau\leqslant\eta$,则 $\boldsymbol{E}(|X_\tau|)<\infty$, $\boldsymbol{E}(|X_\eta|)<\infty$,且

$$\boldsymbol{E}(X_\eta|\mathscr{F}_\tau) = X_\tau\ (\text{相应地},\leqslant X_\tau). \tag{3.6}$$

证 设 X 为鞅,令 $\tau_n = \tau\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant n\}} + \infty\cdot\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}(n\geqslant 0)$,推证:

$$X_{\tau_n} = \boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_{\tau_n})\quad(n\geqslant 0). \tag{3.7}$$

显然 $X_{\tau_n}\in\mathscr{F}_{\tau_n}$,任取 $A\in\mathscr{F}_{\tau_n}$,有

$$\int_A X_{\tau_n}\mathrm{d}P = \sum_{k=0}^n\int_{A\cap\{\tau_n=k\}}X_k\mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau_n=\infty\}}X_\infty\mathrm{d}P,$$

而 X 是鞅,$A\cap\{\tau_n = k\}\in\mathscr{F}_k$,所以

$$\int_{A\cap\{\tau_n=k\}}X_k\mathrm{d}P = \int_{A\cap\{\tau_n=k\}}X_\infty\mathrm{d}P\quad(0\leqslant k\leqslant n),$$

从而

$$\int_A X_{\tau_n} \mathrm{d}P = \int_A X_\infty \mathrm{d}P,$$

即(3.7)式成立. 任取 Ω 上的集合系 $\mathscr{G}$ 及 Ω 的子集 A, 记 $A \cap \mathscr{G} = \{B: B = A \cap D,\ D \in \mathscr{G}\}$, 则

$$\{\tau = \tau_n\} \cap \mathscr{F}_\tau = \{\tau = \tau_n\} \cap \mathscr{F}_{\tau_n} \tag{3.8}$$

(事实上, 任取 $A \in \mathscr{F}_\tau$, 则 $\{\tau = \tau_n\} \cap A \cap \{\tau_n \leqslant k\} = \{\tau = \tau_n\} \cap (A \cap \{\tau \leqslant k\}) \in \{\tau = \tau_n\} \cap \mathscr{F}_k$, 即(3.8)式的左边含于右边, 仿之可证右边含于左边). 若注意 $\tau_n \geqslant \tau$, 从而 $\mathscr{F}_{\tau_n} \supset \mathscr{F}_\tau$, $\{\tau = \tau_n\} \in \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau_n}$, 由(3.8)式得 $\mathscr{F} \supset \{\tau = \tau_n\} \cap \mathscr{F}_\tau = \{\tau = \tau_n\} \cap \mathscr{F}_{\tau_n}$. 再用条件期望性质 6 及(3.7)式得

$$\boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau = \tau_n\}} = X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau = \tau_n\}}. \tag{3.9}$$

由于 $\{\tau = \tau_n\} \uparrow \Omega$, 所以在(3.9)式中令 $n \to \infty$, 得

$$\boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_\tau) = X_\tau. \tag{3.10}$$

故 $\boldsymbol{E}(|X_\tau|) < \infty$. 仿可证 $\boldsymbol{E}(|X_\eta|) < \infty$,

$$\boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_\eta) = X_\eta. \tag{3.11}$$

所以

$$\boldsymbol{E}(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_\eta) | \mathscr{F}_\tau) = \boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_\tau) = X_\tau. \tag{3.12}$$

设 X 为上鞅. 令 $Y_n = \boldsymbol{E}(X_\infty | \mathscr{F}_n)$, $Z_n = X_n - Y_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$, $Y_\infty = X_\infty$, $Z_\infty = 0$, 则 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots, \infty\}$ 为鞅, $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n = 0, 1, \cdots, \infty\}$ 为非负上鞅, 仿(1.11)′式可证 $\boldsymbol{E}(Z_{\tau_n}) \leqslant \boldsymbol{E}(Z_0)$. 故由 Fatou 引理可知 $\boldsymbol{E}(Z_\tau) < \infty$, 从而 $X_\tau = Y_\tau + Z_\tau$ 的期望存在, 仿之 $\boldsymbol{E}(|X_\eta|) < \infty$. 再令

$$\eta_n = \eta \mathbf{1}_{\{\eta \leqslant n\}} + \infty \mathbf{1}_{\{\eta > n\}},$$

仿(3.7)式可证

$$Z_{\tau_n} \geqslant \boldsymbol{E}(Z_{\eta_n} | \mathscr{F}_{\tau_n}) \quad (n \geqslant 0). \tag{3.13}$$

从而

$$Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau=\tau_n\}} \geqslant \boldsymbol{E}(Z_{\eta_n} | \mathscr{F}_{\tau_n})\mathbf{1}_{\{\tau=\tau_n\}} = \boldsymbol{E}(Z_{\eta_n} | \mathscr{F}_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau=\tau_n\}}.$$

在上式中令 $n\uparrow\infty$,并注意 $Z_{\eta_n}\uparrow Z_\eta$, $\{\tau=\tau_n\}\uparrow\Omega$,可得

$$Z_\tau \geqslant \boldsymbol{E}(Z_\eta | \mathscr{F}_\tau). \tag{3.14}$$

但以 Y 取代 X,且由(3.12)式有

$$\boldsymbol{E}(Y_\eta | \mathscr{F}) = Y_\tau. \tag{3.12$'$}$$

由(3.14)、(3.12)$'$ 式得 $X_\tau \geqslant \boldsymbol{E}(X_\eta | \mathscr{F}_\tau)$. 定理证毕.

定理 3.3 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,2,\cdots,\infty\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的鞅(相应地,上鞅),$\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_\infty$ 均为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时,且 $\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots\leqslant\tau_\infty$, $\tau_i:\Omega\mapsto\{0,1,2,\cdots,\infty\}(i=0,1,2,\cdots,\infty)$,则

$$\{X_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n=0,1,\cdots,\infty\}$$

是鞅(相应地,上鞅).

证 由定理 3.2 有

$$\boldsymbol{E}(|X_{\tau_n}|)<\infty \quad (n=0,1,\cdots,\infty);$$

$$\boldsymbol{E}(X_{\tau_{n+m}} | \mathscr{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}\ (\text{对应地} \leqslant X_{\tau_n})\ (n,m=0,1,\cdots,\infty).$$

故 $\{X_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n=0,1,2,\cdots,\infty\}$ 是鞅(相应地,上鞅).

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为任一测度空间,$A,B\in\mathscr{F}$. 当 $\mu(A-B)=0$ 时,记 $A\subset B$, [a.e.];当 $\mu(A\Delta B)=0$ 时,记 $A=B$, [a.e.]. 有时记"$A\subset B$, [a.e.]"为"A [a.e.] in B".

定理 3.4 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的鞅,$D_n=X_n-X_{n-1}(n\geqslant 0,\ X_{-1}\equiv 0)$, $D^*=\sup\limits_{n\geqslant 0}|D_n|$, $\boldsymbol{E}(D^*)<\infty$, 则下列三集合的概率相等

(i) $A_1=\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)$ 收敛且有穷$\}$;

(ii) $A_2=\{\omega:\sup\limits_{n\geqslant 0}X_n(\omega)<\infty\}$;

(iii) $A_3=\{\omega:\inf\limits_{n\geqslant 0}X_n(\omega)>-\infty\}$.

证 因为“$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)$ 收敛且有穷 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-X_n(\omega))$ 收敛且有穷”，所以“$A_1 = A_2$, [a.e.] $\Longleftrightarrow A_1 = A_3$, [a.e.]”. 又因为

$$A_1 \subset A_2,$$

所以为证定理 3.4，只需证明 $A_2 \subset A_1$, [a.e.].

令 $\lambda > 0$, $\tau = \tau(\lambda) = \inf\{n : n \geqslant 0, X_n > \lambda\}$ (空集的 inf 定义为 ∞)，则由定理 3.1 得知 $X^{\tau(\lambda)}$ 是鞅. 若能证 $X^{\tau(\lambda)}$ 是 L^1 有界的，即

$$\| X^\tau \|_1 = \sup_{n\geqslant 0} \| X_n^\tau \|_1 = \sup_{n\geqslant 0} \| X_{n\wedge\tau} \|_1 < \infty,$$

则由定理1.5得知，对[a.e.]的 ω, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n^{\tau(\lambda)}(\omega)$ 收敛且有穷. 但是若令 $A_2(\lambda) = \{\omega : \sup\limits_{n\geqslant 0} X_n(\omega) < \lambda\}$，则由 $X_n^\tau = X_{n\wedge\tau}$ 得知

$$A_2(\lambda) \subset \{\tau(\lambda) = \infty\} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \{X_n^{\tau(\lambda)} = X_n\}.$$

所以

$$\begin{aligned} A_2(\lambda) &\subset A_2(\lambda) \cap \{\lim_{n\to\infty} X_n^{\tau(\lambda)} \text{ 收敛且有穷}\} \\ &\subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \{X_n^{\tau(\lambda)} = X_n\} \cap \{\lim_{n\to\infty} X_n^{\tau(\lambda)} \text{ 收敛且有穷}\} \\ &\subset A_1, [\text{a.e.}] \quad (\text{对一切 } \lambda > 0), \end{aligned}$$

从而 $A_2 \subset A_1$, [a.e.].

下面补证 $X^{\tau(\lambda)}$ 是 L^1 有界的. 因为

$$X_{n\wedge\tau} = X_n^\tau = \begin{cases} X_n \leqslant \lambda, & \text{当 } n < \tau, \\ X_\tau = X_{\tau-1} + D_\tau \leqslant \lambda + D^*, & \text{当 } n \geqslant \tau, \end{cases}$$

所以 $X_{n\wedge\tau} \leqslant \lambda + D^*$，从而

$$\boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^+) \leqslant \boldsymbol{E}((\lambda + D^*) \vee 0) = \lambda + \boldsymbol{E}(D^*).$$

但是，由定理 3.1 有

$$\boldsymbol{E}(X_0) = \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}) = \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^+) - \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^-),$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(|X_{n\wedge\tau}|) &= \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^+) + \boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^-) = 2\boldsymbol{E}(X_{n\wedge\tau}^+) - \boldsymbol{E}(X_0) \\ &\leqslant 2(\lambda + \boldsymbol{E}(D^*)) - \boldsymbol{E}(X_0), \end{aligned}$$

从而 $\|X^\tau\|_1 = \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_{n\wedge\tau}|) < \infty$.

命题 3.1 设 ξ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上任一随机变量，$\boldsymbol{E}(|\xi|)<\infty$，则 Ω 上的函数族

$$\{\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{G}):\mathscr{G}\text{ 是 }\mathscr{F}\text{ 中任意子 }\sigma\text{ 代数}\}$$

是一致可积的.

证 不失普遍性可设 $\xi\geqslant 0$. 令 $F(\mathscr{G})=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{G})$，则由 Чебшев 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_{\{F(\mathscr{G})>K\}} F(\mathscr{G})\mathrm{d}P &= \int_{\{F(\mathscr{G})>K\}}\xi\mathrm{d}P \\
&= \int_{\{F(\mathscr{G})>K\}\cap\{\xi\leqslant J\}}\xi\mathrm{d}P + \int_{\{F(\mathscr{G})>K\}\cap\{\xi>J\}}\xi\mathrm{d}P \\
&\leqslant JP(F(\mathscr{G})>K) + \int_{\{\xi>J\}}\xi\mathrm{d}P \\
&\leqslant \frac{J}{K}\boldsymbol{E}(F(\mathscr{G})) + \int_{\{\xi>J\}}\xi\mathrm{d}P \\
&= \frac{J}{K}\boldsymbol{E}(\xi) + \int_{\{\xi>J\}}\xi\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}}\int_{\{F(\mathscr{G})>K\}}F(\mathscr{G})\mathrm{d}P \leqslant \lim_{J\to\infty}\int_{\{\xi>J\}}\xi\mathrm{d}P = 0,$$

即$\{\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{G}):\mathscr{G}\subset\mathscr{F}, \mathscr{G}\text{ 是 }\sigma\text{ 代数}\}$是一致可积的.

命题 3.2 设$\{X_n:n\geqslant 0\}$，$\{Y_n:n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上两族随机变量，$\{Y_n:n\geqslant 0\}$是一致可积的，$\boldsymbol{E}(|X_n|)<\infty$ $(n\geqslant 0)$.

(1) 若 $X_n\geqslant Y_n$，[a.e.] $(n\geqslant 0)$，则

$$\boldsymbol{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n).$$

(2) 若 $X_n\leqslant Y_n$，[a.e.] $(n\geqslant 0)$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_n) \leqslant \boldsymbol{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

证 令 $X_n^a = X_n \vee a$ (a 是实数)，则由 Fatou 引理有

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leqslant E(\liminf_{n\to\infty} X_n^a) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(X_n^a). \quad (3.15)$$

但是

$$E(X_n^a - X_n) = \int_{\{X_n < a\}} (a - X_n) \mathrm{d}P,$$

且 $a < 0$ 时,由 $X_n \geqslant Y_n$,有

$$\left| \int_{\{X_n < a\}} a \mathrm{d}P \right| \leqslant \int_{\{X_n < a\}} |X_n| \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{Y_n < a\}} |Y_n| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_{\{|Y_n| > |a|\}} |Y_n| \mathrm{d}P;$$

$$\left| \int_{\{X_n < a\}} X_n \mathrm{d}P \right| \leqslant \int_{\{X_n < a\}} |X_n| \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{|Y_n| > |a|\}} |Y_n| \mathrm{d}P.$$

而 $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ 是一致可积的,所以对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $A > 0$,使 $|a| > A$ 时,有

$$\int_{\{|Y_n| > |a|\}} |Y_n| \mathrm{d}P < \frac{\varepsilon}{2} \quad (对一切\ n \geqslant 0).$$

所以"$a < -A \Longrightarrow |E(X_n^a - X_n)| < \varepsilon$ (对一切 $n \geqslant 0$)".

$$\liminf_{n\to\infty} E(X_n^a) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(X_n) + \varepsilon \quad (a < -A), \quad (3.16)$$

由 $\varepsilon < 0$ 可任意小及(3.15)、(3.16) 式得

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(X_n).$$

仿之可证

$$\limsup_{n\to\infty} E(X_n) \leqslant E(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

命题3.3　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0, -1, -2, \cdots\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的上鞅. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = \sup\limits_{n\leqslant 0} E(X_n) = A < \infty$,则 $\{X_n : n = 0, -1, -2, \cdots\}$ 是一致可积的.

证　设 X 为上鞅,则 $\{Y_n = X_n - E(X_0 | \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n = 0, -1, -2, \cdots\}$ 为非负上鞅,而由命题3.1得知 $\{E(X_0 | \mathscr{F}_n) : n = 0, -1, -2, \cdots\}$ 是一致可积的,所以为证 $\{X_n : n = 0, -1, -2, \cdots\}$

一致可积,只需证$\{Y_n : n = 0, -1, -2, \cdots\}$一致可积,由

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(X_n) = \sup_{n\leqslant 0} \boldsymbol{E}(X_n) = A < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(Y_n) = \sup_{n\leqslant 0} \boldsymbol{E}(Y_n) = A - \boldsymbol{E}(X_0) \equiv B < \infty.$$

所以任给$\varepsilon > 0$,可取自然数K,使

$$B - \boldsymbol{E}(Y_{-K}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

对$c > 0$及$n < -K$,由上鞅性得

$$\begin{aligned}\int_{\{Y_n > c\}} Y_n \mathrm{d}P &= \boldsymbol{E}(Y_n) - \int_{\{Y_n \leqslant c\}} Y_n \mathrm{d}P \\ &\leqslant \boldsymbol{E}(Y_n) - \int_{\{Y_n \leqslant c\}} Y_{-K} \mathrm{d}P \\ &= \boldsymbol{E}(Y_n) - \boldsymbol{E}(Y_{-K}) + \int_{\{Y_n > c\}} Y_{-K} \mathrm{d}P, \end{aligned} \tag{3.18}$$

由于$B \geqslant \boldsymbol{E}(Y_n) \geqslant \boldsymbol{E}(Y_{-K})$ $(n < -K)$,所以由(3.17)式得

$$\boldsymbol{E}(Y_n) - \boldsymbol{E}(Y_{-K}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n < -K). \tag{3.19}$$

又因为

$$P(Y_n > c) \leqslant \frac{1}{c}\boldsymbol{E}(Y_n) \leqslant \frac{B}{c} \quad (n \leqslant 0), \tag{3.20}$$

从而当c充分大时,有

$$\int_{\{Y_n > c\}} Y_{-K} \mathrm{d}P < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant 0). \tag{3.21}$$

由(3.18),(3.19),(3.21)式得

$$\sup_{n<-K} \int_{\{Y_n > c\}} Y_n \mathrm{d}P < \varepsilon \quad (c \text{ 充分大})$$

而$0, -1, -2, \cdots, -K$只有有限个数,所以,可取c充分大,使

$$\sup_{n\geqslant 0} \int_{\{Y_n > c\}} Y_n \mathrm{d}P < \varepsilon.$$

故$\{Y_n : n = 0, -1, -2, \cdots\}$是一致可积的.

下面我们研究连续时间参数的鞅的Doob停时理论.

定理3.5 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty]\}$ 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的上鞅(鞅),其所有的轨道 $X(\cdot,\omega)$ 右连续,τ,η 皆为$\{\mathscr{F}_t\}$停时,$\tau\leqslant\eta$,则 $\boldsymbol{E}(|X_\tau|)<\infty$, $\boldsymbol{E}(|X_\eta|)<\infty$,且

$$\boldsymbol{E}(X_\eta|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\boldsymbol{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\tau)=X_\tau, \tag{3.22}$$

$$(\boldsymbol{E}(X_\eta|\mathscr{F}_\tau)=\boldsymbol{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\tau)=X_\tau).$$

证 由于 $X(\cdot,\omega)$ 右连续,所以$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\mathbf{T}=[0,\infty])$是取值于$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$的循序可测的适应函数,因此,由第七章命题3.6有 $X_\tau\in\mathscr{F}_\tau$,从而 $\boldsymbol{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\tau)=X_\tau$.

因 X 是上鞅,推证(3.22)式,令

$$\mathbf{T}_n=\left\{0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\cdots,\infty\right\}\quad(n\geqslant 0),$$

则$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}_n\}$是上鞅,再令

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{k}{2^n}\right\}}+\infty\cdot\mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}, \tag{3.23}$$

η_n 之定义仿(3.23)式,则 τ_n,η_n 皆为$\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}_n\}$停时,且 $\tau_n\downarrow\tau$, $\eta_n\downarrow\eta$.所以由定理3.2得知

$$\boldsymbol{E}(X_{\eta_n}|\mathscr{F}_{\tau_n})\leqslant X_{\tau_n}; \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{E}(|X_{\tau_n}|)<\infty,\ \boldsymbol{E}(|X_{\eta_n}|)<\infty\quad(n\geqslant 0).$$

由第七章命题3.4有 $\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$ $(n\geqslant 0)$,所以由(3.24)式得知

$$\int_A X_{\eta_n}\,\mathrm{d}P\leqslant\int_A X_{\tau_n}\,\mathrm{d}P\quad(A\in\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}). \tag{3.25}$$

而由 $X(\cdot,\omega)$ 右连续及 $\tau_n\downarrow\tau$, $\eta_n\downarrow\eta$ 得

$$\lim_{n\to\infty}X_{\eta_n}=X_\eta,\quad\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_\tau, \tag{3.26}$$

若能证$\{X_{\eta_n}:n=0,1,2,\cdots\}$,$\{X_{\tau_n}:n=0,1,2,\cdots\}$,皆一致可积,则由引理1.3得知

$$\lim_{n\to\infty}X_{\eta_n}=X_\eta,\ [L^1];\quad\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_\tau,\ [L^1],$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_A X_{\eta_n} = \mathbf{1}_A X_\eta, \ [L^1] \ (A \in \mathscr{F}_\tau);$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_A X_{\tau_n} = \mathbf{1}_A X_\tau, \ [L^1] \ (A \in \mathscr{F}_\tau).$$

且有

$$\begin{aligned} \int_A X_\eta \mathrm{d}P &= \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X_\eta) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X_{\eta_n}) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X_{\tau_n}) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X_\tau) \\ &= \int_A X_\tau \mathrm{d}P \quad (A \in \mathscr{F}_\tau) \end{aligned} \tag{3.27}$$

由 $X_\tau \in \mathscr{F}_\tau$ 及(3.27)式即得(3.22)式.

下面补证 $\{X_{\tau_n}: n = 0,1,2,\cdots\}$ 一致可积($\{X_{\eta_n}: n = 0,1,2,\cdots\}$ 类似). 由于 τ_n 与 τ_{n+1} 皆在 $\mathbf{T}_{n+1}$ 中取值, 且 $\tau_n \geqslant \tau_{n+1}$, 所以由定理 3.2 得

$$\boldsymbol{E}(X_{\tau_n} | \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}) \leqslant X_{\tau_{n+1}} \quad (n \geqslant 0).$$

令

$$Y_{-n} = X_{\tau_n}, \ \mathscr{G}_{-n} = \mathscr{F}_{\tau_n} \quad (n \geqslant 0),$$

则 $\{Y_{-n}, \mathscr{G}_{-n}, n = 0,1,2,\cdots\}$ 是上鞅. 又因为 $\boldsymbol{E}(Y_{-n}) = \boldsymbol{E}(X_{\tau_n}) \leqslant \boldsymbol{E}(X_0)$ $(n \geqslant 0)$, 所以由命题 3.3 得知 $\{Y_{-n} = X_{\tau_n}: n = 0,1,2,\cdots\}$ 是一致可积的, 定理证毕.

定理 3.6 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty]\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的上鞅(鞅), 其所有的轨道 $X(\cdot, \omega)$ 右连续, τ_s 皆为 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时, 且当 $s_1 < s_2$, $s_1, s_2 \in [0,\infty]$ 时, 有 $\tau_{s_2} \geqslant \tau_{s_1}$, 则 $\{X_{\tau_t}, \mathscr{F}_{\tau_t}, t \in [0,\infty]\}$ 是上鞅(鞅).

证 由定理 3.5 即得定理 3.6.

定理 3.7 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in [0,\infty]\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的鞅(上鞅), 其所有的轨道 $X(\cdot, \omega)$ 右连续, 且 $\{X_t: t \in$

$[0,\infty)\}$ 一致可积，τ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ 停时，则 $X^{\tau}=\{X_{t\wedge\tau},\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty)\}$ 是鞅(上鞅).

证 设 X 是鞅. 令 $\mathbf{T}_n=\left\{0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\cdots,\infty\right\}$，$\tau_n$ 如(3.23)式所定义($n\geqslant 0$)，则 $\tau_n\downarrow\tau$，且 $\tau_n:\Omega\mapsto\mathbf{T}_n$，

$$\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}=\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{k}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{k/2^n},$$

所以 τ_n 是 $\{\mathscr{F}_t:t\in\mathbf{T}_n\}$ 停时. 显然 τ_n 亦可视为 $\{\mathscr{F}_t:t\in[0,\infty)\}$ 停时，再用 $\tau_n\downarrow\tau$，$X(\cdot,\omega)$ 右连续知 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_{\tau}$. 所以

$$\begin{aligned}\{X_{\tau\wedge t}<\lambda\}&=\{X_t<\lambda,\ \tau\geqslant t\}\cup\{X_{\tau}<\lambda,\ \tau<t\}\\&=\{X_t<\lambda,\ \tau\geqslant t\}\cup\\&\quad\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty}\left\{X_{\tau_j}<\lambda-\frac{1}{m},\ \tau_j<t\right\}\right)\\&=\{X_t<\lambda,\tau\geqslant t\}\cup\\&\quad\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\bigcap_{\frac{k}{2^j}<t}\left\{X_{k/2^j}<\lambda-\frac{1}{m},\ \tau_j=\frac{k}{2^j}\right\}\right)\\&\in\mathscr{F}_t\quad(t\in[0,\infty)).\end{aligned}$$

由 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 是一致可积鞅、所有轨道右连续及定理1.6′得知：存在随机量 X_∞，$\boldsymbol{E}(|X_\infty|)<\infty$，使

$$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty,\ [\text{a.e.}],\ [L^1],\tag{3.28}$$

且 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in[0,\infty]\}$ 是鞅，在定理3.5中取 $\eta\equiv\infty$，$\tau=\tau_n\wedge t$，得

$$\boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_{\tau_n\wedge t})=X_{\tau_n\wedge t}.$$

再用命题3.1得知 $\{X_{\tau_n\wedge t}:t\in[0,\infty],\ n\geqslant 0\}$ 是一致可积的. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{\tau_n\wedge t}=X_{\tau\wedge t}$ 及引理1.3得知

$$\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n\wedge t}=X_{\tau\wedge t},\ [L^1].\tag{3.29}$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A X_{\tau_n\wedge t}\mathrm{d}P = \int_A X_{\tau\wedge t}\mathrm{d}P \ (t\in[0,\infty],\ A\in\mathscr{F}). \tag{3.30}$$

由(3.29)及(3.30)式,为证 X^τ 是鞅,只需证明

$$\int_A X_{\tau_n\wedge s}\mathrm{d}P = \int_A X_{\tau_n\wedge t}\mathrm{d}P \quad (A\in\mathscr{F}_s,\ s<t,\ n\geqslant 0). \tag{3.31}$$

今任取 $A\in\mathscr{F}_s$, $s<t$, $n\geqslant 0$,由 X 是鞅得

$$\begin{aligned}
\int_A X_{\tau_n\wedge s}\mathrm{d}P &= \int_{A\cap\{\tau_n<s\}} X_{\tau_n}\mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau_n\geqslant s\}} X_s\mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap\{\tau_n<s\}} X_{\tau_n}\mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\tau_n\geqslant s\}} X_t\mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap\{\tau_n<s\}} X_{\tau_n}\mathrm{d}P + \sum_{t>\frac{k}{2^n}\geqslant s}\int_{A\cap\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}} X_t\mathrm{d}P \\
&\quad + \sum_{\frac{k}{2^n}\geqslant t}\int_{A\cap\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}} X_t\mathrm{d}P \\
&= \int_{A\cap\{\tau_n<t\}} X_{\tau_n}\mathrm{d}P + \sum_{t>\frac{k}{2^n}\geqslant s}\int_{A\cap\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}} (X_t - X_{\tau_n})\mathrm{d}P \\
&\quad + \int_{A\cap\{\tau_n\geqslant t\}} X_t\mathrm{d}P \\
&= \int_{A\{\tau_n\geqslant t\}} X_t\mathrm{d}P + \sum_{t>\frac{k}{2^n}\geqslant s}\int_{A\cap\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}} (X_t - X_{k/2^n})\mathrm{d}P.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

由 X 是鞅,$A\in\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_{k/2^n}\left(s\leqslant\dfrac{k}{2^n}\text{时}\right)$, $\left\{\tau_n=\dfrac{k}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{k/2^n}$,可得 $t>\dfrac{k}{2^n}\geqslant s$ 时,$A\cap\left\{\tau_n=\dfrac{k}{2^n}\right\}\in\mathscr{F}_{k/2^n}$,从而

$$\int_{A\cap\left\{\tau_n=\frac{k}{2^n}\right\}}(X_t - X_{k/2^n})\mathrm{d}P = 0. \tag{3.33}$$

由(3.32)、(3.33)得(3.31)式.定理证毕.

§4　鞅　变　换

定义4.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$\{\mathscr{F}_n:n=-1,0,1,2,\cdots\}$为$\mathscr{F}$中的一个非降子$\sigma$代数族,若

$$V_n:\Omega\mapsto\mathbf{R},\ V_n\in\mathscr{F}_{n-1}\ (n=0,1,\cdots),\qquad(4.1)$$

则称$V=\{V_n:n\geqslant 0\}$为$\{\mathscr{F}_n\}$**可预报序列**;若$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为下鞅(或上鞅),$D_n=X_n-X_{n-1}(n\geqslant 0,\ X_{-1}\equiv 0)$,$V$为$\{\mathscr{F}_n\}$可预报序列,则称

$$Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}\ \left(Y_n=\sum_{k=0}^{n}V_kD_k,\ n\geqslant 0\right)\qquad(4.2)$$

为**X的关于可预报序列V的变换**.

例4.1　设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$为鞅,$\tau$为$\{\mathscr{F}_n\}$停时,$\tau:\Omega\mapsto\{0,1,2,\cdots,\infty\}$.令

$$V_n=\mathbf{1}_{\{\tau\geqslant n\}}\ (n\geqslant 0),$$

$$\mathscr{F}_{-1}=\{\varnothing,\Omega\},\ D_n=X_n-X_{n-1}\ (n\geqslant 0,\ X_{-1}\equiv 0),$$

则$V=\{V_n:n\geqslant 0\}$为$\{\mathscr{F}_n\}$可预报序列,

$$Y_n=\sum_{k=0}^{n}V_kD_k=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{1}_{\{\tau\geqslant k\}}D_k=X_{n\wedge\tau},$$

所以X关于V的变换$Y=X^{\tau}$,Y是一个鞅.

注意:鞅X关于可预报序列V的变换未必为鞅,因为V_kD_k未必可积.

但是,若对每个$n\geqslant 0$,V_n有界,则鞅X关于可预报序列V的变换Y必为鞅.因为$V_kD_k\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,$V_kD_k\in\mathscr{F}_k$,所以$Y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}V_kD_k\in\mathscr{F}_n$,$Y_n\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$.又因为

$$\mathbf{E}(V_{n+1}D_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=V_{n+1}\mathbf{E}(D_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=0,$$

所以

$$E(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(V_{n+1}D_{n+1}|\mathscr{F}_n)+E(Y_n|\mathscr{F}_n)=Y_n.$$

即 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅.

对每个 $n\geqslant 0$, V_n 有界(甚至$\{V_n:n\geqslant 0\}$一致有界1), Y 的性质也比 X 的性质要差. 下面的例子说明这一论断.

例 4.2 设$\{X_n:n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的以

$$\{-b,-b+1,\cdots,-1,\cdots,b-1,b\}$$

为状态空间的时齐的马尔可夫过程,且$|i|<b$时,

$$p_{i,j}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{当 } j=i+1,\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } j=i-1,\end{cases}$$

$|i|=b$ 时,

$$p_{i,i}=P(X_{n+1}=i|X_n=i)=1,\quad P(X_0=0)=1.$$

(这样的马尔可夫过程称为在 $\pm b$ 具有吸收屏的简单随机徘徊).

令 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$ $(n\geqslant 0)$, $\mathscr{F}_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$, 令 $V_k\equiv(-1)^{k+1}(k\geqslant 0)$, 则 $V=\{V_k:k\geqslant 0\}$ 是$\{\mathscr{F}_n\}$可预报序列, V 一致有界1, $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 一致有界 b. 显然

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=E(X_{n+1}|X_n)=X_n\quad(n\geqslant 0),$$

即 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅. 由 $|X_n|\leqslant b$ 得知

$$\|X\|_\infty=\sup_{n\geqslant 0}\|X_n\|_\infty\leqslant b<\infty.$$

若令

$$\Omega_n=\left\{\omega:X_0(\omega)=0,X_1(\omega)=1,\cdots,X_n(\omega)=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\},$$

则当 $\omega\in\Omega_n$ 时,

$$Y_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}-\frac{1+(-1)^k}{2}\right)+(-1)^1D_0(\omega)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)= n,$$

所以 $P(Y_n = n) \geqslant P(\Omega_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,因此

$$\|Y\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0}\|Y_n\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0}\left(\lim_{p\to\infty}\left(\int_\Omega |Y_n|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\geqslant \sup_{n\geqslant 0}\left(\lim_{p\to\infty}\left(\int_{\Omega_n} |Y_n|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \sup_{n\geqslant 0}\left(\lim_{p\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n n^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)= \infty.$$

定理 4.1(Burkholder) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的鞅,$V = \{V_n : n\geqslant 0\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n\}$ 可预报序列,$D_n = X_n - X_{n-1}$ $(n\geqslant 0, X_{-1}\equiv 0)$, $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$ 是 X 关于 V 的变换,即

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} V_k D_k \quad (n\geqslant 0), \tag{4.3}$$

则"$\|X\|_1 < \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ 在 $\{V^* < \infty\}$ 上是[a.e.]收敛且有穷",其中 $V^* = \sup\limits_{n\geqslant 0}|V_n|$.

特别地,

"$\|X\|_1 < \infty,\ V^* \leqslant 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.]收敛且有穷".

证 我们分几步来证明此定理.

(Ⅰ) 设 $\|X\|_2 < \infty$, $V^* \leqslant 1$. 推证:$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.]收敛且有穷. 由于 $V_k \in \mathscr{F}_{k-1}(k\geqslant 0)$, $D_k \in \mathscr{F}_k(k\geqslant 0)$,

$$\boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1}) = 0 \quad (k\geqslant 1),$$

所以当 $j < k$ 时,

$$\boldsymbol{E}(V_j D_j V_k D_k) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(V_j D_j V_k D_k | \mathscr{F}_{k-1}))$$

$$= \boldsymbol{E}(V_j D_j V_k \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})) = 0.$$

因此,由上式及 $V^* \leqslant 1$ 和定理 1.1 得

$$\| Y_n \|_2^2 = \Big\| \sum_{k=0}^{n} V_k D_k \Big\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \| V_k D_k \|_2^2$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \| D_k \|_2^2 = \| X_n \|_2^2.$$

所以,由 $\| X \|_2 < \infty$ 得 $\| Y \|_2 < \infty$,更有 $\| Y \|_1 < \infty$. 由 $V^* \leqslant 1$ 知 Y 是鞅,所以由定理 1.5 得知:$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.] 收敛且有穷.

(Ⅱ) 设 X 是一致有界 M(即 $\sup\limits_{n\geqslant 0} |X_n| \leqslant M$)的下鞅,$V^* \leqslant 1$,推证 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.] 收敛且有穷. 令

$$\widehat{D}_0 = D_0,\ \widehat{D}_k = -\boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1}) + D_k (k \geqslant 1),$$

则 $\boldsymbol{E}(\widehat{D}_k | \mathscr{F}_{k-1}) = 0\ (k \geqslant 1)$,因此,由定理1.1得知 $\{\widehat{D}_k : k \geqslant 0\}$ 是某个鞅 $\widehat{X} = \{\widehat{X}_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 的差序列. 令 $\widehat{Y}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k \widehat{D}_k\ (n \geqslant 0)$. 因为

$$\boldsymbol{E}(D_k \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(D_k \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1}) | \mathscr{F}_{k-1}))$$
$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})^2), \tag{4.4}$$

因此

$$\| \widehat{D}_k \|_2^2 = \| D_k - \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1}) \|_2^2$$
$$= \| D_k \|_2^2 - 2\boldsymbol{E}(D_k \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})^2)$$
$$= \| D_k \|_2^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_{k-1})^2) \leqslant \| D_k \|_2^2. \tag{4.5}$$

不妨令 X 非负,否则考虑 $X^* = \{X_n^* = X_n + M, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$,则 X^* 是非负的一致有界的下鞅,而且 X 与 X^* 的差序列一样:$D_n = X_n - X_{n-1} = X_n^* - X_{n-1}^* = D_n^*$,从而 X 与 X^* 关于 V 的变换亦一样. 下面我们就假定 X 是非负一致有界下鞅. 由下鞅性,有

$$\boldsymbol{E}(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) = \boldsymbol{E}(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \geqslant 0 \quad (n \geqslant 1) \tag{4.6}$$

再用 $X_n \geqslant 0\ (n \geqslant 0)$,得

$$\boldsymbol{E}(|X_n|^2) = \boldsymbol{E}(|X_{n-1} + D_n|^2)$$
$$= \boldsymbol{E}(|D_n|^2) + 2\boldsymbol{E}(X_{n-1} D_n) + \boldsymbol{E}(|X_{n-1}|^2)$$

$$= \boldsymbol{E}(|D_n|^2 + 2\boldsymbol{E}(X_{n-1}\boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})) + \boldsymbol{E}(|X_{n-1}|^2)$$
$$\geqslant \boldsymbol{E}(|D_n|^2) + \boldsymbol{E}(|X_{n-1}|^2)\ (n \geqslant 1),$$

从而

$$\|X_n\|_2^2 = \boldsymbol{E}(|X_n|^2) = \sum_{k=0}^{n}(\boldsymbol{E}(|X_k|^2) - \boldsymbol{E}(|X_{k-1}|^2))$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{E}(|D_k|^2) = \sum_{k=0}^{n}\|D_k\|_2^2. \tag{4.7}$$

而由定理 1.1 及(4.5)、(4.7) 式有

$$\|\widehat{X}_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n}\|\widehat{D}_k\|_2^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\|D_k\|_2^2$$
$$\leqslant \|X_n\|_2^2 \leqslant M^2 < \infty \quad (n \geqslant 0), \tag{4.8}$$

所以 $\widehat{X}$ 是 L^2 有界的，因此由定理 1.5 及(1)，得知

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{X}_n \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\widehat{Y}_n$$

皆是[a.e.] 收敛且有穷. 而由(4.6) 式知

$$\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1}) \geqslant 0 \quad (k \geqslant 1),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1}) = Z \geqslant 0$$

收敛. 推证 $Z < \infty$, [a.e.]. 事实上，由积分的单调收敛定理，有

$$\boldsymbol{E}(|Z|^2) = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1})\Big|^2\Big).$$

而由 $\widehat{D}_n$ 的定义有

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(D_k - \widehat{D}_k) = X_n - \widehat{X}_n \quad (n \geqslant 1),$$

所以

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1})\Big\|_2 \leqslant \|X_n\|_2 + \|\widehat{X}_n\|_2 \leqslant 2M \quad (n \geqslant 1),$$

从而 $\|Z\|_2 \leqslant 2M$，故 $Z < \infty$, [a.e.]. 又因为 $V^* \leqslant 1$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}|V_k\boldsymbol{E}(D_k|\mathscr{F}_{k-1})| < \infty,\ [\text{a.e.}]$$

但是

$$Y_n = \widehat{Y}_n + \sum_{k=1}^{n} V_k \boldsymbol{E}(D_k | \mathscr{F}_k) \quad (n \geqslant 1),$$

所以由 $\lim_{n\to\infty} \widehat{Y}_n$ 是[a.e.]收敛且有穷得知 $\lim_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.]收敛且有穷.

(Ⅲ) 设 X 是非负 L^1 有界鞅, $V^* \leqslant 1$, 推证 $\lim_{n\to\infty} Y_n$, [a.e.]收敛且有穷.

任取实数 $\lambda > 0$. 令 $X_n^{\lambda} = -(X_n \wedge \lambda)\ (n \geqslant 0)$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X_{n+1}^{(\lambda)} | \mathscr{F}_n) &= -\boldsymbol{E}(X_{n+1} \wedge \lambda | \mathscr{F}_n) \\ &\geqslant -(\boldsymbol{E}(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) \wedge \boldsymbol{E}(\lambda | \mathscr{F}_n)) \\ &= -(X_n \wedge \lambda) = X_n^{(\lambda)} \quad (n \geqslant 0), \end{aligned}$$

即 $X^{(\lambda)} = \{X_n^{(\lambda)}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是下鞅, 显然 $X^{(\lambda)}$ 是一致有界 λ. 因此, 由(Ⅱ)得知

$$\lim_{n\to\infty} Y_n^{(\lambda)} \ \left(其中\ Y_n^{(\lambda)} = \sum_{k=0}^{n} V_k D_k^{(\lambda)},\ D_k^{(\lambda)} = X_k^{(\lambda)} - X_{k-1}^{(\lambda)}\right)$$

是[a.e.]收敛且有穷的, 所以若令 $X^* = \sup_{n \geqslant 0} |X_n|$, 则

$$\begin{aligned} \{X^* \leqslant \lambda\} &\subset \bigcap_{n \geqslant 0} \{X_n^{(\lambda)} = -X_n\}. \\ &\subset \{\lim_{n\to\infty} Y_n \text{ 收敛且有穷}\}, \text{ [a.e.]}. \end{aligned}$$

而由(1.31)″式有

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(X^* \leqslant \lambda) = 1,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} Y_n$ 是[a.e.]收敛且有穷的.

(Ⅳ) 设 X 是 L^1 有界鞅, $V^* \leqslant 1$. 推证 $\lim_{n\to\infty} Y_n$ 是[a.e.]收敛且有穷.

由于 X 是 L^1 有界鞅, 所以 $|X| = \{|X_n|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 L^1 有界非负下鞅. 令

$$W^{(1)} = \{W_n^{(1)}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\},\ W_n^{(1)} = \sup_{k \geqslant n} \boldsymbol{E}(|X_k| | \mathscr{F}_n),$$

推证 $W^{(1)}$ 是 L^1 有界非负鞅且 $W_n^{(1)} \geqslant |X_n|$. 事实上, 当 $k \geqslant n$

时，

$$|X_n| \leqslant E(|X_k| | \mathscr{F}_n) \leqslant E(E(|X_{k+1}| | \mathscr{F}_k) | \mathscr{F}_n)$$
$$= E(|X_{k+1}| | \mathscr{F}_n),$$

所以 $W_n^{(1)} = \lim\limits_{k\to\infty} E(|X_k| | \mathscr{F}_n) \geqslant |X_n|$ $(n \geqslant 0)$. 显然 $W_n^{(1)} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ $(n \geqslant 0)$，而且

$$\begin{aligned} E(W_{n+1}^{(1)} | \mathscr{F}_n) &= E(\lim_{k\to\infty} E(|X_k| | \mathscr{F}_{n+1}) | \mathscr{F}_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} E(E(|X_k| | \mathscr{F}_{n+1}) | \mathscr{F}_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} E(|X_k| | \mathscr{F}_n) \\ &= W_n^{(1)} \quad (n \geqslant 0). \end{aligned}$$

所以 $E(W_n^{(1)}) = E(W_{n+1}^{(1)})$ $(n \geqslant 0)$，

$$\begin{aligned} \| W^{(1)} \|_1 &= \| W_0^{(1)} \| = \| \sup_{k\geqslant 0} E(|X_k| | \mathscr{F}_0) \|_1 \\ &= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} E(|X_k| | \mathscr{F}_0) \mathrm{d}P \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega E(|X_k| | \mathscr{F}_0) \mathrm{d}P = \lim_{k\to\infty} E(|X_k|) \\ &= \sup_{k\geqslant 0} \| X_k \|_1 = \| X \|_1 < \infty. \end{aligned}$$

故 $W^{(1)}$ 是 L^1 有界非负鞅，且 $\| W^{(1)} \|_1 = \| X \|_1$，$W_n^{(1)} \geqslant |X_n|$.

再令 $W_n^{(2)} = W_n^{(1)} - X_n$ $(n \geqslant 0)$，则由 $W^{(1)}$ 和 X 皆为 L^1 有界鞅及 $W_n^{(1)} \geqslant X_n$ 得知 $W^{(2)} = \{W_n^{(2)}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 L^1 有界非负鞅. 令

$$D_n^{(i)} = W_n^{(i)} - W_{n-1}^{(i)} \quad (i = 1,2;\ n = 0,1,\cdots;\ W_{-1}^{(i)} \equiv 0),$$

$$Y_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} V_k D_k^{(i)} \quad (i = 1,2;\ n = 0,1,\cdots),$$

则

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} V_k D_k = Y_n^{(1)} - Y_n^{(2)} \quad (n \geqslant 0).$$

而由(Ⅲ)得知 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n^{(i)}$ 是[a.e.]收敛且有穷的，故 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ 亦然.

(Ⅴ) 设 X 是 L^1 有界鞅. 推证 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ 在 $\{V^* < \infty\}$ 上[a.e.]收敛且有穷. 令

$$U_k(\lambda) = \begin{cases} V_k, & 若 |V_k| \leqslant \lambda; \\ 0, & 反之 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

则由(Ⅳ)得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{U_k(\lambda)}{\lambda} D_k$ 是[a.e.]收敛且有穷的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} U_k(\lambda) D_k$ 亦然. 但是对一切 $\lambda > 0$,

$$\{V^* \leqslant \lambda\} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \{U_n = V_n\} \subset \{\lim_{n\to\infty} Y_n \text{ 收敛且有穷}\}, \text{ [a.e.]},$$

所以

$$\{V^* < \infty\} \subset \{\lim_{n\to\infty} Y_n \text{ 收敛且有穷}\}, \text{ [a.e.]}$$

定理证毕.

系 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 L^1 有界鞅, $\{D_n : n \geqslant 0\}$ 是 X 的鞅差序列, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n^2 < \infty$, [a.e.].

证 令 $V_0 \equiv 0$, $V_n = X_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, 则 $V = \{V_n : n \geqslant 0\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n : n \geqslant 0\}$ 可预报序列, $V^* = X^*$, 而 $\|X\|_1 < \infty$, 由定理 1.2 有 $P(V^* < \infty) = P(X^* < \infty) = 1$, 由定理 4.1 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ 是[a.e.]收敛且有穷的 $\left(Y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k D_k\right)$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 亦然. 又因为

$$S_n(X)^2 = \sum_{k=0}^{n} D_k^2 = X_n^2 - 2Y_n,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(X)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n^2 < \infty$, [a.e.]. 系得证.

在这一节以下诸定理中, 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是鞅(上、下鞅), 恒令 $D_n = X_n - X_{n-1}$ $(n \geqslant 0, X_{-1} \equiv 0)$, $S_n(X) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} D_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $(n \geqslant 0)$, $S(X) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(X) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $D_n^* = \sup\limits_{k \leqslant n} |D_k|$,

$D^* = \sup_{n\geqslant 0}|D_n|$, $X^* = \sup_{n\geqslant 0}|X_n|$.

定理4.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的鞅，$\boldsymbol{E}(S(X)) < \infty$，则 $\lim_{n\to\infty} X_n$ 是[a.e.]收敛且有穷的.

证 令 $\Omega^* = [0,1]$，$\mathscr{F}^*$ 为 Ω^* 中一切 Borel 子集. P^* 是 Lebesgue 测度，再令$\{r_n : n \geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^*)$上的相互独立随机变量序列，$r_n$ 只可能取1与-1两值，而且$\int_0^1 r_n(t)\mathrm{d}t = 0$ $(n \geqslant 0)$. 对每个固定的 $t \in [0,1]$，$\left\{\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\right\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的鞅，从而

$$\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k\right|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\right\}$$

是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的下鞅，所以$\left\{\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k\right|\right) : n \geqslant 0\right\}$是单调非降序列. 又因为

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 r_j(t)\mathrm{d}t \int_0^1 r_k(t)\mathrm{d}t = 0 \quad (j \neq k),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k\right|\right)\mathrm{d}t \\
&= \boldsymbol{E}\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k\right|\mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant \boldsymbol{E}\left(\left[\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t)D_k\right|^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \boldsymbol{E}\left(\left[\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} r_k^2(t)D_k^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \boldsymbol{E}\left(\left[\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} D_k^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\right) = \boldsymbol{E}(S_n(X)).
\end{aligned}$$

再用积分的单调收敛定理(因为 $\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t) D_k\right|\right)$对 n 单调非降)可得

$$\int_0^1 \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t) D_k\right|\right) \mathrm{d}t \leqslant \boldsymbol{E}(S(X)) < \infty.$$

所以存在 $t_0 \in [0,1]$,使

$$\sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(t_0) D_k\right|\right) < \infty,$$

即 $Y = \left\{Y_n = \sum_{k=0}^{n} r_k(t_0) D_k, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\right\}$是 L^1 有界鞅.

又因为

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=0}^{n} D_k = \sum_{k=0}^{n} r_k(t_0) \cdot r_k(t_0) D_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_k(t_0)(Y_k - Y_{k-1}) \quad (n \geqslant 0), \end{aligned}$$

此即 X 是 L^1 有界鞅 Y 的关于可预报序列$\{r_k(t_0): k \geqslant 0\}$的变换.而$\sup_{n\geqslant 0} |r_n(t_0)| = 1$,所以由定理4.1得知$\lim_{n\to\infty} X_n$ 是[a.e.]收敛且有穷.

定理 4.3 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$, $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$皆为概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的鞅,$X$ 是 L^1 有界的,且 $S_n(Y) \leqslant S_n(X)$ $(n \geqslant 0)$,则 $\lim_{n\to\infty} Y_n$ 是[a.e.]收敛且有穷的.

证 任取正数 $c > 0$.令

$$\tau = \inf\{n : |X_n| \geqslant c \text{ 或 } S_n(X) \geqslant c\},$$

并定义 $\inf \varnothing = \infty$, $S_\infty(X) = S(X)$.推证

$$\boldsymbol{E}(S_\tau(X)) < \infty.$$

事实上,

$$S_\tau(X) \leqslant \begin{cases} c + |D_\tau| \leqslant 2c + |X_\tau|, & \text{当}\{\tau < \infty\}, \\ c, & \text{当}\{\tau = \infty\}, \end{cases} \tag{4.9}$$

若令 $\tau_n = \tau \wedge n$,则有

$$\int_{\{\tau<\infty\}} |X_\tau| \mathrm{d}P \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau<\infty\}} |X_{\tau_n}| \mathrm{d}P$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_{\tau_n}|). \tag{4.10}$$

又因为$\{|X_n|,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅，$\tau,\tau_n$是$\{\mathscr{F}_k:k\geqslant 0\}$停时,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|X_{\tau_n}|) &= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{E}(|X_k|;\tau_n = k)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{E}(|X_n|;\tau_n = k)\\ &= \boldsymbol{E}(|X_n|).\end{aligned} \tag{4.11}$$

以(4.11)、(4.10)代入(4.9)式并注意X是L^1有界的,则可得$\boldsymbol{E}(S_\tau(X))<\infty$.令$\hat{Y}=\{\hat{Y}_n = Y_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n\geqslant 0\}$,显然$\boldsymbol{E}(|\hat{Y}_n|)<\infty$, $\hat{Y}_n\in\mathscr{F}_{\tau_n}$,且对任何$A\in\mathscr{F}_{\tau_n}$,有

$$A\cap\{\tau_n = j\}\cap\{\tau_{n+1}>j\}\in\mathscr{F}_j,$$

故由Y是鞅可得

$$\int_A (Y_{\tau_n}-Y_{\tau_{n+1}})\mathrm{d}P = \sum_{j=0}^{n}\int_{A\cap\{\tau_n=j\}\cap\{\tau_{n+1}>j\}}(Y_j-Y_{j+1})\mathrm{d}P = 0,$$

所以$\hat{Y}$是鞅.又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(S(\hat{Y})) &= \boldsymbol{E}\Big(Y_{\tau_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|Y_{\tau_n} - Y_{\tau_{n-1}}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \boldsymbol{E}\Big(Y_0^2 + \sum_{n=1}^{\tau}|Y_n - Y_{n-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \boldsymbol{E}(S_\tau(Y))\leqslant\boldsymbol{E}(S_\tau(X)).\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{E}(S(\hat{Y}))<\infty$.因此由定理4.2得知$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{Y}_n$是[a.e.]收敛且有穷的.但是在集合$\{X^*<c,\ S(X)<c\}$上总有$\tau=\infty$,故$\tau_n=\tau\wedge n = n$,从而$Y_n=\hat{Y}_n(n\geqslant 0)$.而由定理1.2和定理4.1系知$P(X^*<\infty)=1=P(S(X)<\infty)$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}Y_n$是[a.e.]收敛且有穷的.

定理4.4 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的鞅，$\boldsymbol{E}(D^*)<\infty$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 在 $\{S(X)<\infty\}$ 上是[a.e.]收敛且有穷的；

(2) $\{\sup\limits_{n\geqslant 0} X_n<\infty\}\subset\{S(X)<\infty\}$，[a.e.].

更一般地，若还有 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是 X 关于可预报序列 $V=\{V_n:n\geqslant 0\}$ 的变换，则

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ 在 $\{S(Y)<\infty\}\cap\{V^*<\infty\}$ 上是[a.e.]收敛且有穷的；

(4) $\{\sup\limits_{n\geqslant 0} Y_n<\infty\}\cap\{V^*<\infty\}\subset\{S(Y)<\infty\}$，[a.e.].

(注：(a) 设 $\boldsymbol{E}(D^*)<\infty$. 由定理3.4及定理4.4的(1)和(2)得 $\{\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ 收敛且有穷$\}=\{\sup X_n<\infty\}=\{S(X)<\infty\}$，[a.e.].

(b) 设 $\boldsymbol{E}(D^*)<\infty$，$V^*<K$，[a.e.]，则

$$\boldsymbol{E}(\sup_{n\geqslant 0}|Y_n-Y_{n-1}|)=\boldsymbol{E}(\sup_{n\geqslant 0}|V_nD_n|)\leqslant K\boldsymbol{E}(D^*)<\infty,$$

故由定理3.4及定理4.4的(iii)，(iv)得

$$\{\lim_{n\to\infty} Y_n \text{ 收敛且有穷}\}=\{\sup Y_n<\infty\}$$
$$=\{S(Y)<\infty,\ [\text{a.e.}]\}.$$

证 设鞅 X 满足 $\boldsymbol{E}(D^*)<\infty$.

(1) 任取正数 λ. 令 $\tau=\inf\{n:S_n(X)\geqslant\lambda\}$，$\tau_n=\tau\wedge n$，$\hat{X}_n=X_{\tau_n}\,(n\geqslant 0)$，则仿定理4.3可证 $\hat{X}=\{\hat{X}_n,\mathscr{F}_{\tau_n},n\geqslant 0\}$ 是鞅. 显然

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(S(\hat{X}))&=\boldsymbol{E}\Big(\hat{X}_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{X}_k-\hat{X}_{k-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\boldsymbol{E}\Big(X_{\tau_0}^2+\sum_{k=1}^{\infty}|X_{\tau_k}-X_{\tau_{k-1}}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\boldsymbol{E}\Big(X_0^2+\sum_{k=1}^{\tau}|X_k-X_{k-1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\boldsymbol{E}(S_{\tau-1}(X)^2+|D_\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant E(\lambda^2 + D^{*2})^{\frac{1}{2}} \leqslant \lambda + E(D^*),$$

所以 $E(S(\hat{X})) < \infty$. 因此,由定理 4.2 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{X}_n$ 是[a.e.]收敛且有穷的. 但在集合 $\{S(X) < \lambda\}$ 上 $\tau = \infty$ 且 $X \equiv \hat{X}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ 在 $\{S(X) < \lambda\}$ 上是[a.e.]收敛且有穷的. 由于 $\lambda > 0$ 可以任意取,所以(1) 获证.

(2) 任取 $\lambda > 0$,令 $\tau = \inf\{n: |X_n| \geqslant \lambda\}$, $\tau_n = \tau \wedge n$, $\hat{X}_n = X_{\tau_n} (n \geqslant 0)$. 则 $\hat{X} = \{\hat{X}_n, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \geqslant 0\}$ 是鞅, 显然, $|\hat{X}_n| \leqslant \lambda + D^*$, 所以 $\hat{X}$ 是 L^1 有界鞅,由定理 4.1 系得

$$S(\hat{X}) < \infty, \text{ [a.e.]}.$$

但是在集合 $\{X^* < \lambda\}$ 上有 $\tau = \infty$ 且 $S(X) = S(\hat{X})$,所以对一切 $\lambda > 0$,有

$$\{X^* < \lambda\} \subset \{S(X) < \infty\}, \text{ [a.e.]},$$

从而

$$\{X^* < \infty\} \subset \{S(X) < \infty\}, \text{ [a.e.]},$$

但是,由定理 3.4 有

$$\{X^* < \infty\} = \{\sup_{n\geqslant 0} X_n < \infty\} = \{\inf_{n\geqslant 0} X_n > -\infty\}, \text{ [a.e.]}.$$

(2) 获证.

(3) 再设 Y 是 X 的关于可预报序列 V 的变换. 任取 $\lambda>0$,令

$$\hat{V}_n(\omega) = \begin{cases} V_n(\omega), & \text{当} |V_n(\omega)| < \lambda, \\ 0, & \text{反之} \end{cases} \quad (n \geqslant 0),$$

$$\hat{Y}_n = \sum_{k=0}^{n} \hat{V}_k D_k \quad (n \geqslant 0),$$

$$\hat{G}_n = \hat{Y}_n - \hat{Y}_{n-1} \quad (n \geqslant 0, \ \hat{Y}_{-1} \equiv 0),$$

$$\hat{G}^* = \sup_{n\geqslant 0} |\hat{G}_n|,$$

则 $\hat{Y} = \{\hat{Y}_n, \mathscr{F}_t, n \geqslant 0\}$ 是鞅,且 $E(\hat{G}^*) \leqslant \lambda E(D^*) < \infty$. 因此,由(1) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{Y}_n$ 在 $\{S(\hat{Y}) < \infty\}$ 上是[a.e.] 收敛且有穷的.

由于

$$\{V^* < \lambda\} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\widehat{V}_n = V_n\} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\widehat{Y}_n = Y_n\},$$

$$S(\widehat{Y})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{V}_k D_k)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (V_k D_k)^2 = S(Y)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\{V^* < \lambda\}\{S(Y) < \infty\} &\subset \{S(\widehat{Y}) < \infty\} \bigcap_{n\geqslant 0}^{\infty} \{\widehat{Y}_n = Y_n\} \\ &\subset \{\lim_{n\to\infty} \widehat{Y}_n \text{ 收敛且有穷}\} \bigcap_{n\geqslant 0}^{\infty} \{\widehat{Y}_n = Y_n\} \\ &\subset \{\lim_{n\to\infty} Y_n \text{ 收敛且有穷}\}, \ [\text{a.e.}],\end{aligned}$$

即(3)成立.

(4) 由于 $\boldsymbol{E}(\widehat{G}^*) < \infty$,对 $\widehat{Y}$ 用(2)得

$$\{\sup_{n\geqslant 0} \widehat{Y}_n < \infty\} \subset \{S(\widehat{Y}) < \infty\}, \ [\text{a.e.}].$$

再注意

$$\{V^* < \lambda\} \subset \bigcap_{n\geqslant 0} \{\widehat{Y}_n = Y_n\},$$

则可得

$$\begin{aligned}\{\sup_{n\geqslant 0} Y_n < \infty, \ V^* < \lambda\} &= \{\sup_{n\geqslant 0} \widehat{Y}_n < \infty, \ V^* < \lambda\} \\ &\subset \{S(Y) = S(\widehat{Y}) < \infty\}, \ [\text{a.e.}].\end{aligned}$$

由于 $\lambda > 0$ 可以任意选取,在上式中令 $\lambda \to \infty$,得

$$\{\sup_{n\geqslant 0} Y_n < \infty, \ V^* < \infty\} \subset \{S(Y) < \infty\}, \ [\text{a.e.}].$$

定理 4.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$A \in \mathscr{F}$.称 A 是原子集合,如果 $P(A) > 0$,但 A 不能包含两个不交的具有正概率的子集.若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 L^1 有界鞅,$\{D_n : n \geqslant 0\}$ 是 X 的鞅差序列,A 是原子集合,D_n 的值域皆为可数集,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |D_n| < \infty, \ [\text{a.e.}] \text{ in } A.$$

证 令 D_n 之值域皆含于$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, $n \geqslant 0$.由 A 是原

子集合知:固定任一非负整数 n,必存在实数 a_{k_n} 使 $A \subset \{D_n = a_{k_n}\}$, [a.e.],亦即 $P(A - \{D_n = a_{k_n}\}) = 0$,如果不然,则对一切 a_k,均有 $P(A - \{D_n = a_k\}) > 0$,令

$$K = \sup\{k: P(A, D_n \neq a_1, \cdots, D_n \neq a_k) = P(A) > 0, k \geqslant 1\},$$

则 $1 \leqslant K \leqslant \infty$.

(a) 若 $K < \infty$,则

$$P(A, D_n \neq a_1, \cdots, D_n \neq a_k, D_n = a_{k+1}) > 0.$$

因此 $A \cap \{D_n \neq a_1, \cdots, D_n \neq a_k, D_n = a_{k+1}\}$ 与 $A \cap \{D_n \neq a_{k+1}\}$ 是 A 中 2 个不交的具有正概率的子集,这与 A 是原子集合矛盾.

(b) 若 $K = \infty$,则

$$P(A, D_n \neq a_1, D_n \neq a_2, \cdots) = P(A) > 0,$$

这与 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{D_n = a_k\}) = 1$ 矛盾.所以必存在 a_{k_n} 使

$$A \subset \{D_n = a_{k_n}\}, \ [\text{a.e.}],$$

从而 $A \subset \bigcap_{n=0}^{\infty}\{D_n = a_{k_n}\}$, [a.e.].取

$$V_n = \begin{cases} 1, & 若\ a_{k_n} \geqslant 0, \\ -1, & 若\ a_{k_n} < 0, \end{cases}$$

则 X 关于 V 的变换 $Y = \left\{\sum_{k=0}^{n} V_k D_k, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\right\}$ 满足

$$Y_n = \sum_{j=0}^{n} \left| a_{k_j} \right| = \sum_{j=0}^{n} \left| D_j \right|, \ [\text{a.e.}] \text{ in } A.$$

再利用定理 4.1 可证定理 4.5.

§5 取值于 Banach 空间中的鞅

在前面四节中,我们研究的是实值鞅,而在这一节中,我们将要研究取值于任意 Banach 空间 **B** 的鞅,简称 **B** 值鞅.

在这一节中，恒设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间，**B**是任一Banach空间，若$\mathscr{F}^*$是$\mathscr{F}$中的子σ代数，令

$$M(\Omega,\mathscr{F}^*,P;\mathbf{B}) = \{f: f:\Omega \mapsto \mathbf{B},\ f\text{ 关于 }\mathscr{F}^*\text{ 强可测}\},$$

$$L^p(\Omega,\mathscr{F}^*,P;\mathbf{B}) = \{f: f\in M(\Omega,\mathscr{F}^*,P;\boldsymbol{B}),$$

$$\int_\Omega \|f\|^p \mathrm{d}P < \infty\},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

其中$\|\cdot\|$表示$\boldsymbol{B}$中的范数.

定义 5.1 设Γ是任一偏序集，其中序关系为$\leqslant$，$\{\mathscr{F}_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$是$\mathscr{F}$中一族子$\sigma$代数，如果$X_\gamma\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\gamma,P;\mathbf{B})$，$\gamma\in\Gamma$，且"$\alpha\leqslant\beta\Longrightarrow\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}_\beta$，$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_\beta\ \ \mathscr{F}_\alpha)=X_\alpha$"，则称$X=\{X_\gamma,\mathscr{F}_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$是一个**B 值鞅**.

为了研究**B**值鞅，我们先介绍有关取值于**B**的集合函数的一些简单性质.

定义 5.2 设E是任一集合，$\mathscr{E}$是E上的一个代数，**B**是任一Banach空间，μ是定义在$\mathscr{E}$上取值于**B**中的任一集合函数. 如果对任何$A_1,A_2\in\mathscr{E}$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，有$\mu(A_1\cup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$，则称$\boldsymbol{\mu}$**是有限可加的**；如果$\mu$还满足

$$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=(\mathrm{s})\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n),$$

其中$A_n\in\mathscr{E}$，$\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathscr{E}$，$A_n\cap A_m=\varnothing\,(m\neq n)$，则称$\boldsymbol{\mu}$**是完全可加的（可数可加的）**. 级数前冠以(s)表示此级数依范收敛.

若μ是定义在代数$\mathscr{E}$上取值于**B**中的有限可加的集合函数，则称

$$V_\mu(A;\mathscr{E})\equiv\sup\{\sum_{k=1}^n\|\mu(A_k)\|: A\supset A_k\in\mathscr{E},\ A_j\cap A_k=\varnothing\ (j\neq k,\ n\geqslant1)\}$$

为μ在A上的变差$(A\in\mathscr{E})$，在无混淆的情况下，简记$V_\mu(A;\mathscr{E})$为$V(A)$. 称$V_\mu(\cdot)$（或简写为V_μ）为μ的**变差函数**，简称为μ的

变差,而称 μ 在 E 上的变差 $V_\mu(E)$ 为 μ 的**全变差**.若 $V_\mu(E)<\infty$,则称 μ 是**有界变差的**(在 $\mathscr{E}$ 上).

称

$$V_\mu^*(A)\equiv\sup\{|x^*\circ\mu|(A):x^*\in\mathbf{B}^*,\ \|x^*\|\leqslant 1\}$$

为 μ 在 A 上的半变差($A\in\mathscr{E}$),其 $\mathbf{B}^*$ 为 $\mathbf{B}$ 的共轭空间,$x^*\circ\mu$ 为如下定义的有限可加的实值集合函数

$$(x^*\circ\mu)(A)=x^*(\mu(A)),\quad A\in\mathscr{E},$$

而 $|x^*\circ\mu|(A)$ 是实值集合函数 $x^*\circ\mu$ 在 A 上的变差,称 $V_\mu^*(\cdot)$(或简写为 V_μ^*)为 μ 的**半变差**.若 $V_\mu^*(E)<\infty$,则称 μ 是**有界半变差的**.

显然有

(1) $A\subset B\Longrightarrow V_\mu(A)\leqslant V_\mu(B),\ V_\mu^*(A)\leqslant V_\mu^*(B)$;

(2) $V_\mu^*(A)\leqslant V_\mu(A),\ A\in\mathscr{E}$;

(3) V_μ 在 $\mathscr{E}$ 上具有有限可加性.

由(2)看出,若 μ 是有界变差的,则 μ 必是有界的.

命题5.1 设 $E,\mathscr{E},\mathbf{B}$ 如定义5.2,若 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的取值于 $\mathbf{B}$ 中的有限可加的具有有界变差的集合函数,则 μ 在 $\mathscr{E}$ 上是完全可加的充要条件是 V_μ 在 $\mathscr{E}$ 上是完全可加的.

证 充分性.设 V_μ 在 $\mathscr{E}$ 上是完全可加的.由于 μ 是有界变差的,且 $V_\mu^*(A)\leqslant V_\mu(A)$ $(A\in\mathscr{E})$,故任取 $A_n\in\mathscr{E},\ A_n\supset A_{n+1}$ $(n\geqslant 1)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,必有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup|x^*(\mu(A_n))|\\&\qquad\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup|x^*\circ\mu|(A_n)\\&\qquad\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup V_\mu^*(A_n)\\&\qquad\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup V_\mu(A_n)=0\end{aligned}$$

(对一切 $x^* \in \mathbf{B}^*$, $\|x^*\| \leqslant 1$ 成立),所以,由 Hahn-Banach 定理得

$$(\mathrm{s}) \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0,$$

从而由 μ 在 $\mathscr{E}$ 上具有有限可加性得知 μ 在 $\mathscr{E}$ 上具有完全可加性.

必要性. 设 μ 在 $\mathscr{E}$ 上完全可加且具有有界变差. 任取 $A_n \in \mathscr{E}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$, $A_n \cap A_m = \varnothing (n \neq m)$. 而 $\pi = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 为 A 的任一分割,即 $B_i \in \mathscr{E}$, $B_i \cap B_j = \varnothing (i \neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\pi} \|\mu(B)\| &= \sum_{B\in\pi} \left\|\mu(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\right\| \\
&= \sum_{B\in\pi} \left\|(\mathrm{s}) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap A_n)\right\| \\
&\leqslant \sum_{B\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(B \cap A_n)\| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{B\in\pi} \|\mu(B \cap A_n)\| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} V_\mu(A_n),
\end{aligned}$$

所以

$$V_\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = V_\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} V_\mu(A_n).$$

又由于 V_μ 在 $\mathscr{E}$ 上具有有限可加性及单调性,所以,对每个 n, 有

$$\sum_{m=1}^{n} V_\mu(A_m) = V_\mu(\bigcup_{m=1}^{n} A_m) \leqslant V_\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m)$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_\mu(A_m) \leqslant V_\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m).$$

故 V_μ 在 $\mathscr{E}$ 上是完全可加的. 命题 5.1 获证.

命题5.2 设$E,\mathscr{E},\mathbf{B}$和μ如命题5.1，ν是$\mathscr{E}$上的实值测度，则

$$\mu \ll \nu \Longleftrightarrow V_\mu \ll \nu,$$

其中符号$\mu \ll \nu$表示μ关于ν绝对连续，即

$$\text{“}\nu(A)=0 \Longrightarrow \mu(A)=0.\text{”}$$

证 设$\mu \ll \nu$. 若$\nu(A)=0$，则对任何$B_i \in \mathscr{E}$，$B_i \subset A$，有$\nu(B_i)=0$，故$\mu(B_i)=0$，从而

$$V_\mu(A) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|\mu(B_i)\| : k \geqslant 1,\ B_i \subset A,\ B_i \in \mathscr{E},\\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j\Big\} = 0.$$

即$V_\mu \ll \nu$.

设$V_\mu \ll \nu$，若$\nu(A)=0$，则$\|\mu(A)\| \leqslant V_\mu(A)=0$，故$\mu \leqslant \nu$.

命题5.3 设$(E,\mathscr{E})$是任一可测空间，μ是定义在$\mathscr{E}$上的$\mathbf{B}$值完全可加集合函数，ν是定义在$\mathscr{E}$上的实值测度，则

$$\text{“}\mu \ll \nu \Longleftrightarrow (\mathrm{s})\lim_{\nu(A)\to 0}\mu(A)=0\text{”}.$$

$(\mathrm{s})\lim\limits_{\nu(A)\to 0}\mu(A)=0$的意思是：任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\nu(A)<\delta$时，有$\|\mu(A)\|<\varepsilon$.

证 设$\mu \ll \nu$. 若$(\mathrm{s})\lim\limits_{\nu(A)\to 0}\mu(A)\neq 0$，则存在一个$\varepsilon_0>0$，对一切$2^{-n}>0$，存在$A_n \in \mathscr{E}$，使$\nu(A_n)\leqslant 2^{-n}$，$\|\mu(A_n)\| \geqslant \varepsilon_0$ $(n \geqslant 1)$. 则$\nu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)=0$，记$B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，$B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 则由

$$\text{“}C \subset B,\ C \in \mathscr{E} \Longrightarrow \nu(C)=0\text{”}$$

得出“$C \subset B,\ C \in \mathscr{E} \Longrightarrow \mu(C)=0$”. 因此对任何$x^* \in \mathbf{B}^*$，$\|x^*\| \leqslant 1$，有$|x^* \circ \mu|(C)=0$（对一切$C \subset B,\ C \in \mathscr{E}$）.

但是，对任何$n \geqslant 1$，由$\|\mu(A_n)\| \geqslant \varepsilon_0$，可选取$x_n^* \in \mathbf{B}^*$，使$\|x_n^*\| \leqslant 1$，$|x_n^* \circ \mu(A_n)| > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 而$\mu$在$\mathscr{E}$上具有完全可加

性,可证对 $\mathscr{E}$ 中的两两不交的集合列 $\{E_n\}$ 有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m}^{\infty}|x_n^*\circ\mu|(E_k)=0\quad(\text{对 } n\geqslant 1 \text{ 一致成立}).$$

(参见[14] p.8 命题 17 及 p.7 定义 14). 今取

$$E_1=E-B_1,\ E_{n+1}=B_n-B_{n+1}\quad(n\geqslant 1),$$

则 $\{E_n\}$ 满足上述要求,且

$$B_{m-1}-B=\bigcup_{k=m}^{\infty}E_k.$$

但前面已证:

"$C\subset B,\ C\in\mathscr{E},\ x^*\in\mathbf{B}^*,\|x^*\|\leqslant 1\Longrightarrow|x^*\circ\mu|(C)=0$",

所以 $|x_n^*\circ\mu|(B)=0$ (对一切 $n\geqslant 1$),因此

$$\lim_{m\to\infty}|x_n^*\circ\mu|(B_{m-1})=\lim_{m\to\infty}|x_n^*\circ\mu|\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}E_k\right)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{\infty}|x_n^*\circ\mu|(E_k)=0\quad(\text{对 } n\geqslant 1 \text{ 一致成立}).$$

但是

$$|x_{n-1}^*\circ\mu|(B_{n-1})\geqslant|x_{n-1}^*\circ\mu|(A_{n-1})$$

$$\geqslant|x_{n-1}^*\circ\mu(A_{n-1})|>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

上述两个不等式是矛盾的. 所以(s) $\lim\limits_{\nu(A)\to 0}\mu(A)=0$. 任取 $A\in\mathscr{E}$, $\nu(A)=0$,则 $\|\mu(A)\|<\dfrac{1}{m}$ (对一切 $m\geqslant 1$),故 $\mu(A)=0$,即 $\mu\ll\nu$. 命题 5.3 获证.

命题 5.4(Carathèodory-Hahn-Kluvanek 扩张定理) 设$(E,\mathscr{E})$为任一可测空间,$\mathscr{E}_0$ 是 $\mathscr{E}$ 中的一个代数,$\sigma(\mathscr{E}_0)=\mathscr{E}$, $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 空间. μ 是定义在 $\mathscr{E}_0$ 上的有界的、完全可加的 $\mathbf{B}$ 值集合函数,则下列陈述等价:

(i) μ 可唯一地由 $\mathscr{E}_0$ 扩张到 $\mathscr{E}$ 上去而成一个完全可加的 $\mathbf{B}$ 值集合函数;

(ⅱ) 在 $\mathscr{E}_0$ 上存在一个实值测度 P,使 $\mu \ll P$.

证明请参见[14] p.27.

下面给出两个有代表性的 **B** 值鞅的例子.

例 5.1 设 $\xi \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$, $\{\mathscr{F}_n\}$ 如定义 5.1,令

$$X_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n), \quad n = 0,1,2\cdots.$$

则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是 **B** 值鞅.

例 5.2 设 μ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的取值于 **B** 的完全可加的集合函数,$\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 是 Ω 的有限分割,且 $P(A_i) > 0$, Γ 是全体上述分割构成的偏序集合,其中的偏序"$\leqslant$"定义如下:$\pi_1 \in \Gamma$, $\pi_2 \in \Gamma$, $\pi_1 \leqslant \pi_2$ 的充要条件是"$A \in \pi_2 \Longrightarrow$ 存在 $B \in \pi_1$,使 $A \subset B$, [a.e.]".令 $\mathscr{F}_\pi$ 是由 π 产生的 σ 代数($\pi \in \Gamma$),

$$X_\pi(\omega) = \mu(A_i)/P(A_i), \quad \text{当 } \omega \in A_i,$$
$$\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, \pi \in \Gamma.$$

则 $X = \{X_\pi, \mathscr{F}_\pi, \pi \in \Gamma\}$ 是一个 **B** 值鞅.

下面我们研究 **B** 值鞅的收敛理论.作为一个例子,首先证明例 5.1 中的 **B** 值鞅是收敛的.

定理 5.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是例 5.1 中所定义的 **B** 值鞅,即 $X_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 0$, $\xi \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \boldsymbol{B})$,则

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} X_n &= (\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n) \\ &= (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n), \text{ [a.e.]}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

证 令 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$,以下分几步证明.

(Ⅰ) 设 $\xi \in \bigcup_{n=0}^{\infty} M(\Omega, \mathscr{F}_n, P; \mathbf{B})$,则必存在 n_0,使 $X_n = \xi$, [a.e.](当 $n \geqslant n_0$).故定理 5.1 的结论成立.

(Ⅱ) 设 $\xi \in M(\Omega, \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n, P; \mathbf{B})$,则对任何 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$,

必存在 $\eta \in \bigcup_{n=0}^{\infty} M(\Omega, \mathscr{F}_n, P; \mathbf{B})$，使

$$\boldsymbol{E}(\|\xi - \eta\|) < \frac{1}{2}\varepsilon\delta. \tag{5.2}$$

事实上，若令

$$\mathfrak{M} = \{A : A \in \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n, \text{存在 } A_m \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n, \text{使} \lim_{m\to\infty} P(A \Delta A_m) = 0\},$$

则显然有 $\mathfrak{M} \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$. 可以证明 $\mathfrak{M}$ 是 d 系，所以由 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 是代数（更是 Π 系）得知

$$\mathfrak{M} \supset d\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n\Big) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n.$$

因此，对任何 $\xi = x\mathbf{1}_A$ $(x \in \mathbf{B},\ A \in \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$，必有 $A_m \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$，$\eta_m = x\mathbf{1}_{A_m}$ 使

$$\boldsymbol{E}(\|\xi - \eta_m\|) \leqslant \|x\| P(A \Delta A_m) \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty).$$

所以，用单调系定理可证：对任何 $\xi \in M(\Omega, \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$，必有 $\eta \in \bigcup_{n=0}^{\infty} M(\Omega, \mathscr{F}_n, P; \mathbf{B})$，使(5.2)式成立.

又因为

$$\begin{aligned}\|X_n - X_m\| &\leqslant \|(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\eta \mid \mathscr{F}_n) - (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\eta \mid \mathscr{F}_m)\| \\ &\quad + \|(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi - \eta \mid \mathscr{F}_n) - (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi - \eta \mid \mathscr{F}_m)\| \\ &\leqslant \|(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\eta \mid \mathscr{F}_n) - (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\eta \mid \mathscr{F}_m)\| \\ &\quad + 2\sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(\|\xi - \eta\| \mid \mathscr{F}_n),\end{aligned} \tag{5.3}$$

由(1)及 η 的取法，当 $n, m \to \infty$ 时，(5.3)式右端第一项[a. e.]收敛到 0. 而 $\{\boldsymbol{E}(\|\xi - \eta\| \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是实值非负鞅，由定理 1.2 中(1.3)，及(5.2)式得

$$\begin{aligned}&P\Big(\sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(\|\xi - \eta\| \mid \mathscr{F}_n) > \varepsilon\Big) \\ &\quad \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}(\|\xi - \eta\|) < \frac{\delta}{2}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

因此

$$P(\limsup_{n,m\to\infty}\|X_n - X_m\| > \varepsilon)$$
$$\leqslant P(2\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(\|\xi-\eta\| \mid \mathscr{F}_n) > \varepsilon) < \delta. \quad (5.5)$$

而 $\delta > 0$ 可以任意小,所以

$$P(\limsup_{n,m\to\infty}\|X_n - X_m\| > \varepsilon) = 0.$$

由 $\varepsilon > 0$ 可以任意小得(s) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$, [a.e.].

(Ⅲ) 对一般的 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$,由于

$$X_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n) = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}((s)\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_\infty) \mid \mathscr{F}_n)$$
$$= (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_\infty^* \mid \mathscr{F}_n) \quad (X_\infty^* = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_\infty)),$$

而 $X_\infty^* \in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\boldsymbol{B})$ 所以,由(2) 知

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \text{ [a.e.]}.$$

最后证明 $X_\infty = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_\infty)$. 显然,$X_\infty \in M(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$. 又因为 $\|X_n\| \leqslant \boldsymbol{E}(\|\xi\| \mid \mathscr{F}_n)$,由命题3.1得知$\{\|X_n\|: n\geqslant 0\}$是一致可积的,所以$\sup\limits_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(\|X_n\|)\leqslant K < \infty$,由命题3.2,有

$$\boldsymbol{E}(\|X_\infty\|) = \boldsymbol{E}(\lim_{n\to\infty}\|X_n\|) = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(\|X_n\|)$$
$$\leqslant K < \infty,$$

所以

$$X_\infty \in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B}), \quad (5.6)$$

$\{\|X_n - X_\infty\|: n\geqslant 0\}$ 一致可积. 再用命题3.2,有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(\mathrm{s})\int_A X_n \mathrm{d}P - (s)\int_A X_\infty \mathrm{d}P\right\|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_A \|X_n - X_\infty\| \mathrm{d}P = 0 \quad (A\in\mathscr{F}). \quad (5.7)$$

因此,为证 $X_\infty = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_\infty)$,只需证明对一切 $A\in\mathscr{F}_\infty$,有

$$(\mathrm{s})\int_A \xi \mathrm{d}P = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{s})\int_A X_n \mathrm{d}P\right) = (\mathrm{s})\int_A X_\infty \mathrm{d}P. \quad (5.8)$$

而当 $A \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 时,必有 n_0,使 $A\in\mathscr{F}_n\ (n\geqslant n_0)$,所以

$$(\mathrm{s})\int_A \xi \mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A X_n \mathrm{d}P \quad (n \geqslant n_0),$$

因此,对一切 $A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$, (5.8) 式成立. 令

$$\mathfrak{M} = \Big\{ A : A \in \mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n = \sigma\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n\Big),$$
$$(\mathrm{s})\int_A \xi \mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A X_\infty \mathrm{d}P \Big\},$$

则 $\mathfrak{M} \supset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$,且 $\mathfrak{M}$ 是 d 系,从而

$$\mathfrak{M} \supset d\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n\Big) = \mathscr{F}_\infty .$$

定理证毕.

定义 5.3 称 Banach 空间 **B 关于概率空间($\boldsymbol{\Omega}, \mathscr{F}, \boldsymbol{P}$) 具有 Radon-Nikodym 性质**,如果对定义在 $\mathscr{F}$ 上的取值于 **B** 中的完全可加的具有有界变差的集合函数 μ,只要 $\mu \ll P$,就存在 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$,使

$$\mu(A) = (\mathrm{s})\int_A f(\omega) P(\mathrm{d}\omega) \quad (A \in \mathscr{F}) \tag{5.9}$$

若 **B** 对每个概率空间皆有 Radon-Nikodym 性质,则说 **B** 具有 Radon-Nikodym 性质.

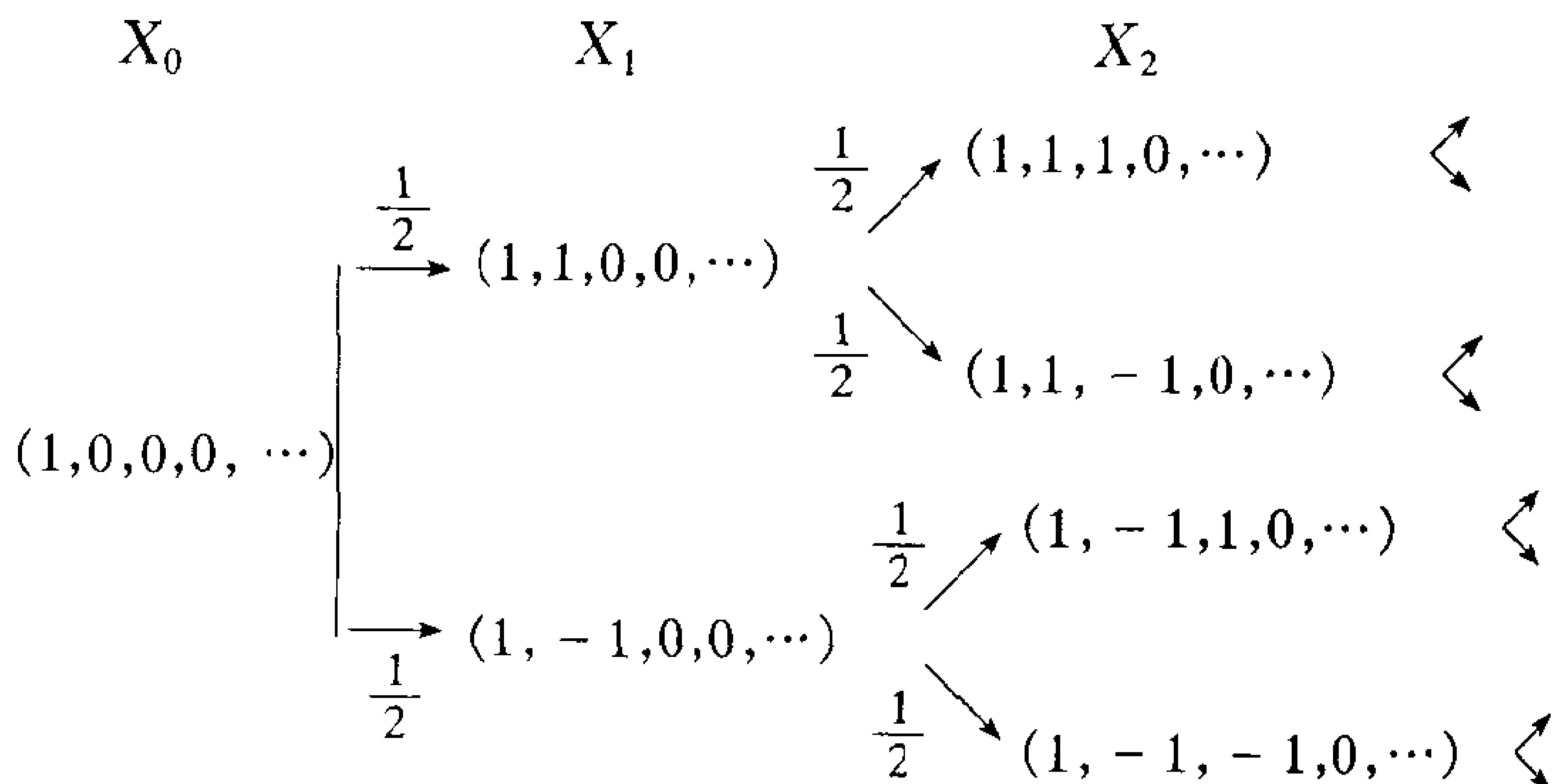
可以证明 **B** 具有 Radon-Nikodym 性质的充要条件是 **B** 对概率空间($[0,1), \mathscr{L}[0,1), P$) 具有 Radon-Nikdym 性质,其中 $\mathscr{L}[0,1)$ 是$[0,1)$ 中一切 Lebesgue 可测集,P 是 Lebesgue 测度(证明可参看[14] p. 138 系 8 或者[9] 定理 2).

众所周知,实数空间 **R** 具有 Radon-Nikodym 性质.

对于实值鞅,我们曾经证明过只要它是 L^1 有界的,必是[a. e.] 收敛的. 对于取值于一般的 Banach 空间的鞅,类似的结论是否成立?回答是未必. 定理 5.2 和定理 5.3 将给出反、正两个实例. 保证 L^1 有界的 **B** 值鞅是[a. e.]收敛,**B** 应满足的充要条件是 **B** 具有 Radon-Nikodym 性质.

定理 5.2 存在一个特定的Banach空间**B**,对此**B**,存在一个L^1有界的**B**值鞅,它不是[a.e.]收敛的(依范收敛).

证 取$\mathbf{B}\equiv l^\infty\equiv\{x:x=(x_0,x_1,x_2,\cdots),x_n\in\mathbf{R},\sup\limits_{n\geqslant 0}|x_n|<\infty\}$.在**B**中定义线性运算如常,定义$\|x\|=\sup|x_n|$,则**B**是Banach空间.直观上看,若有一列随机变量$\{X_n:n\geqslant 0\}$,其轨道如下:



即

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}&=(a_0,a_1,\cdots,a_n,1,0,\cdots)\mid X_n=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,\cdots))\\&=P(X_{n+1}=(a_0,a_1,\cdots,a_n,-1,0,\cdots)\mid\\&\qquad X_n=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,\cdots))\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

此$\{X_n,\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n),n\geqslant 0\}$就是一个$L^1$有界的取值于$l^\infty$的鞅,但它不是[a.e.]收敛的.

下面把这一直观模型理论化.令

$\Omega_0=\{\omega_1^{(0)}\}=\{(1,0,0,0,\cdots)\}$;

$\Omega_1=\{\omega_1^{(1)},\omega_2^{(1)}\}=\{(1,1,0,0,\cdots),(1,-1,0,0,\cdots)\}$;

$\Omega_2=\{\omega_1^{(2)},\omega_2^{(2)},\cdots,\omega_{2^2}^{(2)}\}$

$\quad=\{(1,1,1,0,\cdots),(1,1,-1,0,\cdots),$

$$(1,-1,1,0,\cdots),(1,-1,-1,0,\cdots)\};$$

$$\Omega_n=\{\omega_1^{(n)},\omega_2^{(n)},\cdots,\omega_{2^n}^{(n)}\};$$

$$\omega_{2i-1}^{(n)}=\omega_i^{(n-1)}+e_n,\quad i=1,\cdots,2^{n-1},$$

$$\omega_{2i}^{(n)}=\omega_i^{(n-1)}-e_n,\quad i=1,\cdots,2^{n-1},$$

$$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{个}},1,0,\cdots),\quad n\geqslant 1,$$

$$\cdots.$$

$\mathscr{G}_n$ 是由 Ω_n 的全体子集构成的 σ 代数($n\geqslant 0$),

$$\Omega=\Omega_0\times\Omega_1\times\cdots,\quad \mathscr{F}=\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}_1\times\cdots.$$

任取 $n\geqslant 0$, $\omega_{i_k}^{(k)}\in\Omega_k$, $k=0,1,\cdots,n$,定义

$$P_n(\{\omega_{i_0}^{(0)}\}\times\{\omega_{i_1}^{(1)}\}\times\cdots\times\{\omega_{i_n}^{(n)}\})$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & \text{当 } \omega_{i_k}^{(k)}=\omega_{i_{k-1}}^{(k-1)}\pm e_k,\\ 0, & \text{反之}.\end{cases}$$

而对任何 $A_n\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}_1\times\cdots\times\mathscr{G}_n$,则令

$$P_n(A_n)=\sum_{(\omega_{i_0}^{(0)},\omega_{i_1}^{(1)},\cdots,\omega_{i_n}^{(n)})\in A_n}P_n(\{\omega_{i_0}^{(0)}\}\times\{\omega_{i_1}^{(1)}\}\times\cdots\times\{\omega_{i_n}^{(n)}\}),$$

则 P_n 是 $\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}_1\times\cdots\times\mathscr{G}_n$ 上的概率测度,对任何 $A=A_n\times\Omega_{n+1}\times\Omega_{n+2}\times\cdots$, $A_n\in\mathscr{G}_0\times\mathscr{G}_1\times\cdots\times\mathscr{G}_n$,定义

$$P(A)=P_n(A_n),$$

则 P 可唯一地扩张到 $\mathscr{F}$ 上去而成一概率测度,故得概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$. 对于任何 $\omega\in\Omega$, $\omega=(\omega_{i_0}^{(0)},\omega_{i_1}^{(1)},\cdots,\omega_{i_n}^{(n)},\cdots)$, $\omega_{i_n}^{(n)}\in\Omega_n$, 定义

$$X_n(\omega)=\omega_{i_n}^{(n)}\quad(n\geqslant 0),$$

$$\mathscr{F}_n\equiv\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$$

$$\equiv\sigma\{X_k^{-1}(\{\omega_{i_k}^{(k)}\}):i_k=1,2,\cdots,2^k;\ k=0,1,\cdots,n\}$$

推证 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于 Banach 空间

l^{∞} 的鞅,且 L^1 有界,即

$$\| X \|_1 \equiv \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(\| X_n \|) < \infty, \tag{5.10}$$

但(s) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 不能[a.e.]收敛.

由于 X_n 是 Ω 上的简单函数且关于 $\mathscr{F}_n$ 强可测,所以 X_n 是 Bochner 可积的.下面证明

$$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n \quad (n \geqslant 0).$$

为此,只需证明对一切形如

$$B = \bigcap_{k=0}^{n} X_k^{-1}(\{\omega_{i_k}^{(k)}\}) \tag{5.11}$$

的集合 B,有

$$(\mathrm{s})\int_B X_{n+1} \mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_B X_n \mathrm{d}P, \tag{5.12}$$

又由于

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{k=0}^{n} X_k^{-1}(\{\omega_{i_k}^{(k)}\})\right) \\ &= P_n(\{\omega_{i_0}^{(0)}\} \times \{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \cdots \times \{\omega_{i_n}^{(n)}\}) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{当 } \omega_{i_k}^{(k)} = \omega_{i_{k-1}}^{(k-1)} \pm e_k, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.13}$$

所以,只需证明对下述形式的

$$B = \bigcap_{k=0}^{n} X_k^{-1}(\{\omega_{i_k}^{(k)}\}), \quad \omega_{i_k}^{(k)} = (a_0, a_1, \cdots, a_k, 0, \cdots),$$

a_k 为 ± 1, $k = 0,1,2,\cdots,n$, (5.12)式成立.这时由 P_n 和 P 的定义,有

$$\begin{aligned} (\mathrm{s})\int_B X_{n+1} \mathrm{d}P &= (\mathrm{s})\int_{B\cap X_{n+1}^{-1}(\{\omega_{i_n}^{(n)}+e_{n+1}\})} X_{n+1} \mathrm{d}P \\ &\quad + (\mathrm{s})\int_{B\cap X_{n+1}^{-1}(\{\omega_{i_n}^{(n)}-e_{n+1}\})} X_{n+1} \mathrm{d}P \\ &= (\omega_{i_n}^{(n)} + e_{n+1})\frac{1}{2^{n+1}} + (\omega_{i_n}^{(n)} - e_{n+1})\frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\omega_{i_n}^{(n)} = (\mathrm{s})\int_{\mathbf{B}} X_n \mathrm{d}P.$$

故 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是取值于 l^∞ 的鞅.

由于对每个 $\omega_i^{(n)} \in \Omega_n \subset l^\infty$,必有 $\omega_i^{(n)} = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots)$, 其中 a_i 为 1 或 -1,所以 $\|\omega_i^{(n)}\| = \sup\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = 1$,而对任何 $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \in \Omega_n$, 故 $\|X_n\| \equiv 1$, 从而 $\|X\|_1 \equiv \sup\limits_{n \geqslant 0} \boldsymbol{E}(\|X_n\|) = 1$, 即 X 是 L^1 有界的.

但是(s) $\lim\limits_{n \to \infty} X_n$ 绝不能[a.e.]收敛.因为由 P 及 X_n 的定义得知

$$P((X_{n+1} - X_n) = \pm e_{n+1}) = 1,$$

所以

$$\|X_{n+1} - X_n\| = \|e_{n+1}\| = 1, \ [\text{a.e.}],$$

因此(s) $\lim\limits_{n \to \infty} X_n$ 不是[a.e.]收敛.

定理 5.3 设

$$\mathbf{B} = l^1 = \{x : x = (x_0, x_1, x_2, \cdots), x_n \in \mathbf{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\},$$

在 $\mathbf{B}$ 中定义线性运算如常.定义 $\|x\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n| \ (x \in \mathbf{B})$,则 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间.再设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的取值于 $\mathbf{B}$ 中的鞅,且 L^1 有界,即 $\|X\|_1 \equiv \sup\limits_{n \geqslant 0} (\|X_n\|) < \infty$, 则存在 X_∞,使 $\boldsymbol{E}(\|X_\infty\|) \leqslant \|X\|_1$,且

$$(\mathrm{s}) \lim_{n \to \infty} X_n = X_\infty, \ [\text{a.e.}].$$

证 为方便起见,有时把 l^1 中元素写成列向量.令

$$X_n = \begin{pmatrix} X_{0,n} \\ X_{1,n} \\ X_{2,n} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

推证$\{X_{j,n},\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的取值于$\mathbf{R}$的$L^1$有界的鞅. 由于$X_n$关于$\mathscr{F}_n$强可测,所以可令

$$X_n=\begin{pmatrix}X_{0,n}\\X_{1,n}\\X_{2,n}\\\vdots\end{pmatrix}=(\mathrm{s})\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{M_k}x_{0,n}(k,i)\mathbf{1}_{A_n(k,i)}\\\sum_{i=1}^{M_k}x_{1,n}(k,i)\mathbf{1}_{A_n(k,i)}\\\sum_{i=1}^{M_k}x_{2,n}(k,i)\mathbf{1}_{A_n(k,i)}\\\vdots\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{记作}}(\mathrm{s})\lim X_n^{(k)},\ [\mathrm{a.e.}],\ \|X_n^{(k)}\|\leqslant 2\|X_n\|,\tag{5.14}$$

$$A_n(k,i)\in\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F},$$

$$x_n(k,i)=\begin{pmatrix}x_{0,n}(k,i)\\x_{1,n}(k,i)\\x_{2,n}(k,i)\\\vdots\end{pmatrix}\in l^1,$$

由于"$x^{(n)},x\in l^{(1)},\ \|x^{(n)}-x\|\to 0\Longrightarrow|x_j^{(n)}-x_j|\to 0\ (j\geqslant 0)$",所以

$$X_{j,n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{M_k}x_{j,n}(k,i)\mathbf{1}_{A_n}(k,i)\quad(j\geqslant 0).\tag{5.15}$$

因此$X_{j,n}\in\mathscr{F}_n(j\geqslant 0)$. 又因为

$$\begin{pmatrix}X_{0,n-1}\\X_{1,n-1}\\X_{2,n-1}\\\vdots\end{pmatrix}=X_{n-1}=(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$$

$$=(\mathrm{s})\lim_{k\to\infty}[(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_n^{(k)}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})]$$

$$=(\mathrm{s})\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{M_k}x_n(k,i)\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_n(k,i)}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$$

$$= (\mathrm{s}) \lim_{k \to \infty} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M_k} x_{0,n}(k,i) \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_n(k,i)} | \mathscr{F}_{n-1}) \\ \sum_{i=1}^{M_k} x_{1,n}(k,i) \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_n(k,i)} | \mathscr{F}_{n-1}) \\ \sum_{i=1}^{M_k} x_{2,n}(k,i) \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_n(k,i)} | \mathscr{F}_{n-1}) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

所以由(5.15)及(5.14)式得

$$\begin{aligned} X_{j,n-1} &= \lim_{k \to \infty} \sum_{k=s}^{M_k} x_{j,n}(k,i) \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{A_n(k,i)} | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \boldsymbol{E}(X_{j,n} | \mathscr{F}_{n-1}) \quad (n \geqslant 1). \end{aligned} \tag{5.16}$$

故$\{X_{j,n}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是实值鞅$(j \geqslant 0)$. 由于 X 是 L^1 有界的,即

$$\| X \|_1 = \sup_{n \geqslant 0} \| \boldsymbol{E}(\| X_n \|) = \sup_{n \geqslant 0} \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{E}(|X_{j,n}|) < \infty, \tag{5.17}$$

所以

$$\sup_{n \geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_{j,n}|) < \infty, \tag{5.18}$$

即$\{X_{j,n}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是 L^1 有界鞅,因此,由定理 1.5,得知存在 $X_{j,\infty}$,使

$$\lim_{n \to \infty} X_{j,n} = X_{j,\infty}, \ [\text{a.e.}] \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{E}(|X_{j,\infty}|) \leqslant \sup_{n \geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_{j,n}|) < \infty \tag{5.20}$$

令

$$X_\infty = \begin{pmatrix} X_{0,\infty} \\ X_{1,\infty} \\ X_{2,\infty} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

推证：$X_\infty = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} X_n$，[a.e.].

由于$\{X_{j,n},\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是实值鞅，所以$\{|X_{j,n}|,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是下鞅，从而$\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|)$是$n$的单调非降函数，用单调收敛定理及(5.17)式，有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|)=\sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|)$$
$$=\sup_{n\geqslant 0}\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|)<\infty. \qquad (5.21)$$

因为

$$\|X_n-X_\infty\|=\sum_{j\leqslant i}|X_{j,n}-X_{j,\infty}|+\sum_{j>i}|X_{j,n}-X_{j,\infty}|, \qquad (5.22)$$

若令$\xi_i=\sup_{n\geqslant 0}\sum_{j>i}|X_{j,n}|$，则由(5.19)、(5.22)式得

$$\limsup_{n\to\infty}\|X_n-X_\infty\|\leqslant 2\xi_i,\ [\text{a.e.}]. \qquad (5.23)$$

由于$\{|X_{j,n}|,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是实值的非负下鞅，再注意(5.17)式可知$\left\{\sum_{j>i}|X_{j,n}|,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\right\}$亦为非负下鞅，所以用非负下鞅的极值不等式(1.13)″和(5.21)式可得

$$\lambda P\Big(\sup_{n\geqslant 0}\sum_{j>i}|X_{j,n}|>\lambda\Big)\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}\Big(\sum_{j>i}|X_{j,n}|\Big)$$
$$\leqslant\sum_{j>i}\sup_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(|X_{j,n}|),$$

再用(5.21)式知上式右端当$i\to\infty$趋于0，故

$$\lim_{i\to\infty}\lambda P\Big(\sup_{n\geqslant 0}\sum_{j>i}|X_{j,n}|>\lambda\Big)=0\quad(\lambda>0). \qquad (5.24)$$

因此

$$\lim_{i\to\infty}\xi_i=\lim_{i\to\infty}\sup_{n\geqslant 0}\sum_{j>i}|X_{j,n}|=0,\ [\text{a.e.}]. \qquad (5.25)$$

由(5.23)、(5.25)式得

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty,\ [\mathrm{a.e.}].$$

显然,由(5.20)、(5.21)式得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\| X_\infty \|) &= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |X_{j,\infty}|\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{E}(|X_{j,\infty}|) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_{j,n}|) = \sup_{n\geqslant 0}\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{E}(|X_{j,n}|) \\
&= \sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(\| X_n \|) = \| X \|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

系 若 $\infty > p \geqslant 1$, $\mathbf{B} = l^p = \{x : x = (x_0, x_1, \cdots),\ x_n \in \mathbf{R},\ \big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$,在 $\mathbf{B}$ 中定义线性运算如常,定义 $\| x \|_p = \big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}$,则 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间. 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的取值于 l^p 中的鞅,且 L^p 有界,即 $\| X \|_p^p \equiv \sup_{n\geqslant 0}(\| X_n \|_p^p) \equiv \sup_{n\geqslant 0}[\boldsymbol{E}(\| X_n \|^p)] < \infty$,则存在 X_∞,使

$$[\boldsymbol{E}(\| X_\infty \|^p)]^{\frac{1}{p}} \leqslant \| X \|_p,$$

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty,\ [\mathrm{a.e.}].$$

证 令

$$X_n = \begin{pmatrix} X_{0,n} \\ X_{1,n} \\ X_{2,n} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

由于$\{X_{j,n}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是鞅,而 $\varphi(t) = |t|^p$ 是凸函数($p \geqslant 1$),所以$\{|X_{j,n}|^p, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是非负下鞅,因此,在定理 5.3 的证明中,用$\{|X_{j,n}|^p, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$取代$\{|X_{j,n}|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$,则由定理 5.3 可证系.

定理 5.4 设 $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 空间,则下列陈述等价

(ⅰ) $\mathbf{B}$ 具有 Radon-Nikodym 性质;

(ii) 对任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$\mathbf{B}$值鞅$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n=0,1,\cdots\}$,只要$\sup\limits_{n\geqslant 0}\boldsymbol{E}(\|X_n\|)<\infty$,就有

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty,\ [\mathrm{a.e.}];$$

(iii) 对任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$\mathbf{B}$值鞅$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0,1,\cdots\}$,只要$\{X_n\}$是一致 Bochner 可积的,即是只要

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 0}\int_\Omega\|X_n\|\mathbf{1}_{\{\|X_n\|>N\}}\mathrm{d}P=0,$$

就有$X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$,使$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(\|X_n-X_\infty\|)=0$.

在证明定理以前,先证明

引理 5.1 设μ是定义$\mathscr{F}$上的取值于$\mathbf{B}$中的完全可加的集合函数,$X=\{X_\pi,\mathscr{F}_\pi,\pi\in\Gamma\}$是例 5.2 中所定义的$\mathbf{B}$值鞅.若任取$\{\pi_n\}\subset\Gamma$, $\pi_n\leqslant\pi_{n+1}(n\geqslant 1)$,有$X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$,使

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(\|X_{\pi_n}-X_\infty\|)=0,\tag{5.26}$$

则μ可表为

$$\mu(A)=(\mathrm{s})\int_A X_\infty\mathrm{d}P\quad(A\in\mathscr{F}).\tag{5.27}$$

证 若能证

$$(\mathrm{s})\boldsymbol{E}(X_\infty|\mathscr{F}_{\pi_n})=X_{\pi_n}\quad(n\geqslant 1),\tag{5.28}$$

则对任何$A\in\pi_n$,由X_{π_n}的定义有

$$\mu(A)=(\mathrm{s})\int_A X_{\pi_n}\mathrm{d}P=(\mathrm{s})\int_A X_\infty\mathrm{d}P.$$

而$\pi_n\in\Gamma$, $A\in\pi_n$可任意,所以对任何$A\in\mathscr{F}$, $P(A)>0$,必有(5.27)式成立,从而对任何$A\in\mathscr{F}$, (5.27)式亦成立.下面补证(5.28)式.

由(5.26)式,任给$\varepsilon>0$,存在一个$\pi_{n(\varepsilon)}$,使

$$\boldsymbol{E}(\|X_{\pi_n}-X_\infty\|)<\varepsilon\quad(\text{当}\ n\geqslant n(\varepsilon)).\tag{5.29}$$

今任取$A\in\pi_n$,由$X=\{X_{\pi_n},\mathscr{F}_{\pi_n},\pi=0,1,\cdots\}$是$\mathbf{B}$值鞅,可知

$$(\mathrm{s})\int_A X_{\pi_m}\,\mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A X_{\pi_n}\,\mathrm{d}P \quad (m \geqslant n). \tag{5.30}$$

所以,取 $m \geqslant n \vee n(\varepsilon)$,则由(5.29)、(5.30)式得

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathrm{s})\int_A X_{\pi_n}\,\mathrm{d}P - (\mathrm{s})\int_A X_\infty\,\mathrm{d}P\right\| \\ &\quad = \left\|(\mathrm{s})\int_A X_{\pi_m}\,\mathrm{d}P - (\mathrm{s})\int_A X_\infty\,\mathrm{d}P\right\| \\ &\quad \leqslant \int_A \left\|X_{\pi_m} - X_\infty\right\|\mathrm{d}P < \varepsilon.\end{aligned}$$

而 $\varepsilon > 0$ 可任意小,$X_{\pi_n} \in L^1(\Omega,\mathscr{F}_{\pi_n},P;\mathbf{B})$,所以(5.28)式成立.引理 5.1 得证.

现在我们证明定理 5.4.

(ⅰ)⟹(ⅱ). 设 $\mathbf{B}$ 具有 Radon-Nikodym 性质. 任给 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n,n = 0,1,\cdots\}$,满足

$$\sup_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(\|X_n\|) < \infty,$$

推证:$(\mathrm{s})\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$, [a.e.].

事实上,令

$$\mu_n(A) = (\mathrm{s})\int_A X_n\,\mathrm{d}P, \quad A \in \mathscr{F}_n^*,\ n \geqslant 1,$$

其中 $\mathscr{F}_n^* = \{A:A = B \cup C,\ B \in \mathscr{F}_n,\ P(C) = 0\}$,则由 X 是鞅可知

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(A) \quad (A \in \mathscr{F}_n^*).$$

再注意 $\mathscr{F}_n^* \subset \mathscr{F}_{n+1}^*$,若令 $\mathscr{F}_\infty^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n^*$(它是代数),$\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{F}_\infty^*) = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n^*$,则

$$\mu(A) = (\mathrm{s})\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) \quad (A \in \mathscr{F}_\infty^*)$$

定义出一个定义在 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上的具有有限可加性的 $\mathbf{B}$ 值集合函数. 任取 $A \in \mathscr{F}_\infty^*$,令

$$V_\mu(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{k} \| \mu(B_i) \| : B_i \in \mathscr{F}_\infty^*,\ B_i \subset A,\ B_i \cap B_j = \varnothing\ (i \neq j),\ k \geqslant 1)\}$$

为 μ 在 A 上的变差. 推证:

$$V_\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A \| X_n \| \mathrm{d}P < \infty \quad (A \in \mathscr{F}_\infty^*). \quad (5.31)$$

任取 $A \in \mathscr{F}_\infty^*$, $B_i \subset A$, $B_i \in \mathscr{F}_\infty^*$, $B_i \cap B_j = \varnothing\ (i \neq j)$, $i,j = 1,\cdots,k$. 必存在 n_0, 使 $A, B_i \in \mathscr{F}_{n_0}^*\ (i = 1,\cdots,k)$. 所以, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{k} \| \mu(B_i) \| = \sum_{i=1}^{k} \| \mu_n(B_i) \| = \sum_{i=1}^{k} \left\| (\mathrm{s})\int_{B_i} X_n \mathrm{d}P \right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} \| X_n \| \mathrm{d}P \leqslant \int_A \| X_n \| \mathrm{d}P. \quad (5.32)$$

而 $\{ \| X_n \|, \mathscr{F}_n^*, n = 0,1,\cdots\}$ 是 L^1 有界非负实值下鞅, 又 $\mathbf{1}_A \in \mathscr{F}_{n_0}$, 所以 $\{\mathbf{1}_A \| X_n \|, \mathscr{F}_n^*, n \geqslant n_0\}$ 亦为 L^1 有界非负实值下鞅, 所以

$$\int_A \| X_n \| \mathrm{d}P \uparrow \left(\sup_{n\geqslant n_0}\int_A \| X_n \| \mathrm{d}P\right) \quad (n \uparrow \infty),$$

所以由(5.32)式得知

$$V_\mu(A) \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_A \| X_n \| \mathrm{d}P < \infty \quad (A \in \mathscr{F}_\infty^*). \quad (5.33)$$

再任取 $A \in \mathscr{F}_\infty^*$, 必有 n_0, 使 $A \in \mathscr{F}_n^*$ (当 $n \geqslant n_0$ 时), 取简单函数列 $\{X_n^{(m)} : m \geqslant 1\}$, 使

$$X_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{k(m,n)} C_i^{(m,n)} \mathbf{1}_{A_i(m,n)},\ C_i^{(m,n)} \in \mathbf{B},\ A_i^{(m,n)} \in \mathscr{F}_n^*,$$

$$\lim_{m\to\infty} \| X_n^{(m)} - X_n \| = 0,\ [\text{a.e.}]\ (\text{关于 } P), \quad (5.34)$$

$$\| X_n^{(m)} \| \leqslant 2 \| X_n \|, \quad (5.35)$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \| X_n^{(m)} - X_n \| \mathrm{d}P = 0. \quad (5.36)$$

又因为当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\begin{aligned}
V_\mu(A) &\geqslant \sum_{i=1}^{k(m,n)} \| \mu(A \cap A_i^{(m,n)}) \| \\
&= \sum_{i=1}^{k(m,n)} \| \mu_n(A \cap A_i^{(m,n)}) \| \\
&= \sum_{i=1}^{k(m,n)} \left\| (\mathrm{s})\int_{A \cap A_i^{(m,n)}} X_n \mathrm{d}P \right\| \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{k(m,n)} \left\| (\mathrm{s})\int_{A \cap A_i^{(m,n)}} X_n^{(m)} \mathrm{d}P \right\| \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k(m,n)} \left\| (\mathrm{s})\int_{A \cap A_i^{(m,n)}} (X_n - X_n^{(m)}) \mathrm{d}P \right\| \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{k(m,n)} \left\| (\mathrm{s})\int_{A \cap A_i^{(m,n)}} X_n^{(m)} \mathrm{d}P \right\| - \int_A \| X_n - X_n^{(m)} \| \mathrm{d}P \\
&= \int_A \| X_n^{(m)} \| \mathrm{d}P - \int_A \| X_n - X_n^{(m)} \| \mathrm{d}P. \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$ 并注意(5.34),(5.35),(5.36) 式,再使用控制收敛定理,可得

$$V_\mu(A) \geqslant \int_A \| X_n \| \mathrm{d}P \quad (A \in \mathscr{F}_\infty^*,\ n \geqslant n_0),$$

所以

$$V_\mu(A) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_A \| X_n \| \mathrm{d}P \quad (A \in \mathscr{F}_\infty^*). \qquad (5.38)$$

由(5.33),(5.38) 式得知(5.31) 式成立.

以上我们证明了 μ 是定义在代数 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上的具有有限可加性的有界变差的 **B** 值集合函数. 据[14] 定理 5 关于 **B** 值集合函数的分解定理可知

$$\mu = \sigma + \eta,$$

其中 η 是 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上的有限可加的具有有界变差的 **B** 值集合函数,且关于 P 是奇异的. 所谓 η 关于 P 是奇异的,亦即任给 $\varepsilon, \delta > 0$,存在 $A \in \mathscr{F}_\infty^*$,使

$$P(A) < \varepsilon, \quad V_\eta(\Omega - A) < \delta.$$

其中 σ 是定义在 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上的具有完全可加性的有界变差的 **B** 值集合函数，且 $V_\sigma \ll P$ $(\Longleftrightarrow \sigma \ll P)$. 用命题 5.4，$\sigma$ 可唯一地扩张到 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{F}_\infty^*) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n^*$ 上去而成一个 **B** 值的完全可加的集合函数，扩张后所得的集合函数仍用 σ 表示. 由于 $\mathscr{F}_\infty^*$ 包含了 P 的一切零测度子集合，所以任取 $E \in \mathscr{F}_\infty$，$P(E) = 0$，必有 $E \in \mathscr{F}_\infty^*$，$P(E) = 0$，因此由 $\sigma \ll P$ (在 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上) 可以推出 $\sigma \ll P$ (在 $\mathscr{F}_\infty$ 上). 再证视 σ 为 $\mathscr{F}_\infty$ 上的完全可加的 **B** 值集合函数时，亦为有界变差的. 今任取定 k 及 $B_1, \cdots, B_k$，$B_i \in \mathscr{F}_\infty (i = 1, 2, \cdots, k)$，$\{B_i\}$ 两两不交. 任给 $\varepsilon > 0$，由于 $\sigma \ll P$ (在 $\mathscr{F}_\infty$ 上)，所以存在 $\delta > 0$，使

$$\text{“}C \in \mathscr{F}_\infty,\ P(C) < \delta \Longrightarrow \| \sigma(C) \| < \frac{\varepsilon}{2k}\text{”}. \qquad (5.39)$$

又因为 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{F}_\infty^*)$，$\mathscr{F}_\infty^*$ 是代数，所以，对每一个 $B_i \in \mathscr{F}_\infty$，存在 $B_i^* \in \mathscr{F}_\infty^*$，使 $P(B_i \Delta B_i^*) < \frac{\delta}{6k}$. 令

$$\widetilde{B}_1 = B_1^*, \ \widetilde{B}_i = B_i^* - B_i^*(B_1^* \cup \cdots \cup B_{i-1}^*), \ i = 2, \cdots, k,$$

则 $\{\widetilde{B}_i\}$ 两两不交，$\widetilde{\widetilde{B}}_i \in \mathscr{F}_\infty^*$. 又因为

$$\begin{aligned}
&P(B_i^* \cap B_j^*) \\
&\quad = P([B_i^* - B_i) \cup (B_i^* \cap B_i)] \\
&\qquad \cap [(B_j^* - B_j) \cup (B_j^* \cap B_j)]) \\
&\quad \leqslant P(B_i^* - B_i) + P(B_j^* - B_j) \\
&\qquad + P((B_i^* - B_i) \cap (B_j^* - B_j)) \\
&\quad \leqslant \frac{\delta}{2k} \quad (i \neq j),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
P(\widetilde{B}_i \Delta B_i) &\leqslant P(\widetilde{B}_i \Delta B_i^*) + P(B_i^* \Delta B_i) \\
&= P(B_i^* - \widetilde{B}_i) + P(B_i^* \Delta B_i)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{i\delta}{2k} + \frac{\delta}{6k} < \delta \quad (i = 1, \cdots, k). \tag{5.40}$$

由(5.39)、(5.40)式得

$$\| \sigma(B_i - \tilde{B}_i \| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \| \sigma(\tilde{B}_i - B_i) \| < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{5.41}$$

又因为

$$\sigma(B_i) = \sigma(B_i - \tilde{B}_i) + \sigma(B_i \cap \tilde{B}_i)$$
$$= \sigma(B_i - \tilde{B}_i) + \sigma(\tilde{B}_i) - \sigma(\tilde{B}_i - B_i),$$

所以 $\| \sigma(B_i) \| \leqslant \| \sigma(\tilde{B}_i) \| + \frac{\varepsilon}{k}$,从而

$$\sum_{i=1}^{k} \| \sigma(B_i) \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \| \sigma(\tilde{B}_i) \| + \varepsilon \leqslant V_\sigma(\Omega; \mathscr{F}_\infty^*) + \varepsilon,$$

而$\{B_i: 1 \leqslant i \leqslant k\}$可为$\mathscr{F}_\infty$中任意一组两两不交的可测子集,所以

$$V_\sigma(\Omega; \mathscr{F}_\infty) < \infty.$$

因此,由 **B** 具有 Randon-Nikodym 性质得知存在 $Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; \mathbf{B})$,使

$$\sigma(A) = (\mathrm{s})\int_A Y \mathrm{d}P, \quad A \in \mathscr{F}_\infty.$$

令 σ_n 为 σ 在 $\mathscr{F}_n^*$ 上的局限,$Y_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(Y | \mathscr{F}_n^*)$,则对任何 $A \in \mathscr{F}_n^*$,有

$$\sigma_n(A) = \sigma(A) = (\mathrm{s})\int_A Y \mathrm{d}P = (\mathrm{s})\int_A Y_n \mathrm{d}P, \tag{5.42}$$

令 η_n 为 η 在 $\mathscr{F}_n^*$ 上的局限,$Z_n = X_n - Y_n$,则对任何 $A \in \mathscr{F}_n^*$,有

$$\eta_n(A) = \mu_n(A) - \sigma_n(A) = (\mathrm{s})\int_A Z_n \mathrm{d}P. \tag{5.43}$$

由例 5.1 知 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n^*, n = 0, 1, \cdots\}$ 为 **B** 值鞅,而 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n^*, n = 0, 1, \cdots\}$ 是 **B** 值鞅,所以 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n^*, n = 0, 1, \cdots\}$ 亦为 **B** 值鞅.由定理 5.1 有

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} Y_n = (\mathrm{s})\boldsymbol{E}(Y \mid \bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n^*) = Y, \ [\mathrm{a.e.}].$$

所以,若能证

$$(\mathrm{s})\lim_{n\to\infty} Z_n = 0, \ [\mathrm{a.e.}], \tag{5.44}$$

则(ⅱ)成立.事实上,由于 V_η(视 η 为 $\mathscr{F}_\infty^*$ 上的 **B** 值集合函数)是 P 奇异的,所以任给 $0<\varepsilon,\delta<1$,存在 $A\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n^*=\mathscr{F}_\infty^*$,不妨设 $A\in\mathscr{F}_N^*$,使

$$P(\Omega - A) + V_\eta(A;\mathscr{F}_\infty^*) < \frac{1}{2}\varepsilon\delta. \tag{5.45}$$

而 $\{\mathbf{1}_A\|Z_n\|,\mathscr{F}_n^*,n\geqslant N\}$ 是非负实值下鞅,所以由(5.45)式和定理 1.2,有

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{n\geqslant N}\|Z_n\|>\varepsilon)\\
&\quad = P((\Omega - A)\cap(\sup_{n\geqslant N}\|Z_n\|>\varepsilon))\\
&\qquad + P(A\cap(\sup_{n\geqslant N}\|Z_n\|>\varepsilon))\\
&\quad = P((\Omega - A)\cap(\sup_{n\geqslant N}\|Z_n\|>\varepsilon))\\
&\qquad + P(\sup_{n\geqslant N}(\mathbf{1}_A\|Z_n\|)>\varepsilon)\\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{n\geqslant N}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\|Z_n\|)\\
&\quad = \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{1}{\varepsilon}\lim_{n\to\infty}\int_A\|Z_n\|\,\mathrm{d}P\\
&\quad = \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{1}{\varepsilon}V_\eta(A;\mathscr{F}_\infty^*)\\
&\quad = \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{1}{2}\delta < \delta,
\end{aligned}$$

所以

$$P(\limsup_{n\to\infty}\|Z_n\|>\varepsilon)\leqslant P(\sup_{n\geqslant N}\|Z_n\|>\varepsilon)<\delta,$$

由 $\varepsilon>0$, $\delta>0$ 可以任意小,得知

$$(s)\lim_{n\to\infty} Z_n = 0, \ [\text{a.e.}].$$

故(ii)成立.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 设(ii)成立,且 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n = 0,1,\cdots\}$ 是一致 Bochner 可积的 **B** 值鞅. 易证 $\sup_{n\geq 0} \boldsymbol{E}(\| X_n \|) < \infty$. 因此,由(ii)得知

$$(s)\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \ [\text{a.e.}].$$

由 Fatou 引理得知

$$\boldsymbol{E}(\| X_\infty \|) \leqslant \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\| X_n \|) < \infty,$$

即 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; \mathbf{B})$. 因此, $\{\| X_n - X_\infty \|\}$ 是一致可积的实值函数列,且 $\lim_{n\to\infty} \| X_n - X_\infty \| = 0, \ [\text{a.e.}]$,所以

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\| X_n - X_\infty \|) = 0,$$

即(iii)成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i). 设(iii)成立. 任给一个定义在 $\mathscr{F}$ 上的 **B** 值的完全可加的具有有界变差的关于 P 绝对连续的集合函数 μ,推证存在一个 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$,使

$$\mu(A) = (s)\int_A X_\infty \mathrm{d}P \quad (A \in \mathscr{F}). \tag{5.46}$$

利用引理5.1,只需证明对例5.2中所定义的 **B** 值鞅 $X = \{X_\pi, \mathscr{F}_\pi, \pi \in \Gamma\}$,任取 $\{\pi_n\} \subset \Gamma$, $\pi_n \leqslant \pi_{n+1}$,有 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$,使

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(\| X_{\pi_n} - X_\infty \|) = 0. \tag{5.47}$$

如果我们能证 $\{X_{\pi_n} : n \geqslant 1\}$ 是一致 Bochner 可积的,则由(iii)可推出(5.47)式成立,亦即定理获证. 事实上,

$$P(\| X_{\pi_n} \| \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N} \boldsymbol{E}(\| X_{\pi_n} \|) \leqslant \frac{1}{N} V_\mu(\Omega).$$

任给 $\varepsilon > 0$,可取 N 充分大,使

$$P(\| X_{\pi_n} \| \geqslant N) < \varepsilon \quad (\text{对一切 } n \geqslant 1). \tag{5.48}$$

但是 $\mu \ll P$，从而 $V_\mu \ll P$，所以由命题5.3，任给 $\delta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使

$$\text{“}P(A) < \varepsilon,\ A \in \mathscr{F} \Longrightarrow V_\mu(A) < \delta\text{”}. \tag{5.49}$$

因此，对任何 $\delta > 0$，有

$$\int_{\{\| X_{\pi_n} \| \geqslant N\}} \| X_{\pi_n} \| \mathrm{d}P \leqslant V_\mu(\{\| X_{\pi_n} \| \geqslant N\}) < \delta \quad (n \geqslant 1),$$

即 $\{X_{\pi_n} : n \geqslant 1\}$ 是一致 Bochner 可积的. 定理证毕.

第十章　平稳过程论

本章恒设 $\mathbf{T}\subset\mathbf{R}$, $\mathscr{B}^n=\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的全体 Borel 集, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$. 对 $\mathbf{T}$ 主要考虑几个特例:$\mathbf{T}=[0,\infty)$ 或 $\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $(-\infty,\infty)$,或 $\{0,\pm 1,\cdots\}$.

§1　严平稳过程及其强大数定律

在这一节中,我们将研究另一种模式的随机过程,其特征是其分布不随时间参数之推移而变化.

定义1.1　设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程. 若对任意正整数 n,任何 $s,t_i,s+t_i\in\mathbf{T}$, $B_i\in\mathscr{B}^1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,都有

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^n X_{t_i}^{-1}(B_i)\Big)=P\Big(\bigcap_{i=1}^n X_{s+t_i}^{-1}(B_i)\Big),\tag{1.1}$$

则称 X 是**(严) 平稳过程**. 特别地,若时间参数集 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{R}$ 中一个可数子集,则称 X 是**(严) 平稳序列**.

命题1.1　设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程,则下列陈述等价:

(0)　X 是平稳过程;

(ⅰ)　(1.1) 式成立;

(ⅱ)　对任何正整数 n,任何 $s,t_i,s+t_i\in\mathbf{T}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,任何 $f\in b\mathscr{B}^n$,有

$$\boldsymbol{E}(f(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))=\boldsymbol{E}(f(X_{s+t_1},\cdots,X_{s+t_n}));\tag{1.2}$$

（ⅲ）　对任何 $s,t,s+t\in\mathbf{T}$，任何

$$f:\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mapsto\mathbf{R},\quad f\in b\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$$

（其中 $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=\underset{t\in\mathrm{T}}{\times}\mathbf{R}_t$，$\mathscr{B}^{\mathrm{T}}=\underset{t\in\mathrm{T}}{\times}\mathscr{B}_t$，$\mathbf{R}_t\equiv\mathbf{R}$，$\mathscr{B}_t\equiv\mathscr{B}^1=\mathscr{B}(\mathbf{R})$），均有

$$\boldsymbol{E}(f(X))=\boldsymbol{E}(f(X^{(s)})),\tag{1.3}$$

其中 $X_t^{(s)}(\omega)=X_{s+t}(\omega)\ (t\in\mathbf{T},\ \omega\in\Omega)$. $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ 中的元素用 $x(\cdot)$ 表之.

证　（ⅰ）$\Longrightarrow$（ⅱ）. 设（ⅰ）成立. 令

$\mathscr{H}=\{f:f\in b\mathscr{B}^n,\ f$ 使(1.2)式成立$\}$,

$\mathscr{G}=\{A:A=B_1\times\cdots\times B_n,\ B_i\in\mathscr{B}^1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$,

则 $\mathscr{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Π 系且 $\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{B}^n$. 又

(a)　$1\in\mathscr{H}$, 当 $A\in\mathscr{G}$ 时，由(1.1)式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))&=\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_1\times\cdots\times B_n}(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))\\&=\boldsymbol{E}\Big(\mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^{n}X_{t_i}^{-1}(B_i)}(\omega)\Big)\\&=\boldsymbol{E}\Big(\mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^{n}X_{s+t_i}^{-1}(B_i)}(\omega)\Big)\\&=\boldsymbol{E}\Big(\mathbf{1}_A(X_{s+t_1},\cdots,X_{s+t_n})\Big),\end{aligned}$$

即 $\mathbf{1}_A\in\mathscr{H}$.

(b)　若 $f_m\in\mathscr{H}$, $0\leqslant f_m\leqslant f_{m+1}$, $\lim\limits_{m\to\infty}f_m=f$, $f\in b\mathscr{B}^n$，则由积分单调收敛定理及 $f_m\in\mathscr{H}$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(f(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))&=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}(f_m(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}))\\&=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}(f_m(X_{s+t_1},\cdots,X_{s+t_n}))\\&=\boldsymbol{E}(f(X_{s+t_1},\cdots,X_{s+t_n})),\end{aligned}$$

即 $f\in\mathscr{H}$.

因此由单调系定理知 $\mathscr{H}\supset b\sigma(\mathscr{G})=b\mathscr{B}^n$. 即（ⅱ）成立.

（ⅱ）$\Longrightarrow$（ⅲ）. 设（ⅱ）成立. 令 $\varphi(\mathbf{T})$ 为 $\mathbf{T}$ 的全体有限子集所构成的集合系，

$$\mathscr{G}^{\mathbf{T}}=\{A:A=(\bigtimes_{r\in J}B_r)\times(\bigtimes_{t\in T^{-J}}\mathbf{R}_t),\ B_r\in\mathscr{B}_r,\ r\in J,\ J\in\varphi(\mathbf{T})\},$$

$$\mathscr{H}^{\mathbf{T}}=\{f:f\in \mathrm{b}\mathscr{B}^{\mathbf{T}},\ f\text{ 使(1.3) 式成立}\},$$

则 $\mathscr{G}^{\mathbf{T}}$ 是 Π 系,而且 $\sigma(\mathscr{G}^{\mathbf{T}})=\mathscr{B}^{\mathbf{T}}$. 此外,还有

(a) $1\in\mathscr{H}^{\mathbf{T}}$. 对任何 $A=(\bigtimes_{r\in J}B_r)\times(\bigtimes_{t\in T^{-J}}\mathbf{R}_t)\in\mathscr{G}^{\mathbf{T}}$, 由(1.2) 式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A(X))&=\boldsymbol{E}\Big(\prod_{r\in J}\mathbf{1}_{B_r}(X_r)\Big)\\&=\boldsymbol{E}\Big(\prod_{r\in J}\mathbf{1}_{B_r}(X_{r+s})\Big)\quad(r+s\in\mathbf{T},\ r\in J),\end{aligned}$$

即 $\mathbf{1}_A\in\mathscr{H}^{\mathbf{T}}$.

(b) 若 $f_m\in\mathscr{H}^{\mathbf{T}}$, $0\leqslant f_m\leqslant f_{m+1}\ (m\geqslant 0)$, $f=\lim\limits_{m\to\infty}f_m$, $f\in \mathrm{b}\mathscr{B}^{\mathbf{T}}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(f(X))&=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}(f_m(X))=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}(f_m(X^{(s)}))\\&=\boldsymbol{E}(f(X^{(s)})),\end{aligned}$$

即 $f\in\mathscr{H}^{\mathbf{T}}$.

所以由单调系定理得知 $\mathscr{H}^{\mathbf{T}}\supset \mathrm{b}\mathscr{B}^{\mathbf{T}}$,即(ⅲ)成立.

(ⅲ)$\Longrightarrow$(ⅰ). 设(ⅲ)成立. 在(1.3) 式中取 $f=g\circ h$,

$h:\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mapsto\mathbf{R}^J$, $h(x(\cdot))=(x(t_1),\cdots,x(t_n))$,

$$J=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset\mathbf{T},$$

$g:\mathbf{R}^J\mapsto\mathbf{R}$, $g(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=\mathbf{1}_{B_1\times\cdots\times B_n}(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})$,

则(1.3) 化为(1.1) 式. 命题证毕.

定义 1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任一测度空间,$\varphi:\Omega\mapsto\Omega$. 称 φ 是**保测变换**,如果

(ⅰ) $A\in\mathscr{F}\Longrightarrow\varphi^{-1}(A)\in\mathscr{F}$;

(ⅱ) $\mu(\varphi^{-1}(A))=\mu(A)\ (A\in\mathscr{F})$.

显然 $\mathscr{I}\equiv\{A:A\in\mathscr{F},\ A=\varphi^{-1}(A)\}$ 是 σ 代数,称 $\mathscr{I}$ 为 φ 的**不变 $\boldsymbol{\sigma}$ 代数**,称 $\mathscr{I}$ 中之元素 A 为 **$\boldsymbol{\varphi}$ 不变集**,在无混淆的情况下,简称 $\mathscr{I}$ 为不变 σ 代数,A 为不变集. 称保测变换 φ 是**遍历的**,如果"$A\in\mathscr{I}$

$\Longrightarrow \mu(A)$ 或 $\mu(\Omega - A)$ 中至少有一个为 0".

对保测变换 φ,定义 φ^s 为$\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{s}$,则 φ^s 亦为保测变换. 记 $\varphi^0 = 1$ 为恒等变换.

例 1.1　令 $\Omega = [0,1)$, $\mathscr{F}$为$[0,1)$中一切 Borel 子集, P 是 $\mathscr{F}$上的Lebesgue 测度,则得概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$. 任取正实数 a, 令 $\varphi(\omega) = (\omega + a) - [\omega + a]$ $(\omega \in \Omega)$, 则 φ 是一个保测变换.

证　令$\mathscr{G} = \{[\alpha,\beta):[\alpha,\beta) \subset \Omega\}$,

$$\mathscr{F}^* = \{A : A \in \mathscr{F},\ \varphi^{-1}(A) \in \mathscr{F}\},$$

则 $\mathscr{G}$ 是 Π 系,且 $\mathscr{F}^* \supset \mathscr{G}$, $\mathscr{F}^*$ 是 σ 代数,所以 $\mathscr{F}^* \supset \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}$. 即"$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathscr{F}$".

再令$\mathscr{F}' = \{A : A \in \mathscr{F},\ P(A) = P(\varphi^{-1}(A))\}$,则$\mathscr{F}'$ 是d 系, $\mathscr{F}' \supset \mathscr{G}$, 所以

$$\mathscr{F}' \supset d(\mathscr{G}) = \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}.$$

即"$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow P(A) = P(\varphi^{-1}(A))$". 故 φ 是一个保测变换.

例 1.2　令$(\Omega,\mathscr{F},P)$如例 1.1 中之概率空间,

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{当 } 0 \leqslant \omega < \dfrac{1}{2}, \\ 2\omega - 1, & \text{当 } \dfrac{1}{2} \leqslant \omega < 1, \end{cases}$$

则 φ 是一个保测变换.

证　令 $\mathscr{G}, \mathscr{F}^*, \mathscr{F}'$ 如例 1.1 中所定义. 任取$[\alpha,\beta) \in \mathscr{G}$,有

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}([\alpha,\beta)) &= \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right),\ 2\omega \in [\alpha,\beta)\right\} \\ &\quad \cup \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right),\ 2\omega - 1 \in [\alpha,\beta)\right\} \\ &= \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \cup \left[\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

故 $\mathscr{F}^* \supset \mathscr{G}$. 仿例 1.1 可证"$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathscr{F}$".

又因为 $P(\varphi^{-1}([\alpha,\beta))) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}(\beta+1-\alpha-1) = \beta-\alpha = P([\alpha,\beta))$，所以仿例 1.1 可证

$$“A \in \mathscr{F} \Longrightarrow P(\varphi^{-1}(A)) = P(A))”.$$

故 φ 是一个保测变换.

例 1.3 若 $\{X_n: n\geqslant 0\}$ 是相互独立相同分布的随机变量序列，则它是平稳过程.

例 1.4 设 X_0 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个随机变量，φ 是保测变换，令 $X_0 = X_0\circ\varphi^n(n\geqslant 0)$，则 $X=\{X_n: n=0,1,2,\cdots\}$ 是平稳过程. 由于 X 是由 φ 及 X_0 所决定，故亦称 X 为 (X_0,φ) 平稳过程.

证 由于 φ^s 是保测变换，所以任取正整数 n，及非负整数 s，$t_1,\cdots,t_n$，及 $B\in\mathscr{B}^1$，$i=1,2,\cdots,n$，总有

$$\begin{aligned}P(\bigcap_{i=1}^{n}X_{s+t_i}^{-1}(B_i)) &= P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{t_i}\circ\varphi^s)^{-1}(B_i))\\ &= P((\varphi^s)^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n}X_{t_i}^{-1}(B_i)))\\ &= P(\bigcap_{i=1}^{n}X_{t_i}^{-1}(B_i)).\end{aligned}$$

故 X 是平稳过程.

定义 1.3 设 φ 是测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的保测变换，$g:\Omega\mapsto\mathbf{R}$. 如果

(i) $g\in\mathscr{F}$；

(ii) $g\circ\varphi = g$，

则称 g 是 **φ 不变的**，在无混淆的情况下，简称 g 是不变的.

命题 1.2 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为任一测度空间，φ 是保测变换，$\mathscr{I}$ 是 φ 的不变 σ 代数，则 g 是 φ 不变的充要条件是 $g\in\mathscr{I}$.

证 必要性. 设 g 是 φ 不变的，任取 $B\in\mathscr{B}^1$，有

$$\varphi^{-1}(g^{-1}(B)) = (g\circ\varphi)^{-1}(B) = g^{-1}(B),$$

即 $g^{-1}(B)\in\mathscr{I}$，所以 $g\in\mathscr{I}$.

充分性. 设 $g \in \mathscr{I}$. 若 g 不是 φ 不变的, 即 $g \neq g \circ \varphi$, 则存在 $\omega_0 \in \Omega, g(\omega_0) = \lambda_1 \neq \lambda_2 = g(\varphi(\omega_0))$. 所以

$$\omega_0 \in (g^{-1}(\{\lambda_1\}) - (g \circ \varphi)^{-1}(\{\lambda_1\})) = g^{-1}(\{\lambda_1\}) - \varphi^{-1}(g^{-1}(\{\lambda_1\})),$$

即 $g^{-1}(\{\lambda_1\}) \neq \varphi^{-1}(g^{-1}(\{\lambda_1\}))$, 亦即 $g^{-1}(\{\lambda_1\}) \overline{\in} \mathscr{I}$, 所以 $g \overline{\in} \mathscr{I}$, 矛盾, 故 $\mathscr{G}$ 是 φ 不变的.

命题1.3　设 X_0 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量, φ 是保测变换, $X = \{X_n = X_0 \circ \varphi^n : n \geqslant 0\}$ 是 (X_0, φ) 平稳过程, $Y = X^{(s)} = \{X_{n+s} = X_s \circ \varphi^n : n \geqslant 0\}$ 是 (X_s, φ) 平稳过程. 若

$$f : \mathop{\times}_{n=0}^{\infty} R_n \mapsto \mathbf{R} \quad (R_n \equiv \mathbf{R}),$$

$$f \in \mathrm{b}\left(\mathop{\times}_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_n\right) \quad (\mathscr{B}_n \equiv \mathscr{B}^1),$$

则 $\boldsymbol{E}(f(X)) = \boldsymbol{E}(f(Y))$.

证　由命题1.1即得命题1.3.

定义1.4　设 $X^{(i)} = \{X_t^{(i)} : t \in \mathbf{T}\}$ 是概率空间 $(\Omega^{(i)}, \mathscr{F}^{(i)}, P^{(i)})$ 上的随机过程 $(i = 1,2)$, 状态空间皆为 $(E, \mathscr{E})$. 如果它们的有限维联合分布一样, 即对任何正整数 n, $t_1, \cdots, t_n \in \mathbf{T}$, $B_1, \cdots, B_n \in \mathscr{E}$, 有

$$P^{(1)}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_{t_i}^{(1)} \in B_i\}\right) = P^{(2)}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_{t_i}^{(2)} \in B_i\}\right), \quad (1.4)$$

则称 $X^{(1)}$ 与 $X^{(2)}$ 是**依分布等价的**, 记之为 $X^{(1)} \overset{(\mathrm{d})}{\sim} X^{(2)}$.

定理1.1　设 $\widehat{X} = \{\widehat{X}_n : n \geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{F}}, \widehat{P})$ 上的随机过程, 则

(1)　$\widehat{X}$ 是平稳过程的充要条件是 $\widehat{X} \overset{(\mathrm{d})}{\sim} X$, X 是某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 (X_0, φ) 平稳过程;

(2)　若 $\widehat{X} \overset{(\mathrm{d})}{\sim} X$, X 是 (X_0, φ) 平稳过程, 必有

$$“\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{X},\ [\mathrm{a.e}]\ 存在且有穷 \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_0\circ\varphi^k,\ [\mathrm{a.e}]\ 存在且有穷”.$$

证 (1) 充分性显然成立. 证必要性. 设 $\widehat{X}$ 是概率空间 $(\widehat{\Omega},\widehat{\mathscr{F}},\widehat{P})$ 上的平稳过程. 令

$$\Omega=\mathop{\times}_{n=0}^{\infty}\Omega_n,\ \Omega_n\equiv\mathbf{R},\ \omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)\in\Omega;$$

$$\mathscr{F}=\mathop{\times}_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n,\ \mathscr{F}_n\equiv\mathscr{B}^1;$$

$$X_n(\omega)=\omega_n,\ \omega\in\Omega,\ n\geqslant 0,$$

则 $\mathscr{F}=\sigma(X_n,n\geqslant 0)$. 对任何 $B\in\mathscr{B}^n$,定义

$$\begin{aligned}&P_n(\{\omega:(X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots,X_{n-1}(\omega))\in B\})\\&\quad=\widehat{P}(\{\widehat{\omega}:(\widehat{X}_0(\widehat{\omega}),\widehat{X}_1(\widehat{\omega}),\cdots,\widehat{X}_{n-1}(\widehat{\omega}))\in B\})\\&\qquad\qquad(n\geqslant 1),\end{aligned}\tag{1.5}$$

则 P_n 是 $\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_{n-1})$ 上的概率测度,用 Kolmogorov 定理,在 $\mathscr{F}$ 上存在唯一一个概率测度 P 满足:

$$\begin{aligned}&P(\{\omega:(X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots,X_{n-1}(\omega))\in B\})\\&P_n(\{\omega:(X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots,X_{n-1}(\omega))\in B\})\\&\qquad\qquad(n\geqslant 1,\ B\in\mathscr{B}^n).\end{aligned}\tag{1.6}$$

遂得概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的随机过程 $X=\{X_n:n\geqslant 0\}$. 再定义一个变换:

$$\varphi:\Omega\mapsto\Omega,$$

$$\varphi(\omega)=\omega^{(1)},\ \omega\in\Omega,\ \omega=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots),\tag{1.7}$$

$$\omega^{(1)}=(\omega_0^{(1)},\omega_1^{(1)},\omega_2^{(1)},\cdots)\in\Omega,\ \omega_k^{(1)}=\omega_{k+1}\ (k\geqslant 0).$$

推证 φ 是保测变换. 令

$$\mathscr{G}=\{A:A=(\mathop{\times}_{i=0}^{n-1}A_i)\times(\mathop{\times}_{k=n}^{\infty}\Omega_k),A_i\in\mathscr{B}^1,\Omega_k=\mathbf{R},n\geqslant 1\}$$

$$\mathscr{F}^*=\{A:A\in\mathscr{F},\ \varphi^{-1}(A)\in\mathscr{F}\},$$

则由(1.7)式,对任何 $A \in \mathscr{G}$,必有

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}(A) &= \varphi^{-1}(\{\omega:\omega_i \in A_i,\ i = 0,1\cdots,n-1\}) \\
&= \{\omega:\omega_{i+1} \in A_i,\ i = 0,1,\cdots,n-1\} \\
&= \bigcap_{i=0}^{n-1}\{X_{i+1} \in A_i\} \in \mathscr{F}, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

即 $\mathscr{F}^* \supset \mathscr{G}$. 显然 $\mathscr{F}^*$ 是 σ 代数,所以 $\mathscr{F}^* \supset \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}$,即"$A \in \mathscr{F} \to \varphi^{-1}(A) \in \mathscr{F}$".

再令

$$
\mathscr{F}' = \{A:A \in \mathscr{F},\ P(\varphi^{-1}(A)) = P(A)\},
$$

则由(1.8),(1.5),(1.6)式及 $\hat{X}$ 的平稳性,对任何 $A \in \mathscr{G}$,有

$$
\begin{aligned}
P(\varphi^{-1}(A)) &= P(\bigcap_{i=0}^{n-1}\{X_{i+1} \in A_i\}) \\
&= \hat{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1}\{\hat{X}_{i+1} \in A_i\}) = \hat{P}(\bigcap_{i=0}^{n-1}\{\hat{X}_i \in A_i\}) \\
&= P(\bigcap_{i=0}^{n-1}\{X_i \in A_i\}) = P(A), \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

即 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}'$. 显然 $\mathscr{F}'$ 是 d 系,$\mathscr{G}$ 是 Π 系,所以

$$
\mathscr{F}' \supset d(\mathscr{G}) = \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}.
$$

即"$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow P(\varphi^{-1}(A)) = P(A)$".

以上证明了 φ 是一个保测变换. 显然 X 是(X_0,φ)平稳过程,$\hat{X} \overset{(d)}{\sim} X$.

(2)　设 $\hat{X} \overset{(d)}{\sim} X$,$X$ 是(X_0,φ)平稳过程. 令

$$
S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_0 \circ \varphi^k, \qquad \hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \hat{X}_k,
$$

则由 $\hat{X} \overset{(d)}{\sim} X$ 得知

"$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, [a.e.] 存在且有穷

$$
\Longleftrightarrow P\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n,m\geq N}\left\{|S_m - S_n| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1
$$

$$
\Longleftrightarrow \hat{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n,m\geq N}\left\{|\hat{S}_m - \hat{S}_n| < \frac{1}{k}\right\}\right) = 1
$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{S}_n,\ [\text{a.e.}]\ \text{存在且有穷}".$$

定理证毕.

定理 1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为任一测度空间,$X=\{X_n:n\geqslant 0\}$为其上一族可积函数,而且对任何正整数n、非负整数$s,t_1,\cdots,t_n$,$B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{B}^1$,均有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_{t_i}^{-1}(B_i)\right)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_{s+t_i}^{-1}(B_i)\right), \tag{1.10}$$

则

$$\int_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=0}^{k-1}X_i>0\right\}} X_0\,\mathrm{d}\mu\geqslant 0 \quad (n\geqslant 1), \tag{1.11}$$

$$\int_{\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}X_i>0\right\}} X_0\,\mathrm{d}\mu\geqslant 0. \tag{1.12}$$

证 令 $M_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=0}^{k-1}X_i,\ N_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{k}X_i,$

$$Z_n=M_n\vee 0,\quad Y_n=N_n\vee 0,$$

由(1.10)式知

$$\mu(M_n<\lambda)=\mu(N_n<\lambda). \tag{1.13}$$

又因为

$$\{Z_n>0\}=\{M_n>0\},\quad \{M_n>0\}\subset\{Z_n=M_n\},$$
$$\{M_n\leqslant 0\}\subset\{Z_n=0\}, \tag{1.14}$$

所以由(1.13),(1.14)式得:当$\lambda>0$时,

$$\begin{aligned}\mu(Z_n<\lambda)&=\mu(Z_n>0,\ Z_n<\lambda)+\mu(Z_n\leqslant 0,\ Z_n<\lambda)\\&=\mu(M_n>0,\ Z_n<\lambda)+\mu(M_n\leqslant 0,\ Z_n<\lambda)\\&=\mu(M_n>0,\ M_n<\lambda)+\mu(M_n\leqslant 0)\\&=\mu(M_n<\lambda)=\mu(N_n<\lambda)\\&=\mu(Y_n<\lambda);\end{aligned}$$

当$\lambda\leqslant 0$时,$\mu(Z_n<\lambda)=0=\mu(Y_n<\lambda)$.故

$$\mu(Y_n<\lambda)=\mu(Z_n<\lambda)\quad(\lambda\in\mathbf{R}). \tag{1.15}$$

又因为

$$X_0 + Y_n = \max\{X_0, X_0 + N_n\} = \max\{X_0, M_{n+1}\} = M_{n+1} \geqslant M_n, \tag{1.16}$$

所以

$$X_0 \geqslant M_n - Y_n = Z_n - Y_n \quad (\text{在}\{Z_n > 0\} = \{M_n > 0\}\text{上}). \tag{1.17}$$

由(1.14),(1.17)式得

$$\int_{\{M_n > 0\}} X_0 \mathrm{d}\mu = \int_{\{Z_n > 0\}} X_0 \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\{Z_n > 0\}} (Z_n - Y_n) \mathrm{d}\mu. \tag{1.18}$$

而 $Y_n \geqslant 0$,所以

$$Z_n - Y_n \leqslant 0 \quad (\text{在}\{Z_n \leqslant 0\}\text{上}), \tag{1.19}$$

由(1.18),(1.19),(1.15)式得

$$\int_{\{M_n > 0\}} X_0 \mathrm{d}\mu \geqslant \int_\Omega (Z_n - Y_n) \mathrm{d}\mu = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

即(1.11)式成立.在(1.11)式中,令 $n \to \infty$,取极限即得(1.12)式,定理证毕.

系　若 $\mu = P$ 是概率测度,则对一切 $\lambda \in \mathbf{R}$,均有

$$\int_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1} X_i > \lambda\right\}} X_0 \mathrm{d}P \geqslant \lambda P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_i > \lambda\right); \tag{1.11$'$}$$

$$\int_{\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i > \lambda\right\}} X_0 \mathrm{d}P \geqslant \lambda P\left(\sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i > \lambda\right). \tag{1.12$'$}$$

证　令 $X^{(\lambda)} = \{X_n^{(\lambda)} = X_n - \lambda : n \geqslant 0\}$,则 $X^{(\lambda)}$ 亦满足定理1.2中的条件,在(1.11),(1.12)式中以 $X_i - \lambda$ 代 X_i 即得(1.11)′,(1.12)′式.

定理 1.3(Birkhoff)　设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为任一 σ 有限测度空间,φ 为保测变换,$f: \Omega \mapsto \mathbf{R}$, $f \in \mathscr{F}$, $\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty$,则

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k) = g,\ [\text{a.e.}], \tag{1.20}$$

$$\int_\Omega |g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty; \tag{1.21}$$

(2) $$g(\varphi) = g. \tag{1.22}$$

证 令 Q 为有理数集，由 μ 的 σ 有限性可设 $\Omega_n \in \mathscr{F}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, $\mu(\Omega_n) < \infty$. 再令

$$B_{a,b} = \left\{\omega: \lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega)) < a < b < \lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega))\right\},$$

则

$$A \equiv \left\{\omega: \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega))\ \text{不存在}\right\} = \bigcup_{\substack{a,b\in Q\\ a<b}} B_{a,b}$$

(此处视收敛到 ∞ 的序列的极限存在). 因此为证(1.20) 式，只需证明：

$$\mu(B_{a,b}) = 0 \quad (a,b \in Q). \tag{1.23}$$

首先证明对一切 $a,b \in Q$, $a < b$, 有 $\mu(B_{a,b}) < \infty$. 由于 $a < b$, 故 $b > 0$ 与 $-a > 0$ 至少有一个成立.

(a) 设 $b > 0$. 推证

$$\text{“}C \subset B_{a,b},\ C \in \mathscr{F},\ \mu(C) < \infty \Longrightarrow \mu(C) \leqslant \frac{1}{b}\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu\text{”}. \tag{1.24}$$

果能如此，则

$$\mu(B_{a,b}) = \lim_{n\to\infty}\mu(\Omega_n B_{a,b}) \leqslant \frac{1}{b}\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

$$A = \left\{\omega: \sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f - b\mathbf{1}_C)(\varphi^k(\omega)) > 0\right\}. \tag{1.25}$$

由定理 1.2 中的(1.12) 式得

$$\int_A (f - b\mathbf{1}_C)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0. \tag{1.26}$$

但是,由 $B_{a,b}$ 的定义,$b\circ\varphi^k=b$, $b\mathbf{1}_C\leqslant b$ 及(1.25)式,可得

$$
\begin{aligned}
B_{a,b} &\subset \left\{\omega:\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega))>b\right\}\\
&\subset \left\{\omega:\sup_{n\geqslant1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega))>b\right\}\\
&= \left\{\omega:\sup_{n\geqslant1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f-b)(\varphi^k(\omega))>0\right\}\\
&\subset \left\{\omega:\sup_{n\geqslant1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f-b\mathbf{1}_C)(\varphi^k(\omega))>0\right\}\\
&= A.
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

由 $C\subset B_{a,b}\subset A$ 及(1.26)式,得

$$
\begin{aligned}
\mu(C)\leqslant\mu(C\cap A) &= \int_A \mathbf{1}_C\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{b}\int_A f\mathrm{d}\mu\\
&\leqslant\frac{1}{b}\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty.
\end{aligned}
$$

(b) 设 $-a>0$. 在(a)中以 $-a$ 和 $-f$ 分别代 b 和 f,则类似地亦可证

$$
\text{“}C\subset B_{a,b},\ C\in\mathscr{F},\ \mu(C)<\infty\Longrightarrow
$$

$$
\mu(C)\leqslant\frac{1}{-a}\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty\text{”}.
$$

故 $\mu(B_{a,b})<\infty$ $(a<b,\ a,b\in Q)$.

其次,推证 $\mu(B_{a,b})=0$ $(a<b,\ a,b\in Q)$. 已知 $\mu(B_{a,b})<\infty$. 取 $h=\mathbf{1}_{B_{a,b}}$,推证

$$
\int_\Omega(f-b)h\mathrm{d}\mu\geqslant0. \tag{1.28}
$$

令

$$
G=\left\{\omega:\sup_{n\geqslant1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[(f-b)h](\varphi^k(\omega))>0\right\},
$$

由 $\mu(B_{a,b})<\infty$, f 可积,得 $(f-b)h$ 是可积的. 因此由(1.12)式得

$$\int_G (f-b)h\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0. \tag{1.29}$$

但是,由

$$\begin{aligned} B_{a,b} &= \left\{\omega: \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(\omega)) < a < b \right. \\ &\qquad \left. < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(\omega))\right\} \\ &= \left\{\omega: \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{k+1}(\omega)) < a < b \right. \\ &\qquad \left. < \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{k+1}(\omega))\right\} \end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned} \omega \in B_{a,b} &\Rightarrow \varphi(\omega) \in B_{a,b} \Rightarrow \varphi^k(\omega) \in B_{a,b} \\ &\Rightarrow h(\varphi^k(\omega)) = 1. \end{aligned} \tag{1.30}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{“}\omega \in B_{a,b} \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (fh)(\varphi^k(\omega)) \\ = \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(\omega)) > b\text{”}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\text{“}\omega \in B_{a,b} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} bh(\varphi^k(\omega)) = b \quad (n \geqslant 1)\text{”}, \tag{1.32}$$

由(1.31),(1.32)式得

$$\Omega - B_{a,b} \supset \Omega - G. \tag{1.33}$$

若注意 $h = \mathbf{1}_{B_{a,b}}$, $h(\omega) = 0$ (当 $\omega \in \Omega - G$) 及(1.29)式,可得

$$\int_\Omega (f-b)\,\mathrm{d}\mu = \int_G (f-b)h\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

类似可证

$$\int_\Omega (a-f)h\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0. \tag{1.34}$$

(1.28) 与(1.34) 式相加,即得

$$(a-b)\mu(B_{a,b})\geqslant 0.$$

而 $a-b<0$,所以 $\mu(B_{a,b})=0\ (a<b,\ a,b\in Q)$.令

$$g(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega)), & 当\ \omega\ \overline{\in}\ \Lambda,\\ 0, & 当\ \omega\in\Lambda,\end{cases}$$

则(1.20)式成立.下面证明(1.21)式成立.由于 φ 是保测变换,所以

$$\int_\Omega|f(\varphi^k)|\mathrm{d}\mu=\int_\Omega'|f|(\varphi^k)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu,$$

从而

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g|\mathrm{d}\mu&=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{n=0}^{n-1}f(\varphi^k)\right|\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(\varphi^k)|\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty.\end{aligned}$$

任取 $\omega\ \overline{\in}\ \Lambda$,有

$$\begin{aligned}g(\omega)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\omega))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\varphi^k(\omega))\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(\varphi(\omega)))=g(\varphi(\omega)).\end{aligned}\tag{1.35}$$

(1.35)式不仅说明 $\omega\ \overline{\in}\ \Lambda$ 时,$g(\omega)=g(\varphi(\omega))$,而且说明

$$“\omega\ \overline{\in}\ \Lambda\Longleftrightarrow\varphi(\omega)\ \overline{\in}\ \Lambda”.$$

所以当 $\omega\in\Lambda$ 时,$g(\omega)=0=g(\varphi(\omega))$.故对一切 $\omega\in\Omega$,有 $g(\omega)=g(\varphi(\omega))$.定理证毕.

定理 1.4　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间,X 是(X_0,φ)平稳过程,$\boldsymbol{E}(|X_0|)<\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}X_k=\boldsymbol{E}(X_0|\mathscr{I}),\ [\text{a.e.}],\ ([L^1]),\tag{1.36}$$

其中 $X_k=X_0\circ\varphi^k$,$\mathscr{I}=\{A:A\in\mathscr{F},\ \varphi^{-1}(A)=A\}$ 为 φ 的不变

σ 代数. 特别地, 若 φ 还是遍历的(即 $\mathscr{I}$ 中的集合之概率非 0 即 1), 则 $\boldsymbol{E}(X_0 \mid \mathscr{I}) = \boldsymbol{E}(X_0)$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k = \boldsymbol{E}(X_0),\ [\text{a.e.}],\ [L^1]. \tag{1.37}$$

此即平稳过程的强大数定律.

证 由定理 1.3 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k = g,\ [\text{a.e.}],$$
$$\boldsymbol{E}(|g|) \leqslant \boldsymbol{E}(|X_0|) < \infty.$$

推证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}X_k = g,\ [L^1]$. 令

$$\mathscr{H} = \{f:\ f:\Omega \mapsto \mathbf{R},\ f \in \mathscr{F},\ \boldsymbol{E}(|f|) < \infty\},$$

定义

$$T_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k),\quad f \in \mathscr{H}, \tag{1.38}$$

由定理 1.3 知对任何 $f \in \mathscr{H}$,

$$\lim_{n\to\omega} T_n f,\ [\text{a.e.}]\ \text{收敛且有穷}.$$

所以可令

$$T_\infty f = \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} T_n f, & \text{当极限收敛且有穷},\\ 0, & \text{反之}\end{cases} \qquad (f \in \mathscr{H}).$$

由于 φ 是保测变换, 所以, 由命题 1.3 有

$$\boldsymbol{E}(|f(\varphi^k)|) = \boldsymbol{E}(|f|)\quad (f \in \mathscr{H}), \tag{1.39}$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|T_n f|) &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{E}(|f(\varphi^k)|)\\ &= \boldsymbol{E}(|f|)\quad (f \in \mathscr{H}).\end{aligned} \tag{1.40}$$

由(1.21)式得

$$\boldsymbol{E}(|T_\infty f|) \leqslant \boldsymbol{E}(|f|)\quad (f \in \mathscr{H}). \tag{1.41}$$

由 T_n, T_∞ 的定义还有

$$\sup_{\omega\in\Omega}|T_nf(\omega)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sup_{\omega\in\Omega}|f(\varphi^k(\omega))|$$

$$\leqslant\sup_{\omega\in\Omega}f(\omega)|,\tag{1.42}$$

$$\sup_{\omega\in\Omega}|T_\infty f(\omega)|\leqslant\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|\quad(f\in\mathscr{H}).\tag{1.43}$$

任给 $\varepsilon>0$,取正数 K,使

$$\int_{|X_0|>K}|X_0|\mathrm{d}P<\varepsilon,\tag{1.44}$$

令

$$Y_0=\begin{cases}0, & 当|X_0|>K,\\ X_0, & 当|X_0|\leqslant K,\end{cases}\tag{1.45}$$

则由(1.40),(1.41)式及 $X_0-Y_0\in\mathscr{H}$,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-g\right|\right)&=\boldsymbol{E}(|T_nX_0-T_\infty X_0|)\\&\leqslant\boldsymbol{E}(|T_nX_0-T_nY_0|)+\boldsymbol{E}(|T_nY_0-T_\infty Y_0|)\\&\quad+\boldsymbol{E}(|T_\infty Y_0-T_\infty X_0|)\\&\leqslant2\boldsymbol{E}(|X_0-Y_0|)+\boldsymbol{E}(|T_nY_0-T_\infty Y_0|)\\&=2\int_{|X_0|>K}|X_0|\mathrm{d}P+\boldsymbol{E}(|T_nY_0-T_\infty Y_0|)\\&\leqslant2\varepsilon+\boldsymbol{E}(|T_nY_0-T_\infty Y_0|).\end{aligned}\tag{1.46}$$

而由 $Y_0\in\mathscr{H}$及(1.42),(1.43)式得

$$\begin{aligned}&\sup_{\omega\in\Omega}|T_nY_0(\omega)-T_\infty Y_0(\omega)|\\&\quad\leqslant\sup_{\omega\in\Omega}|T_nY(\omega)|+\sup_{\omega\in\Omega}|T_\infty Y_0(\omega)|\\&\quad\leqslant2\sup_{\omega\in\Omega}|Y_0(\omega)|\leqslant2K,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}T_nY_0=T_\infty Y_0,\ [\text{a.e.}].$$

所以,由控制收敛定理及(1.46)式得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-g\right|\right)\\&\quad\leqslant2\varepsilon+\boldsymbol{E}(\limsup_{n\to\infty}|T_nY_0-T_\infty Y_0|)=2\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 可任意小得知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k = g,\ [L^1]. \tag{1.47}$$

再证

$$g = \boldsymbol{E}(X_0 \mid \mathscr{I}). \tag{1.48}$$

由定理 1.3 知 $g = g(\varphi)$，从而由命题 1.2 知 $g \in \mathscr{I}$. 所以为证 (1.48) 式，只需证明：

$$\int_B g\mathrm{d}P = \int_B X_0 \mathrm{d}P \quad (B \in \mathscr{I}). \tag{1.49}$$

事实上，任取 $B \in \mathscr{I}$，必有 $\varphi^{-1}(B) = B$，从而

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(B)}(\omega) = \mathbf{1}_B(\varphi(\omega)) = \cdots = \mathbf{1}_B(\varphi^k(\omega)).$$

所以由命题 1.3 有

$$\begin{aligned}\int_B T_n X_0 \mathrm{d}P &= \int_\Omega \mathbf{1}_B \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_0(\varphi^k)\mathrm{d}P \\ &= \int_\Omega \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_0(\varphi^k)\,\mathbf{1}_B(\varphi^k)\mathrm{d}P \\ &= \int_\Omega \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(X_0\,\mathbf{1}_B)(\varphi^k)\mathrm{d}P \\ &= \int_\Omega X_0\,\mathbf{1}_B \mathrm{d}P = \int_B X_0 \mathrm{d}P.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int_B X_0\mathrm{d}P - \int_B g\mathrm{d}P\right| &= \left|\int_B (T_n X_0 - g)\mathrm{d}P\right| \\ &\leqslant \int_B |T_n X_0 - g|\,\mathrm{d}P = \boldsymbol{E}\left(\mathbf{1}_B\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k - g\right|\right).\end{aligned} \tag{1.50}$$

令 $n \to \infty$ 并注意(1.47)式，即得(1.49). 定理证毕.

下面研究连续时间参数的平稳过程. 为使确定起见，只研究 $\mathbf{T} = [0,\infty)$ 的情况.

定义 1.5 设 $\{\varphi^t : t \in \mathbf{T}\}$ 是测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上一族保测变换. 若 $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{s+t}$ $(s,t,s+t \in \mathbf{T})$，则称 $\{\varphi^t : t \in \mathbf{T}\}$ 为**相容**

保测变换族.

显然,若 X_0 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,$\{\varphi^t:t\in\mathbf{T}=[0,\infty)\}$ 是其上的相容的保测变换族,则 $X=\{X_t=X\circ\varphi^t:t\in\mathbf{T}\}$ 是平稳过程,称 X 为**$(X_0,\varphi^t,t\in\mathbf{T})$ 平稳过程**.

如同离散时间参数的平稳类似,对连续时间参数,仍令

$$\mathscr{I}_t=\{A:A\in\mathscr{F},\ (\varphi^t)^{-1}(A)=A\}$$

为 φ^t 的不变σ代数,而 $\mathscr{I}\equiv\bigcap\limits_{t\in\mathrm{T}}\mathscr{I}_t=\bigcap\limits_{t>0}\mathscr{I}_t$ 称为$\{\varphi^t:t\in\mathbf{T}\}$ 的**不变 $\boldsymbol{\sigma}$ 代数**.

对于连续时间参数的情况,我们有类似定理 1.3 和定理 1.4 的结果.

定理 1.3′　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为任一测度空间,$\{\varphi^t:t\in\mathbf{T}=[0,\infty)\}$ 是一族相容的保测变换,$f:\Omega\mapsto\mathbf{R}$, $f\in\mathscr{F}$, $\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty$,

$$\Phi:\mathbf{T}\times\Omega\mapsto\Omega,\quad \Phi\in(\mathscr{B}^1\cap\mathbf{T})\times\mathscr{F}/\mathscr{F},$$
$$\Phi(t,\omega)=\varphi^t(\omega),\quad t\in\mathbf{T},\ \omega\in\Omega,$$

则

$$(1)\quad \lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t=g(\omega),\ [\mathrm{a.e.}]\tag{1.51}$$

$$\int_\Omega|g|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty;\tag{1.52}$$

$$(2)\quad g(\varphi^t)=g\quad(t\in\mathbf{T}).\tag{1.53}$$

证　(1)　任取 $d>0$.令

$$X_n^{(d)}(\omega)=\int_{nd}^{(n+1)d}f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\quad(n\geqslant0,\ \omega\in\Omega),\tag{1.54}$$

推证

$$X_n^{(d)}=X_0^{(d)}(\varphi^{nd}).\tag{1.55}$$

事实上

$$X_n^{(d)}(\omega)=\int_{nd}^{(n+1)d}f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t=\int_0^d f(\Phi(t+nd,\omega))\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^d f(\Phi(t, \varphi^{nd}(\omega)))\mathrm{d}t = X_0^{(d)}(\varphi^{nd}(\omega)). \quad (1.56)$$

易证

$$\int_\Omega |X_n^{(d)}(\omega)| \mu(\mathrm{d}\omega) \leqslant \int_{nd}^{(n+1)d} \mathrm{d}t \left(\int_\Omega |f(\Phi(t,\omega))| \mu(\mathrm{d}\omega) \right)$$

$$= \int_{nd}^{(n+1)d} \mathrm{d}t \left(\int_\Omega |f(\omega)| \mu(\mathrm{d}\omega) \right) < \infty \quad (n \geqslant 0).$$

因此,由定理 1.3 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_0^{(d)}(\varphi^{kd}) = g_d, \ [\mathrm{a.e.}], \quad (1.57)$$

$$\int_\Omega |g_d| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega |X_0^{(d)}| \mathrm{d}\mu < \infty. \quad (1.58)$$

令 $g = g_d/d$, $[x]$ 表不大于 x 的最大整数,则对任何 $c > 0$,有

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \int_0^c f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{\left[\frac{c}{d}\right]d} \int_0^{\left[\frac{c}{d}\right]d} f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \int_{\left[\frac{c}{d}\right]d}^c f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t \right). \quad (1.59)$$

但是,由(1.56),(1.57)式有

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{\left[\frac{c}{d}\right]d} \int_0^{\left[\frac{c}{d}\right]d} f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{d} \left[\frac{1}{\left[\frac{c}{d}\right]} \sum_{k=0}^{\left[\frac{c}{d}\right]d} X_0^{(d)}(\varphi^{kd}(\omega)) \right]$$

$$= \frac{1}{d} g_d(\omega) = g(\omega), \ [\mathrm{a.e.}]. \quad (1.60)$$

显然,若令

$$\widehat{X}_n^{(d)}(\omega) = \int_{nd}^{(n+1)d} |f(\Phi(t,\omega))| \mathrm{d}t \quad (n \geqslant 0, \ \omega \in \Omega),$$

则仿(1.57),(1.58)式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{X}_0^{(d)}(\varphi^{kd})=\widehat{g}_d,\ [\text{a.e.}],\tag{1.57$'$}$$

$$\int_\Omega|\widehat{g}_d|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega|\widehat{X}_0^{(d)}|\,\mathrm{d}\mu<\infty.\tag{1.58$'$}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\widehat{X}_n^{(d)}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\widehat{X}_0^{(d)}(\varphi^{nd}(\omega))=0,\ [\text{a.e.}].\tag{1.61}$$

因此由$\widehat{X}_n$的定义得

$$\begin{aligned}&\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\left|\int_{[\frac{c}{d}]d}^{0}f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_{[\frac{c}{d}]d}^{([\frac{c}{d}]+1)d}|f(\Phi(t,\omega))|\,\mathrm{d}t\\&=0,\ [\text{a.e.}].\end{aligned}\tag{1.62}$$

由(1.59),(1.60),(1.62)式得

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t=g(\omega),\ [\text{a.e.}].$$

显然上式右端之g与d的选取无关.

而由(1.58),(1.56)式及φ^t的保测性,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g|\,\mathrm{d}\mu&\leqslant\int_\Omega\frac{1}{d}|X_0^{(d)}|\,\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega\frac{1}{d}\left(\left|\int_0^d f(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\right|\right)\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega\frac{1}{d}\left(\int_0^d|f(\varphi^t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{d}\int_0^d\mathrm{d}t\left(\int_\Omega|f(\varphi^t)|\,\mathrm{d}\mu\right)\\&=\frac{1}{d}\int_0^d\mathrm{d}t\left(\int_\Omega|f|\,\mathrm{d}\mu\right)=\int_\Omega|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty.\end{aligned}$$

(2)　$g(\varphi^t(\omega))=\lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c f(\Phi(s,\varphi^t(\omega)))\mathrm{d}s$

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c f(\Phi(s+t,\omega))\mathrm{d}s$$

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_t^{t+c} f(\Phi(\nu,\omega))\mathrm{d}\nu = g(\omega).$$

定理 1.4′ 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是任一概率空间, X 是 $(X_0,\varphi^t, t\in\mathbf{T})$ 平稳过程, $\boldsymbol{E}(|X_0|)<\infty$, $\{\varphi^t:t\in\mathbf{T}\}$, $\Phi(t,\omega)$ 的意义如定理 1.3′, $\mathscr{I}_t(t\in\mathbf{T})$, $\mathscr{I}$ 的意义如前,则

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t = \boldsymbol{E}(X_0\,|\,\mathscr{I}),\ [\text{a.e.}],\ [L^1]. \tag{1.63}$$

特别地,若 $\{\varphi^t:t\in\mathbf{T}\}$ 还是遍历的(即 $\mathscr{I}$ 中的集合的概率非 0 即 1),则 $\boldsymbol{E}(X_0\,|\,\mathscr{I}) = \boldsymbol{E}(X_0)$,从而

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t = \boldsymbol{E}(X_0),\ [\text{a.e.}],\ [L^1], \tag{1.64}$$

此即连续时间参数情况的平稳过程的强大数定律.

证 任取 $d>0$,令

$$X_n^{(d)}(\omega) = \int_{nd}^{(n+1)d} X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\quad(n\geqslant 0,\ \omega\in\Omega),$$

$$X^{(d)} = \{X_n^{(d)}:n\geqslant 0\},$$

仿定理 1.3′ 可证 $X^{(d)}$ 是 $(X_0^{(d)},\varphi^d)$ 平稳过程, $\boldsymbol{E}(|X_0^{(d)}|)<\infty$. 所以由定理 1.4,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_0^{(d)}(\varphi^{kd}) = \boldsymbol{E}(X_0^{(d)}\,|\,\mathscr{I}_d),\ [\text{a.e.}],\ [L^1]. \tag{1.65}$$

因此,仿定理 1.3′ 可证

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t = \frac{1}{d}\boldsymbol{E}(X_0^{(d)}\,|\,\mathscr{I}_d),\ [\text{a.e.}],\ [L^1] \tag{1.66}$$

对一切 $d>0$ 成立. 所以(1.66)式左边对一切 $\mathscr{I}_d$ 可测 $(d>0)$,从而对 $\mathscr{I}=\bigcap_{d>0}\mathscr{I}_d$ 可测. 又因为任取

$$A \in \mathscr{I} = \bigcap_{d>0} \mathscr{I}_d,$$

由(1.66)式及Fubini定理,有

$$\begin{aligned}
\int_A \left(\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P &= \int_A \frac{1}{d}X_0^{(d)}\mathrm{d}P \\
&= \int_A \frac{1}{d}\left(\int_0^d X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P \\
&= \frac{1}{d}\int_0^d \mathrm{d}t\left(\int_A X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}P\right) \\
&= \frac{1}{d}\int_0^d \mathrm{d}t\left(\int_A X_0(\omega)\mathrm{d}P\right) = \int_A X_c(\omega)\mathrm{d}P,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d}\boldsymbol{E}(X_0^{(d)} \mid \mathscr{I}_d) &= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t \\
&= \boldsymbol{E}(X_0 \mid \mathscr{I}),\ [\text{a.e.}].
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{c}\int_0^c X_0(\Phi(t,\omega))\mathrm{d}t = \boldsymbol{E}(X_0 \mid \mathscr{I}),\ [\text{a.e.}],\ [L^1].$$

定理证毕.

§2　宽平稳过程的一般概念及正交随机测度

在这一节中,我们将研究所谓宽平稳过程,也有人称之为二阶矩过程. 这里恒设 $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$. 但我们主要感兴趣的是 $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ 或 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 总设 Π 为复平面,对于 Π 中任一复数 x,总用 $\overline{x}$ 表示 x 的共轭复数.

定义 2.1　设 $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的复值随机过程,即 $X_t = U_t + \mathrm{i}V_t$, $U = \{U_t : t \in \mathbf{T}\}$, $V = \{V_t : t \in \mathbf{T}\}$ 皆为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的实值随机过程. 如果 X 满足:

(i)　$\boldsymbol{E}(|X_t|^2) < \infty$ $(t \in \mathbf{T})$;

(ii)　$\boldsymbol{E}(X_{t+\tau}\overline{X}_t) = B(\tau)$ 不依赖于 $t \in \mathbf{T}$,

则称 X 是**宽平稳过程**,$B(\tau)$ 称为 X 的相关函数.

显然,一般而言,相关函数是实变复值函数.特别地,若 X 是实值宽平稳过程,其相关函数自然也是实值的.

若 $\mathbf{T}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,则称宽平稳过程 $X=\{X_n:n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为**宽平稳序列**.

命题 2.1 设 $B(\tau)$ 是宽平稳过程 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 的相关函数,则

(1) $B(0)\geqslant 0$,且"$B(0)=0\Longleftrightarrow P(X_t=0)=1,\ t\in\mathbf{T}$";

(2) $B(-\tau)=\overline{B(\tau)};\ \tau\in\mathbf{T}$;

(3) $|B(\tau)|\leqslant B(0);\ \tau\in\mathbf{T}$;

(4) $B(\tau)$ 是非负定的,即对任意自然数 n,任意复数 $a_1,\cdots,a_n$,任意 $t_1,\cdots,t_n\in\mathbf{T}$,有

$$\sum_{i,j=1}^{n}B(t_i-t_j)a_i\overline{a_j}\geqslant 0.$$

证 (1) ~ (3) 显然成立.证(4).

$$\sum_{i,j=1}^{n}B(t_i-t_j)a_i\overline{a_j}=\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_{t_j}\overline{X}_{t_j})a_i\overline{a_j}$$

$$=\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n}a_iX_{t_i}\right|^2\right)\geqslant 0.$$

以后如不特别申明,恒用 $B(\tau)$ 表示宽平稳过程的相关函数,$\mathrm{Re}(x)$ 表示复数 x 的实部.

定义 2.2 设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程,$\boldsymbol{E}(|X_t|^2)<\infty\ (t\in\mathbf{T})$, $t_0\in\mathbf{T}$.如果

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t_0+h\in\mathbf{T}}}\boldsymbol{E}\left(\left|X_{t_0+h}-X_{t_0}\right|^2\right)=0,$$

则称 X 在 t_0 **均方连续**.若 X 在 $\mathbf{T}$ 中任一点皆均方连续,则称 X 是**均方连续的**.

命题 2.2 设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}=(-\infty,\infty)\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的宽平稳过程,则下列陈述等价:

(i) $B(\tau)$在0连续；

(ii) X在0均方连续；

(iii) X均方连续；

(iv) $B(\tau)$在$\mathbf{T}$连续.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii)和(iii). 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|X_{t+\tau}-X_t|^2)&=2B(0)-B(\tau)-B(-\tau)\\&=2B(0)-B(\tau)-\overline{B(\tau)}\\&=2\mathrm{Re}(B(0)-B(\tau))\\&\leqslant 2|B(0)-B(\tau)|,\end{aligned}$$

所以(i)$\Longrightarrow$(ii)和(iii).

(iii)$\Longrightarrow$(iv). 用Schwarz不等式,有

$$\begin{aligned}|B(t+\tau)-B(\tau)|&=|\boldsymbol{E}((X_{t+\tau}-X_\tau)\overline{X}_0)|\\&\leqslant\sqrt{\boldsymbol{E}(|X_{t+\tau}-X_\tau|^2)}\sqrt{B(0)},\end{aligned}$$

所以(iii)$\Longrightarrow$(iv).

而(iv)$\Longrightarrow$(i),(iii)$\Longrightarrow$(ii)是显然的,命题得证.

命题2.3 为使$B(\tau)(\tau\in\mathbf{R})$是某个均方连续的宽平稳过程的相关函数的充要条件是在可测空间$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$上存在一个有限测度$F(A)$,使

$$B(\tau)=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau}F(\mathrm{d}\lambda).\tag{2.1}$$

此时$B(\tau)$与$F(A)$相互唯一决定.显然$B(0)=F(\mathbf{R})$.

证 必要性.设$B(\tau)$是某均方连续的宽平稳过程的相关函数,则它必连续且非负定,$B(0)<\infty$.因此,由Хинчин-Bochner定理(参见[27]第二章§6)在$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$上存在唯一的有限测度$F$,使(2.1)式成立.

充分性.若存在$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$上的有限测度$F(A)$,使(2.1)式成立.由$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau}|=1$,$F$是有限测度,用控制收敛定理得知$B(\tau)$在$\mathbf{R}$上连续,且有$B(-\tau)=\overline{B(\tau)}$.此外,对任意自然数$n$,任意复数$a_1,\cdots,a_n$,任意$t_1,\cdots,t_n\in\mathbf{R}$,还有

$$\sum_{j,k=1}^{n} B(t_j - t_k)a_j \overline{a_k} = \sum_{j,k=1}^{n} \left\{ \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(t_j - t_k)} F(d\lambda) \right\} a_j \overline{a_k}$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda t_j a_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda t_k a_k} \right) F(d\lambda)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda t_j a_j} \right|^2 F(d\lambda) \geqslant 0, \qquad (2.2)$$

此即 $B(\tau)$ 是非负定的.

设 $B(\tau)$ 是实值函数,则 $B(-\tau) = \overline{B(\tau)} = B(\tau)$. 若令

$$\Gamma_{t_1,\cdots,t_n} = (b_{j,k},\ 1 \leqslant j,k \leqslant n)$$

是 n 阶方阵,其中 $b_{j,k} = B(t_j - t_k)$,则 $\Gamma_{t_1,\cdots,t_n}$ 是非负定对称 n 阶方阵(因 $B(\tau) = B(-\tau)$,所以 $b_{j,k} = B(t_j - t_k) = B(t_k - t_j) = b_{k,j}$,而 $\Gamma_{t_1,\cdots,t_n}$ 之非负定性由 $B(\tau)$ 之非负定性可得). 再令

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},\ s' \text{ 为 } s \text{ 的转置},\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

$$\psi_{t_1,\cdots,t_n}(s) = \exp\left\{ is'\mu - \frac{1}{2} s' \Gamma_{t_1,\cdots,t_n} s \right\} \qquad (2.3)$$

是 n 维正态分布的特征函数. 今取 $\mu_k \equiv 0$,若在(2.3)式中令 $s_j = 0$ (当 $m < j \leqslant n$),则

$$\psi_{t_1,\cdots,t_n}(s_1, s_2, \cdots, s_n, 0, 0) = \psi_{t_1,\cdots,t_m}(s, \cdots, s_m)$$

是 m 维正态分布的特征函数. 又

$$\psi_{t_1,\cdots,t_n}(s_1, \cdots, s_n) = \psi_{t_{l_1},\cdots,t_{l_n}}(s_{l_1}, \cdots, s_{l_n}),$$

所以 $\{\psi_{t_1,\cdots,t_n}(s_1,\cdots,s_n): t_1,\cdots,t_n \in \mathbf{T},\ n \geqslant 1\}$ 所决定的分布函数族 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n): t_1,\cdots,t_n \in \mathbf{T},\ n \geqslant 1\}$ 满足相容性条件,故存在实值正态随机过程 $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$,使其有限维联合分布为

$$P(X_{t_1}\leqslant x_1,\cdots,X_{t_n}\leqslant x_n)=F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).\quad(2.4)$$

显然

$$\boldsymbol{E}(|X_t|^2)<\infty,\quad \boldsymbol{E}(X_{t+\tau}\overline{X}_t)=B(\tau).$$

若 $B(\tau)$ 是复值函数，令 $B(\tau)=B_1(\tau)+\mathrm{i}B_2(\tau)$. 现任取 $t_1,t_n\in\mathbf{T}$，令

$$b_{j,k}^{(1)}=B_1(t_j-t_k),\ b_{j,k}^{(2)}=B_2(t_j-t_k),\ 1\leqslant j,k\leqslant n,$$

由于 $\overline{B(\tau)}=B(-\tau)$，所以 $B_1(\tau)=B_1(-\tau)$，$B_2(\tau)=-B_2(-\tau)$，从而 $b_{j,k}^{(1)}=b_{k,j}^{(1)}$，$b_{j,k}^{(2)}=-b_{k,j}^{(2)}$. 因此，若令

$$\Gamma^{(l)}=(b_{j,k}^{(l)},\ 1\leqslant j,k\leqslant n),\quad l=1,2,$$

则

$$\Gamma^{(1)}=\Gamma^{(1)'},\quad \Gamma^{(2)}=-\Gamma^{(2)'}\qquad(2.5)$$

(矩阵或向量上加一撇表示其转置). 令

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\Gamma^{(1)} & -\Gamma^{(2)}\\ \Gamma^{(2)} & \Gamma^{(1)}\end{pmatrix}=(\gamma_{j,k},\ 1\leqslant j,k\leqslant 2n),$$

其中

$$\gamma_{j,k}=\begin{cases}b_{j,k}^{(1)}, & \text{当 } 1\leqslant j,k\leqslant n,\\ b_{j,k}^{(1)}, & \text{当 } n+1\leqslant j,k\leqslant 2n,\\ -b_{j,k}^{(2)}=b_{k,j}^{(2)}, & \text{当 } 1\leqslant j\leqslant n,\ n+1\leqslant k\leqslant 2n,\\ b_{j,k}^{(2)}, & \text{当 } n+1\leqslant j\leqslant 2n,\ 1\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

显然 Γ 是对称的 $2n$ 阶方阵. 推证 Γ 是非负定的. 又任取 $2n$ 维复值列向量 $a=b+\mathrm{i}c$，由 $\Gamma=\Gamma'$ 有

$$\begin{aligned}a'\Gamma\overline{a}&=b'\Gamma b+c'\Gamma c+\mathrm{i}c'\Gamma b-\mathrm{i}b'\Gamma c\\&=b'\Gamma b+c'\Gamma c.\end{aligned}\qquad(2.6)$$

所以为证 Γ 是非负定的，只需对 $2n$ 维实值向量

$$a=\begin{pmatrix}a^{(1)}\\ \\ a^{(2)}\end{pmatrix},\quad a^{(1)}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad a^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ \vdots\\ a_{2n}\end{pmatrix},$$

有

$$a'\Gamma a \geqslant 0 \tag{2.7}$$

即可.但是 $B(\tau) = B_1(\tau) + \mathrm{i}B_2(\tau)$ 是非负定的,所以,若令

$$\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{b}_{j,k}, 1 \leqslant j \leqslant k), \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_{j,k} &= B(t_j - t_k) = B_1(t_j - t_k) + \mathrm{i}B_2(t_j - t_k) \\ &= b_{j,k}^{(1)} + \mathrm{i}b_{j,k}^{(2)},\end{aligned} \tag{2.9}$$

则有

$$0 \leqslant [a^{(1)} - \mathrm{i}a^{(2)}]' \widetilde{\Gamma}[a^{(1)} + \mathrm{i}a^{(2)}]. \tag{2.10}$$

但是 $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)} + \mathrm{i}\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(i)}$ 是实值 n 阶方阵.所以由(2.10)式得

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \mathrm{Re}([a^{(1)} - \mathrm{i}a^{(2)}]'[\Gamma^{(1)} + \mathrm{i}\Gamma^{(2)}][a^{(1)} + \mathrm{i}a^{(2)}]) \\ &= a^{(1)\prime}\Gamma^{(1)}a^{(1)} - a^{(1)\prime}\Gamma^{(2)}a^{(2)} + a^{(2)\prime}\Gamma^{(1)}a^{(2)} + a^{(2)\prime}\Gamma^{(2)}a^{(1)} \\ &= (a^{(1)\prime}, a^{(2)\prime})\begin{pmatrix}\Gamma^{(1)} & -\Gamma^{(2)} \\ \Gamma^{(2)} & \Gamma^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{(1)} \\ a^{(2)}\end{pmatrix} \\ &= a'\Gamma a.\end{aligned}$$

(2.7)式得证,即 Γ 是非负定的、对称的.

类似地任取 $t_1, \cdots, t_n \in \mathbf{T}$,考虑实向量

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \\ \vdots \\ s_{2n}\end{pmatrix}, \ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \vdots \\ \mu_{2n}\end{pmatrix}, \ \mu_k \equiv 0, \tag{2.11}$$

及 $2n$ 维正态特征函数

$$\psi_{t_1, \cdots, t_n; t_1, \cdots, t_n}(s_1, \cdots, s_n, \cdots, s_{2n}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s'\mu - \frac{1}{2}s'\frac{\xi}{2}s}. \tag{2.12}$$

显然

$$\{\psi_{t_1, \cdots, t_n; t_1, \cdots, t_n}(s_1, \cdots, s_{2n}) : t_1, \cdots, t_n \in \mathbf{T}\}$$

所对应的分布函数族满足相容性条件,故存在实值随机过程

$\{X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, t \in \mathbf{T}\}$,使

$$X_{t_1}^{(1)}, \cdots, X_{t_n}^{(1)};\ X_{t_1}^{(2)}, \cdots, X_{t_n}^{(2)}$$

的特征函数为 $\psi_{t_1,\cdots,t_n;t_1,\cdots,t_n}(s_1,\cdots,s_{2n})$,从而

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(X_t^{(1)}) = \mu_j = 0, \\ \boldsymbol{E}(X_{t_k}^{(2)}) = \mu_{n+k} = 0, \\ \boldsymbol{E}\left(X_{t_j}^{(1)} X_{t_k}^{(2)}\right) = \dfrac{1}{2}\gamma_{j,n+k}. \end{cases} \tag{2.13}$$

若令

$$X_t = X_t^{(1)} + \mathrm{i} X_t^{(2)} \quad (t \in \mathbf{T}), \tag{2.14}$$

则

$$\boldsymbol{E}(|X_t|^2) < \infty, \quad \boldsymbol{E}(X_t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X_{t_j}\overline{X}_{t_k}) &= \boldsymbol{E}\left(\left(X_{t_j}^{(1)} + \mathrm{i}X_{t_j}^{(2)}\right)\left(X_{t_k}^{(1)} - \mathrm{i}X_{t_k}^{(2)}\right)\right) \\ &= \boldsymbol{E}(X_{t_j}^{(1)}X_{t_k}^{(1)}) + \boldsymbol{E}(X_{t_j}^{(2)}X_{t_k}^{(2)}) - \mathrm{i}\boldsymbol{E}(X_{t_j}^{(1)}X_{t_k}^{(2)}) \\ &\quad + \mathrm{i}\boldsymbol{E}(X_{t_j}^{(2)}X_{t_k}^{(1)}) \\ &= \frac{1}{2}[b_{j,k}^{(1)} + b_{j,k}^{(1)} + \mathrm{i}(b_{j,k}^{(2)} - b_{k,j}^{(2)})] \\ &= b_{j,k}^{(1)} + \mathrm{i}b_{j,k}^{(2)} = \widetilde{b}_{j,k} \\ &= B(t_j - t_k). \end{aligned}$$

故 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是以 $B(\tau)$ 为相关函数的宽平稳过程. 由 $B(\tau)$ 连续得知 $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 均方连续.

由傅氏变换的唯一性定理得知,此时 $B(\tau)$ 与 $F(A)$ 相互唯一决定.

定义 2.3 设 $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 为均方连续的宽平稳过程, $B(\tau)$ 为其相关函数. 由命题 2.3, 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1)$ 存在唯一有限测度 $F(A)$,使

$$B(\tau) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau} F(\mathrm{d}\lambda),$$

$F(A)$ 称为 X 的**谱测度**, $F(\lambda)\equiv F((-\infty,\lambda])$ 称为**谱函数**. 若存在非负 Lebesgue 可测实值函数 $f(\lambda)$, 使

$$F(A)=\int_A f(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \tag{2.15}$$

则称 $f(\lambda)$ 为 X 的**谱密度**, 这时(2.1)式变为

$$B(\tau)=\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{2.16}$$

若 $B(\tau)$ 绝对可积, 则由傅氏变换的反演公式得

$$f(\lambda)=\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau} B(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.17}$$

命题 2.3′ 为使 $B(\tau)(\tau=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为某个宽平稳过程(序列) $X=\{X_n: n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 的相关函数的充要条件是在 $([-\pi,\pi],\mathscr{B}^1\cap[-\pi,\pi])$ 上存在一个有限测度 $F(A)$, 使

$$B(\tau)=\int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau} F(\mathrm{d}\lambda) \quad (\tau=0,\pm 1,\cdots),$$

此时 $B(\tau)$ 与 $F(A)$ 相互唯一决定, $B(0)=F([-\pi,\pi])$.

证 仿命题 2.3 证明, 在应用 Хинчин-Bochoer 定理的地方改用 Herglotz 定理.

下面我们看几个宽平稳过程的例子.

例 2.1 设 $X=\{X_n: n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 满足 $\boldsymbol{E}(X_n)\equiv 0$,

$$\boldsymbol{E}(X_n\overline{X}_m)=\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & \text{当 } n=m,\\ 0, & \text{当 } n\neq m,\end{cases} \tag{2.18}$$

则 X 是宽平稳过程, 其相关函数

$$B(n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq 0,\\ 1, & \text{当 } n=0.\end{cases}$$

例 2.2 设 $\{X_n: n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 的意义如例 2.1, $\{a_i: i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 为一族复数, 满足 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|^2<\infty$, 则

$$\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{i=m_1}^{n_1} a_i X_{n-i}-\sum_{i=m_2}^{n_2} a_i X_{n-i}\right|^2\right)$$

$$= E\Big(\Big|\sum_{i=m_1}^{n_1} a_i X_{n-i}\Big|^2 - \sum_{i=m_1}^{n_1} a_i X_{n-i} \sum_{i=m_2}^{n_2} \overline{a_i}\ \overline{X_{n-i}}$$

$$- \sum_{i=m_1}^{n_1} \overline{a_i}\ \overline{X_{n-i}} \sum_{i=m_2}^{n_2} a_i X_{n-i} + \Big|\sum_{i=m_2}^{n_2} a_i X_{n-i}\Big|^2\Big)$$

$$= \sum_{i=m_1}^{n_1} |a_i|^2 - 2\sum_{i=m_1 \vee m_2}^{n_1 \wedge n_2} |a_i|^2 + \sum_{i=m_2}^{n_2} |a_i|^2,$$

当 $m_j \to -\infty$, $n_j \to \infty$ $(j = 1,2)$ 时，上式趋于 0，即 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{n-i}$，$L^2$ 收敛，记此 L^2 极限为 $Y_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 显然

$$E(Y_n) = \lim_{\substack{m_1 \to -\infty \\ n_1 \to \infty}} E\Big(\sum_{i=m_1}^{n_1} a_i X_{n-i}\Big) = 0, \quad E(|Y_n|^2) < \infty,$$

又

$$E\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{n+k-i} \cdot \overline{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{n-i}}\Big)$$

$$= E\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X_{n+k-i} \cdot \overline{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i-k} X_{n+k-i}}\Big)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\, \bar{a}_{i-k} E(|X_{n+k-i}|^2)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\, \bar{a}_{i-k}$$

不依赖于 n，所以 $Y = \{Y_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是宽平稳过程，其相关函数为 $B(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \bar{a}_{i-k} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的滑动和.

例 2.3 设 ξ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的复值随机变量，$E(\xi) = 0$, $0 < E(|\xi|^2) < \infty$，令

$$X_t = \xi f(t), \quad t \in \mathbf{T} = [0, \infty), \tag{2.19}$$

f 是定义在 $\mathbf{T}$ 上的复值函数，则 $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是均方连续的宽平稳过程的充要条件是:

$$f(t)=\gamma_0 e^{i\lambda_0 t}\quad(t\in\mathbf{T}),$$

其中 γ_0 是复数,λ_0 是实数,而且这时 X 的相关函数为

$$B(\tau)=\boldsymbol{E}(|\xi|^2)g(\tau),\quad g(\tau)=f(t+\tau)\overline{f(t)}.\quad(2.20)$$

证 不妨令 $f(t)\not\equiv 0$. 若注意 $\boldsymbol{E}(X_t)=0$, $\boldsymbol{E}(X_{t+\tau}\overline{X}_t)=\boldsymbol{E}(|\xi|^2)f(t+\tau)\overline{f}(t)$,则用命题2.1、2.2及Хинчин-Bochner定理,可知

"$X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是均方连续宽平稳过程

$\Longleftrightarrow f(t+\tau)\overline{f}(t)=g(\tau)$ 不依赖 $t\in\mathbf{T}$, g 连续非负定

$\Longleftrightarrow f(t+\tau)\overline{f}(t)=g(\tau)$, $g(0)\equiv|f(t)|^2\neq 0$, g 连续非负定

$\Longleftrightarrow f(t+\tau)\overline{f}(t)=g(\tau)$, $g(0)\equiv|f(t)|^2\neq 0$, $g(\tau)/g(0)$ 是退化特征函数

$\Longleftrightarrow f(t+\tau)\overline{f}(t)=g(\tau)$, $g(0)\equiv|f(t)|^2\neq 0$, $g(\tau)/g(0)=e^{i\lambda_0\tau}$

$\Longleftrightarrow f(t+\tau)\overline{f}(t)=g(\tau)=g(0)e^{i\lambda_0\tau}$,且存在 $\varphi(t)$ 使

$$f(t)=\sqrt{g(0)}e^{i(\lambda_0 t+\varphi(t))}$$

$\Longrightarrow g(0)e^{i\lambda_0\tau}=\sqrt{g(0)}e^{-i(\lambda_0 t+\varphi(t))}\sqrt{g(0)}e^{i(\lambda_0(t+\tau)+\varphi(t+\tau))}$

$\Longrightarrow \varphi(t+\tau)=\varphi(t)\quad(t,\tau\in\mathbf{T})$".

故

"$X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是均方连续宽平稳过程

$\Longrightarrow f(t)=\sqrt{g(0)}e^{i(\lambda_0 t+\varphi(0))}$".

取 $\gamma_0=\sqrt{g(0)}e^{i\varphi(0)}$,必要性得证.而充分性是显然的.

例2.4 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 n 个复值随机变量,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个实数,$\boldsymbol{E}(|X_j|^2)<\infty\ (j=1,\cdots,n)$, $X_t=\sum_{j=1}^{n}X_j e^{i\lambda_j t}$, $t\in\mathbf{T}=[0,\infty)$.若

$$\boldsymbol{E}(X_j\overline{X}_k)=0\quad(j\neq k),\quad(2.21)$$

则 $X=\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$ 是宽平稳过程,而且这时 X 的相关函数为

$$B(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}(|X_j|^2)e^{i\lambda_j\tau}.$$

证　$$B(\tau)=\boldsymbol{E}(X_{t+\tau}X_t)=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}(|X_j|^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_j\tau}+\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\boldsymbol{E}(X_jX_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_j\tau+i(\lambda_j-\lambda_k)t}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}(|X_j|^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_j\tau}.$$

命题2.4　设$\{X_n:n\geqslant 0\},\{Y_m:m\geqslant 0\}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上两串复值随机变量,$\boldsymbol{E}(|X_n|^2)<\infty$, $\boldsymbol{E}(|Y_m|^2)<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [L^2],\quad \lim_{m\to\infty}Y_m=Y,\ [L^2],$$

则

$$\lim_{n,m\to\infty}X_nY_m=XY,\ [L^1];\tag{2.22}$$
$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(|X_n|^2)=\boldsymbol{E}(|X|^2);\tag{2.23}$$
$$\lim_{n,m\to\infty}\boldsymbol{E}(X_nY_m)=\boldsymbol{E}(XY).\tag{2.24}$$

证　$$\boldsymbol{E}(|X_nY_m-XY|)$$
$$\leqslant\boldsymbol{E}(|X_n||Y_m|+|X_n-X||Y|)$$
$$\leqslant[\boldsymbol{E}(|X_n|^2)\boldsymbol{E}(|Y_m-Y|^2)]^{\frac{1}{2}}+[\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)\boldsymbol{E}(|Y|^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant[\boldsymbol{E}((|X|+|X_n-X|)^2)\boldsymbol{E}(|Y_m-Y|^2)]^{\frac{1}{2}}+[\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)\boldsymbol{E}(|Y|^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant[(\boldsymbol{E}(|X|^2)+2\boldsymbol{E}(|X||X_n-X|)+\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)\cdot\boldsymbol{E}(|Y_m-Y|^2))]^{\frac{1}{2}}+[\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)\boldsymbol{E}(|Y|^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\Big[\boldsymbol{E}(|X|^2)+2\sqrt{\boldsymbol{E}(|X|^2)\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)}+\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2))\cdot\boldsymbol{E}(|Y_m-Y|^2)\Big]^{\frac{1}{2}}+[\boldsymbol{E}(|X_n-X|^2)\boldsymbol{E}(|Y|^2)]^{\frac{1}{2}},$$

在上式中令 $n,m\to\infty$ 即得(2.22)式.而由(2.22)式即得(2.24)式.而(2.23)式是(2.24)式的特例($Y_m\equiv X_n$).

下面我们研究标准正交增量过程与正交随机测度.

定义2.4 设 $Z=\{Z(t):t\in\mathbf{R}\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的二阶矩 $\boldsymbol{E}(|Z(t)|^2)$ 存在的复值随机过程,如果:

(i) 对任何 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$,有

$$\boldsymbol{E}((Z(t_2)-Z(t_1))\overline{(Z(t_4)-Z(t_3))})=0;$$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}Z(t)=\alpha,\ \lim\limits_{t\to\infty}Z(t)=\beta,\ [L^2]$,

其中 α,β 均为复值随机变量,则称 Z 是**正交增量过程**,$F(t)\equiv\boldsymbol{E}(|Z(t)-\alpha|^2)$称为 Z 的**均方函数**.

特别地,若正交增量过程 $Z=\{Z(t):t\in\mathbf{R}\}$ 均方右连续,即

$$Z(t_0+)\equiv\lim_{t\to t_0+}Z(t)=Z(t_0),\ [L^2]\ (t_0\in\mathbf{R}),\tag{2.25}$$

则称 Z 为**标准正交增量过程**.用(2.23)式易证,标准正交增量过程 Z 的均方函数$F(t)$是右连续的.

命题2.5 设 $Z=\{Z(t):t\in\mathbf{R}\}$ 是正交增量过程,$F(t)$为其均方函数,α,β之意义如定义2.4.则

(1) $F(t_2)-F(t_1)=\boldsymbol{E}(|Z(t_2)-Z(t_1)|^2)$ (对一切 $t_2>t_1$),从而 $F(t)$ 单调非降;

(2) $\lim\limits_{t\to-\infty}F(t)=0,\ \lim\limits_{t\to-\infty}F(t)=\boldsymbol{E}(|\beta-\alpha|^2)$;

(3) 对任何 $t\in\mathbf{R}$,在$[L^2]$极限意义下,$Z(t-),Z(t+)$存在.

证 (1) 任取 $t_2>t_1$,有

$$\begin{aligned}
&F(t_2)-F(t_1)\\
&\quad=\boldsymbol{E}((Z(t_2)-\alpha)\overline{(Z(t_2)-\alpha)})\\
&\qquad-\boldsymbol{E}((Z(t_1)-\alpha)\overline{(Z(t_1)-\alpha)})\\
&\quad=\boldsymbol{E}(Z(t_2)\overline{Z(t_2)}-Z(t_1)\overline{Z(t_1)}\\
&\qquad-\alpha\overline{(Z(t_2)-Z(t_1))}-\overline{\alpha}(Z(t_2)-Z(t_1)))
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E}(|Z(t_2) - Z(t_1)|^2 + Z(t_2)\overline{Z(t_1)} + \overline{Z(t_2)}Z(t_1)$$
$$- 2Z(t_1)\overline{Z(t_1)} - \alpha\overline{(Z(t_2) - Z(t_1))} - \overline{\alpha}(Z(t_2) - Z(t_1)))$$
$$= \boldsymbol{E}(|Z(t_2) - Z(t_1)|^2 + \overline{(Z(t_2) - Z(t_1))}(Z(t_1) - \alpha)$$
$$+ (Z(t_2) - Z(t_1))\overline{(Z(t_1) - \alpha)}). \tag{2.26}$$

用命题2.4及 Z 的正交增量性质,得

$$E((Z(t_2) - Z(t_1))\overline{(Z(t_1) - \alpha)})$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \boldsymbol{E}((Z(t_2) - Z(t_1))\overline{(Z(t_1) - \alpha)})$$
$$= 0. \tag{2.27}$$

取共轭得

$$\boldsymbol{E}(\overline{(Z(t_2) - Z(t_1))}(Z(t_1) - \alpha)) = 0. \tag{2.28}$$

将(2.27)、(2.28)式代入(2.26)式,得(1).

(2)　由 F 的定义即得.

(3)　由(1)可得

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0+ \\ \delta_2 \to 0+}} \boldsymbol{E}(|Z(t + \delta_1) - Z(t + \delta_2)|^2)$$
$$= \lim_{\substack{\delta_1 \to 0+ \\ \delta_2 \to 0+}} (F(t + \delta_1) - F(t + \delta_2)),$$

即 $Z(t+)$ 存在.仿之 $Z(t-)$ 存在.

命题2.6　设 $Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$ 是正交增量过程,$F(t)$ 是其均方函数,令

$$\widetilde{Z}(t) = Z(t+),\ \widetilde{F}(t) = \widetilde{F}(t+) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

则

(1)　$\widetilde{Z} = \{\widetilde{Z}(t): t \in \mathbf{R}\}$ 是标准正交增量过程;

(2)　$\widetilde{Z}$ 的均方函数为 $\widetilde{F}(t)$,从而 $\widetilde{F}(t)$ 右连续;

(3)　若令 $C(F)$ 表 F 的连续点的全体,必有

$$\widetilde{F}(t) = F(t),\ \widetilde{Z}(t) = Z(t) \quad (t \in C(F)),$$

其中 $\widetilde{Z}$ 称为 Z 的标准修正正交增量过程.

证 (1) 易证 $\widetilde{Z}$ 是正交增量过程. 再由命题 2.5, 得

$$\lim_{\substack{t\to t_0+\\ h\to 0+}} \boldsymbol{E}(|Z(t+h)-Z(t_0+h)|^2) = \lim_{\substack{t\to t_0+\\ h\to 0+}} (F(t+h)-F(t_0+h)) = 0.$$

由命题 2.4, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0+} \boldsymbol{E}(|\widetilde{Z}(t)-\widetilde{Z}(t_0)|^2)\\
&= \lim_{t\to t_0+} \boldsymbol{E}(|Z(t+)-Z(t_0+)|^2)\\
&= \lim_{t\to t_0+}\lim_{h\to 0+} \boldsymbol{E}(|Z(t+h)-Z(t_0+h)|^2) = 0.
\end{aligned}$$

故 $\widetilde{Z}$ 是标准正交增量过程.

(2)
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|\widetilde{Z}(t)-\alpha|^2) &= \lim_{t_1\to-\infty} \boldsymbol{E}(|\widetilde{Z}(t)-\widetilde{Z}(t_1)|^2)\\
&= \lim_{t_1\to-\infty}\lim_{h\to 0+} \boldsymbol{E}(|Z(t+h)-Z(t_1+h)|^2)\\
&= \lim_{t_1\to-\infty}\lim_{h\to 0+} (F(t+h)-F(t_1+h))\\
&= \widetilde{F}(t),
\end{aligned}$$

即 $\widetilde{Z}$ 的均方函数为 $\widetilde{F}(t)$, 且 $\widetilde{F}(t)$ 右连续.

(3) 当 $t_0 \in C(F)$ 时, 显然 $\widetilde{F}(t_0) = F(t)$. 又因为命题 2.5 (1),

$$\boldsymbol{E}(|Z(t_2)-Z(t_1)|^2) = F(t_2)-F(t_1) \quad (t_2 > t_1),$$

所以 $t_0 \in C(F)$ 时, $Z(t)$ 在 t_0 亦右连续, 故

$$\widetilde{Z}(t_0) = Z(t_0+0) = Z(t_0).$$

定义 2.5 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为任一概率空间, $H = \overline{L^2}(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为全体二阶矩存在的复值随机变量, 对任意一对 $\xi,\eta \in H$, 定义 $(\xi,\eta) \equiv \boldsymbol{E}(\xi\bar{\eta})$ 为它们的内积, 再按通常的线性运算(系数在复数域中)定义 H 中的线性运算, 则 H 成为一个 Hilbert 空间. 再设

$\Lambda \in \mathscr{B}^1$, $\Lambda \cap \mathscr{B}^1 = \{A: A = B \cap \Lambda, B \in \mathscr{B}^1\}$, $(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, F)$是有限测度空间,$Z: \Lambda \cap \mathscr{B}^1 \mapsto H$,即$Z$是定义在$\Lambda \cap \mathscr{B}^1$上的取值于 Hilbert 空间$H$的集合函数.若$Z$满足:

(i) 对任何$A_n \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1$, $A_n \cap A_m = \varnothing$ $(n, m \geqslant 1, n \neq m)$,有

$$Z(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(A_n), \ [L^2];$$

(ii) $\boldsymbol{E}(Z(A_1)\overline{Z(A_2)}) = F(A_1 \cap A_2)$ $(A_1, A_2 \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1)$,

则称Z是$\Lambda \cap \mathscr{B}^1$上的一个正交随机测度,$F$称为$Z$的均方测度,$F(t) \equiv F((-\infty, t] \cap \Lambda)$称为$Z$的均方函数.

在测度论中,我们曾经看到分布函数可以在$\mathscr{B}^1$上产生 Lebesgue-Stieljtes 概率测度,反之由$\mathscr{B}^1$上的概率测度也可定义一个分布函数(参见[27]).这在标准正交增量过程,也有类似的结果.

定理2.1 (1) 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间,$(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1, F)$是有限测度空间,$Z(\cdot)$是$\mathscr{B}^1$上的一个正交随机测度.若定义

$$Z(t) = Z((-\infty, t]), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2.29}$$

则$Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$是一个标准正交增量过程,$F$是其均方测度;

(2) 设$Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的一个标准正交增量过程,$F(t)$是其均方函数,$F$是由$F(t)$在$\mathscr{B}^1$上所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度,遂得有限测度空间$(\boldsymbol{R}, \mathscr{B}^1, F)$.在$\mathscr{B}^1$上存在唯一(在[a.e.]的意义下)正交随机测度$Z(A)$,它取值于$H = \overline{L_2}(\Omega, \mathscr{F}, P)$,满足

$$Z((t_1, t_2]) = Z(t_2) - Z(t_1). \tag{2.30}$$

证 (1) 由正交随机测度的定义得知$Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$的二阶矩存在.由正交随机测度所满足的第2个条件知

$$\mathbf{E}'((Z(t_2) - Z(t_1))\overline{(Z(t_4) - Z(t_3))}) = 0$$

$$(\text{对一切 } t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4,\ t_i \in \mathbf{R}).$$

最后,用正交随机测度的两个条件可知

$$\lim_{t \to -\infty} Z(t) = \lim_{t \to -\infty} Z((-\infty, t]) = Z(\varnothing) \overset{\text{记作}}{=\!=} \alpha,\ [L^2];$$

$$\lim_{t \to \infty} Z(t) = \lim_{t \to \infty} Z((-\infty, t]) = Z(\mathbf{R}) \overset{\text{记作}}{=\!=} \beta,\ [L^2];$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0+} Z(t) &= \lim_{t \to t_0+} Z((-\infty, t]) \\ &= Z((-\infty, t_0]) = Z(t_0),\ [L^2].\end{aligned}$$

故 $Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$ 是标准正交增量过程.

(2) 设 $Z = \{Z(t): t \in \mathbf{R}\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的标准正交增量过程,F 是其均方测度,现欲在有限测度空间 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1, F)$ 上定义正交随机测度 $Z(A)$ 满足(2.30)式.

令 $\mathscr{I} = \{(t_1, t_2]: t_1 \leqslant t_2,\ t_j \in \mathbf{R}\}$

$$\mathfrak{M} = \{A: A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j,\ A_j \in \mathscr{I},\ A_j A_k = \varnothing \\ (j \neq k),\ n = 1, 2, \cdots\},$$

则 $\mathscr{I}$ 是半环,$\mathfrak{M}$ 是由半环 $\mathscr{I}$ 产生的环. 任取 $A = (t_1, t_2] \in \mathscr{I}$,定义

$$Z((t_1, t_2]) = Z(t_2) - Z(t_1), \tag{2.31}$$

任取 $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{M},\ A_j = (s_j, t_j]$,定义

$$Z(A) = \sum_{j=1}^{n} Z(A_j) = \sum_{j=1}^{n} (Z(t_j) - Z(s_j)). \tag{2.32}$$

因此 $Z(\cdot)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上具有有限可加性且对任何 $A = \bigcup_{j=1}^{n} (s_j, t_j] \in \mathfrak{M}$,由过程的正交性及命题 2.5 (1),有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|Z(A)|^2) &= \boldsymbol{E}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} (Z(t_j) - Z(s_j))\Big|^2\Big) \\ &= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (Z(t_j) - Z(s_j))\overline{(Z(t_k) - Z(s_k))}\Big) \\ &= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} |Z(t_j) - Z(s_j)|^2\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(F(t_j) - F(s_j)) = F(A) < \infty. \tag{2.33}$$

下面将对任何 $A \in \mathscr{B}^1$ 来定义 $Z(A)$. 由于 F 是 $\mathscr{B}^1 = \sigma(\mathfrak{M})$ 上的有限测度, $\mathfrak{M}$ 是环, 所以任取 $A \in \mathscr{B}^1$, 必存在 $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n \geqslant 0)$, 使

$$\lim_{n \to \infty} F(A \Delta A_n) = 0. \tag{2.34}$$

显然, 由过程的正交性, 仿(2.33)式可以证明

$$\boldsymbol{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = 0 \quad (A \cap B = \varnothing,\ A, B \in \mathfrak{M}). \tag{2.35}$$

所以, 由(2.33), (2.35)式, 对任何 $A, B \in \mathfrak{M}$, 有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) \\
&\quad = \boldsymbol{E}([Z(AB) + Z(A-B)]\overline{[Z(AB) + Z(B-A)]}) \\
&\quad = \boldsymbol{E}(|Z(AB)|^2 + \boldsymbol{E}(Z(AB)\overline{Z(B-A)}) \\
&\qquad + \boldsymbol{E}(Z(A-B)\overline{Z(AB)}) + \boldsymbol{E}(Z(A-B)\overline{Z(B-A)}) \\
&\quad \xlongequal{(2.35)} \boldsymbol{E}(|Z(AB)|^2) \\
&\quad \xlongequal{(2.33)} F(AB).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

对于(2.34)式中选定的 $\{A_n\}$, 仍用(2.35), (2.33)式, 有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|Z(A_n) - Z(A_m)|^2) \\
&\quad = \boldsymbol{E}(|Z(A_n - A_m) + Z(A_nA_m) - Z(A_m - A_n) - Z(A_mA_n)|^2) \\
&\quad = \boldsymbol{E}(|Z(A_n - A_m) - Z(A_m - A_n)|^2) \\
&\quad \xlongequal{(2.35)} \boldsymbol{E}(|Z(A_n - A_m)|^2) + \boldsymbol{E}(|Z(A_m - A_n)|^2) \\
&\quad \xlongequal{(2.33)} F(A_n - A_m) + F(A_m - A_n) \\
&\quad = F(A_n \Delta A_m) \leqslant F(A \Delta A_n) + F(A \Delta A_m).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

令 $n, m \to \infty$ 并注意(2.34)式得 $\{Z(A_n)\}$ 存在 L^2 收敛意义下的极限 $Z(A)$:

$$\lim_{n \to \infty} Z(A_n) = Z(A),\ [L^2] \quad (A \in \mathscr{B}^1). \tag{2.38}$$

下面验证(2.38)式中定义的 $Z(A)$ 的单义性. 即 $Z(A)$ 不依赖(2.34)式中的 $\{A_n\}$ 的选取, 事实上, 若还有 $A_n^* \in \mathfrak{M}$,

$$\lim_{n\to\infty} F(A\Delta A_n^*) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} Z(A_n^*) = Z^*(A),\ [L^2]. \tag{2.39}$$

推证

$$Z^*(A) = Z(A),\ [\text{a.e.}]. \tag{2.40}$$

事实上,若令

$$\widetilde{A} = \begin{cases} A_n, & 当\ n\ 为奇数, \\ A_n^*, & 当\ n\ 为偶数, \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} F(A\Delta \widetilde{A}_n) = 0,$$

从而存在 $\widetilde{Z}(A)$,使

$$\widetilde{Z}(A) = \lim_{n\to\infty} Z(\widetilde{A}_n),\ [L^2].$$

而$\{Z(A_n)\}$,$\{Z(A_n^*)\}$ 皆为$\{Z(\widetilde{A})\}$ 的子序列,所以(2.40) 式成立.

最后证明 $Z(A)$ 是 $\mathscr{B}^1$ 上的取值于 $H = \overline{L_2}(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的满足(2.30) 式的唯一的正交随机测度.

任取 $A,B \in \mathscr{B}^1$,可取 $A_n \in \mathfrak{M}$, $B_n \in \mathfrak{M}$,使

$$\lim_{n\to\infty} F(A\Delta A_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} F(B\Delta B_n) = 0, \tag{2.41}$$

$$Z(A) = \lim_{n\to\infty} Z(A_n),\ Z(B) = \lim_{n\to\infty} Z(B_n),\ [L^2]. \tag{2.42}$$

再用(2.33) 式,得

$$\boldsymbol{E}(|Z(A)|^2) < \infty \quad (A \in \mathscr{B}^1).$$

由于对任何 $\varepsilon > 0$,当 $n \to \infty$ 时,有

$$F(|\mathbf{1}_{A_n} - \mathbf{1}_A| > \varepsilon) \leqslant F(A\Delta A_n) \to 0,$$

$$F(|\mathbf{1}_{B_n} - \mathbf{1}_B| > \varepsilon) \leqslant F(B\Delta B_n) \to 0,$$

所以存在$\{k_n\}$ 及$\{p_n\}$,使

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{A_{k_n}} = \mathbf{1}_A,\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{B_{p_n}} = \mathbf{1}_B,\ [\text{a.e.}]\ (\text{对 } F \text{ 测度}). \tag{2.43}$$

所以,由(2.42),(2.36),(2.43)式并用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) &\xlongequal{(2.42)} \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(Z(A_{k_n})Z\overline{(B_{p_n})}) \\
&\xlongequal{(2.36)} \lim_{n\to\infty}F(A_{k_n}B_{p_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\mathbf{1}_{A_{k_n}}\mathbf{1}_{B_{p_n}}F(\mathrm{d}x) \\
&\xlongequal{(2.43)} \int_{\mathbf{R}}\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B F(\mathrm{d}x) = F(AB) \quad (A,B\in\mathscr{B}^1).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

再任取 $A_n\in\mathscr{B}^1$, $A_n\cap A_m=\varnothing\ (n\neq m)$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,由(2.44)式及 F 是 $\mathscr{B}^1$ 有限测度,得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left(\left|Z(A)-\sum_{n=1}^{m}Z(A_n)\right|^2\right) \\
&= \boldsymbol{E}(|Z(A)|^2)+\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{n=1}^{m}Z(A_n)\right|^2\right) \\
&\quad -\boldsymbol{E}\left(\sum_{n=1}^{m}Z(A)\overline{Z(A_n)}\right)-\boldsymbol{E}\left(\sum_{n=1}^{m}Z(A_n)\overline{Z(A)}\right) \\
&\xlongequal{(2.44)} F(A)+\sum_{n=1}^{m}F(A_n)-2\sum_{n=1}^{m}F(A_nA) \\
&= A(A)+\sum_{n=1}^{m}F(A_n)-2\sum_{n=1}^{m}F(A_n),
\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$,得

$$Z(A)=\sum_{n=1}^{\infty}Z(A_n),\ [L^2].$$

故 $Z(A)$ 是 $\mathscr{B}^1$ 的一个正交随机测度,由 $Z(A)$ 的定义知道它必满足(2.30)式取值于 H.若有两个正交随机测度 $Z_1(A),Z_2(A)$ 皆满足(2.30)式取值于 H,则 Z_1,Z_2 必在 $\mathfrak{M}$ 上恒等,再用 Z_1,Z_2 满足(2.38)式得知 Z_1,Z_2 在 $\mathscr{B}^1$ 上恒等,唯一性得证,定理证毕.

系 若 $Z(A)$ 在 $\mathscr{B}^1$ 上满足定义 2.5 中的(ⅱ):

$$\boldsymbol{E}(Z(A_1)\overline{Z(A_2)}) = F(A_1 \cap A_2) \quad (A_i \in \mathscr{B}^1).$$

则 Z 是 $\mathscr{B}^1$ 上的正交随机测度.

此事实在定理 2.1 中已证明.

下面我们研究对正交随机测度的积分.

定义 2.6 设$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$是有限测度空间,令

$$\overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F) = \{f: f = f_1 + \mathrm{i}f,\ f_1,f_2 \in L^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)\},$$

即$\overline{L^2}$是全体复值关于测度 F 的平方可积函数. 再设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$Z(A)$是定义在 $\mathscr{B}^1$ 上取值于 $H \equiv \overline{L^2}(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的以 F 为均方测度的正交随机测度(由于有两个 L^2 空间,以后必要时,关于$[L^2]$收敛,要标明关于测度 F 或者关于测度 P).

(1) 若 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,且 g 是简单函数

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \mathbf{1}_{A_\nu}(x),$$

其中 $A_\nu \in \mathscr{B}^1$, α_ν 为复数$(1 \leqslant \nu \leqslant k)$, $A_s \cap A_\nu = \varnothing$ $(s \neq \nu)$, $1 \leqslant s,\nu \leqslant k)$,则定义 g 对 Z 的随机积分为

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu Z(A_\nu),$$

记作

$$\begin{aligned}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g(x)Z(\mathrm{d}x) &= (\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g(x)\mathrm{d}Z(x)\\ &= (\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g\mathrm{d}Z = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu Z(A_\nu).\end{aligned} \quad (2.45)$$

(2) 对一般的 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,总可取

$$g^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} \mathbf{1}_{A_\nu^{(n)}(x)},$$

使

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)} = g,\ [L^2]\ (\text{关于测度 } F),$$

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z = h, \ [L^2]\ (\text{关于测度 } P),$$

我们定义

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g\mathrm{d}Z = h. \tag{2.46}$$

而对任何 $A \in \mathscr{B}^1$,定义

$$(\mathrm{o})\int_A g\mathrm{d}Z \equiv (\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_A g\mathrm{d}Z.$$

为了证明这一定义的合理性,必须证明三点:

(ⅰ) 任取 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,必存在简单函数 $g^{(n)}$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)} = g$, $[L^2]$ (关于测度 F);

(ⅱ) 若 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,$g^{(n)}$ 是简单函数,$\lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)} = g$, $[L^2]$ (关于测度 F),则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z$ 在$[L^2]$意义下(关于测度 P)存在;

(ⅲ) 若有两串简单函数$\{g^{(n)}\}$,$\{h^{(n)}\}$,使

$$\lim_{n\to\infty} g^{(n)} = \lim_{n\to\infty} h^{(n)} = h, \ [L^2]\ (\text{在 } F \text{ 测度下}),$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} h^{(n)}\mathrm{d}Z.$$

证 (ⅰ) 任取 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,$g = g_1 + \mathrm{i}g_2$,$g_1, g_2 \in L^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$. 令

$$A_k^{(j)} = \{|g_j| > k\} \quad (j = 1,2,\ k = 1,2,3,\cdots),$$

则 $A_k^{(j)} \supset A_{k+1}^{(j)}$,$\lim\limits_{k\to\infty} A_k^{(j)} = \varnothing$,而 F 是 $\mathscr{B}^1$ 上的有限测度,所以

$$\lim_{k\to\infty} F(A_k^{(j)}) = 0 \quad (j = 1,2). \tag{2.47}$$

对任何自然数 n,由于$\int_{\mathbf{R}} |g_j|^2\mathrm{d}F < \infty$,得知必存在 $\delta_n > 0$,当 $F(A) \leqslant \delta_n$ 时,有

$$\int_A |g_j|^2\mathrm{d}F < \frac{1}{n}. \tag{2.48}$$

由(2.47)式得知存在 k_n,使

$$F(A_{k_n}^{(j)}) < \delta_n \quad (n \geqslant 1,\ j = 1,2). \tag{2.49}$$

令

$$g_j^{(n)}(x) = \begin{cases} g_j(x), & \text{当 } x \overline{\in} A_{k_n}^{(j)}, \\ 0, & \text{当 } x \in A_{k_n}^{(j)}, \end{cases} \tag{2.50}$$

得

$$\int_{\mathbf{R}} g_j(x) - g_j^{(n)}(x)|^2 F(\mathrm{d}x) = \int_{A_{k_n}^{(j)}} |g_j(x)|^2 F(\mathrm{d}x)$$

$$< \frac{1}{n}. \tag{2.51}$$

显然 $g_j^{(n)} \in \mathrm{b}\mathscr{B}^1(n \geqslant 1,\ j = 1,2)$.

众所周知,对每个 $g_j^{(n)} \in \mathrm{b}\mathscr{B}^1$,存在简单函数列$\{g_j^{(n,m)}:m \geqslant 1\}$,使

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}|g_j^{(n)}(x) - g_j^{(n,m)}(x)| = 0 \quad (n \geqslant 1,\ j = 1,2), \tag{2.52}$$

由(2.51),(2.52)式及 $F(\mathbf{R}) < \infty$,得知(ⅰ)成立.

(ⅱ) 任取 $g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$, $g^{(n)}$ 是简单函数,$\lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)} = g$, $[L^2]$ (在 F 测度下),则

$$\boldsymbol{E}(|(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z - (\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(m)}\mathrm{d}Z|^2)$$

$$= \boldsymbol{E}(|(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}(g^{(n)} - g^{(m)})\mathrm{d}Z|^2)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |g^{(n)}(x)g^{(m)}(x)|^2 F(\mathrm{d}x).$$

$$\leqslant \Big[\Big(\Big(\int_{\mathbf{R}} |g^{(n)}(x) - g(x)|^2 F(\mathrm{d}x)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \Big(\int_{\mathbf{R}} |g(x) - g^{(m)}(x)|^2 F(\mathrm{d}x)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)} = g$，$[L^2]$（关于 F 测度），及 $H = \overline{L^2}(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的完备性，得知

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z$$

在$[L^2]$的意义下存在(关于 P 测度).

（ⅲ）　若有两串简单函数$\{g^{(n)}\}$和$\{h^{(n)}\}$，使

$\lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} h^{(n)} = h$，$[L^2]$（在 F 测度下），

令

$$r^{(n)} = \begin{cases} g^{(n)}, & \text{当 } n = 2k-1, \\ h^{(n)}, & \text{当 } n = 2k, \end{cases} \quad k \geqslant 1,$$

则 $r^{(n)} \to h$，$[L^2]$（在 F 测度下），故由（ⅱ），有

$$Y = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} r^{(n)}\mathrm{d}Z,\ [L^2]\ (\text{在 } P \text{ 测度下}).$$

而 $\left\{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z : n \geqslant 1\right\}$，$\left\{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} h^{(n)}\mathrm{d}Z : n \geqslant 1\right\}$ 皆为 $\left\{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} r^{(n)}\mathrm{d}Z : n \geqslant 1\right\}$ 的子序列，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)}\mathrm{d}Z = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} h^{(n)}\mathrm{d}Z = Y,\ [\mathrm{a.e.}].$$

积分值的无二义性获证.

下面我们简单地介绍正交随机测度的积分的几条性质.

性质 1　若 $f_j \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$，$\alpha_j$ 是复数$(j = 1,2,\cdots,n)$，则

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\sum_{j=1}^{n} f_j\alpha_j\mathrm{d}Z = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f_j\mathrm{d}Z. \tag{2.53}$$

性质 1 显然成立.

性质 2　若 $f,g \in \overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$，则

$$\boldsymbol{E}\left((\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f\mathrm{d}Z \cdot \overline{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g\mathrm{d}Z}\right) = \int_{\mathbf{R}} f\bar{g}\mathrm{d}F. \tag{2.54}$$

证　由命题2.4及积分的定义，取简单函数列$\{f^{(n)}\}$，$\{g^{(n)}\}$，

使

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)} = f, \lim_{n\to\infty} g^{(n)} = g, \ [L^2]\ (\text{关于测度 } F),$$

则必有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\left((\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f \mathrm{d}Z \cdot \overline{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g \mathrm{d}Z}\right) \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\left((\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f^{(n)} \mathrm{d}Z \cdot \overline{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g^{(n)} \mathrm{d}Z}\right) \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f^{(n)} \overline{g}^{(n)} \mathrm{d}F = \int_{\mathbf{R}} f\overline{g} \mathrm{d}F. \end{aligned}$$

性质 3 若 $f, g \in \overline{L^2}(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1, F)$，则

$$\boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f \mathrm{d}Z - (\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g \mathrm{d}Z\right|^2\right) = \int_{\mathbf{R}} |f-g|^2 \mathrm{d}F. \tag{2.55}$$

特别地，若 $g \equiv 0$，则

$$\mathbf{E}\left(\left|(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f \mathrm{d}Z\right|^2\right) = \int_{\mathbf{R}} |f|^2 \mathrm{d}F. \tag{2.56}$$

由性质 2 即得性质 3.

性质 4 若 $f_n, f \in \overline{L^2}(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1, F)$ $(n \geqslant 1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，$[L^2]$ (关于 F 测度)，则

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{o}) \int_{\mathbf{R}} f_n \mathrm{d}Z = (\mathrm{o}) \int_{\mathbf{R}} f \mathrm{d}Z, \ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度}).$$

证 对每个 n，由于 $f_n \in \overline{L^2}(\mathbf{R}, \mathscr{B}^1, F)$，在定义 2.6 中已证：可取简单函数 $\widetilde{f}_n$，使

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n - \widetilde{f}_n|^2 \mathrm{d}F < \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 1). \tag{2.57}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n = f, \ [L^2]\ (\text{关于 } F \text{ 测度}).$$

因此，由积分的定义有

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{o}) \int_{\mathbf{R}} \widetilde{f} \mathrm{d}Z = (\mathrm{o}) \int_{\mathbf{R}} f \mathrm{d}Z, \ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度}). \tag{2.58}$$

但是，由性质 3 及(2.57)式，有

$$\boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}Z-(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}f_n\mathrm{d}Z\right|^2\right)=\int_{\mathbf{R}}|\widetilde{f}_n-f_n|^2\mathrm{d}F$$
$$<\frac{1}{n},\tag{2.59}$$

由(2.58),(2.59)式即得性质4.

性质5　对任何 $f\in\overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$ 及任何 $A_n\in\mathscr{B}^1(n\geqslant1)$, $A_n\cap A_m=\varnothing\ (n\neq m)$,均有

$$(\mathrm{o})\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n}f\mathrm{d}Z=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{o})\int_{A_n}f\mathrm{d}Z,\ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度}).\tag{2.60}$$

证　因为

$$\lim_{N\to\infty}f\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n}=f\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n},\ [L^2]\ (\text{关于 } F \text{ 测度}),\tag{2.61}$$

所以由性质4和性质1有

$$\begin{aligned}(\mathrm{o})\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n}f\mathrm{d}Z&=\lim_{N\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n}f\mathrm{d}Z\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\mathrm{o})\int_{A_n}f\mathrm{d}Z\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{o})\int_{A_n}f\mathrm{d}Z,\ [L^2]\ (\text{由于 } P \text{ 测度}).\end{aligned}$$

定理2.2　设 $Z(A)$ 是 $\mathscr{B}^1$ 上的正交随机测度,$F(A)$ 是其均方测度,$f\in\overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$,则

$$W(A)=(\mathrm{o})\int_A f\mathrm{d}Z\quad(A\in\mathscr{B}^1)\tag{2.62}$$

是正交随机测度,其均方测度为

$$G(A)=\int_A|f(x)|^2F(\mathrm{d}x)\quad(A\in\mathscr{B}^1).\tag{2.63}$$

若还有 $g\in\overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,G)$(即 $fg\in\overline{L^2}(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$),则

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g\mathrm{d}W=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}gf\mathrm{d}Z.\tag{2.64}$$

证　显然,

$$E(|W(A)|^2)<\infty \quad (A\in\mathscr{B}^1).$$

由积分性质5得:对任何 $A_n\in\mathscr{B}^1$, $A_n\cap A_m=\varnothing\ (n\neq m)$,有

$$W(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}W(A_n),\ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度}).$$

由积分性质2得

$$E(W(A_1)\overline{W(A_2)})=E\left((\mathrm{o})\int_{A_1}f\mathrm{d}Z\cdot\overline{(\mathrm{o})\int_{A_2}f\mathrm{d}Z}\right)$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\mathbf{1}_{A_1\cap A_2}|f|^2\mathrm{d}F=G(A_1\cap A_2)\quad(A_1,A_2\in\mathscr{B}^1).$$

故 $W(A)$ 是正交随机测度,均方测度为 $G(A)$. 若还有 $g\in\overline{L}^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,G)$,取简单函数列 $\{g_n\}$, $g_n=\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_1^{(n)}\mathbf{1}_{A_1^{(n)}}$,使

$$\lim_{n\to\infty}g_n=g,\ [L^2]\ (\text{关于 } G \text{ 测度}),\tag{2.65}$$

则由积分性质1有

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g_n\mathrm{d}W=\sum_{f=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}W(A_i^{(n)})=\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}\cdot(\mathrm{o})\int_{A_i^{(n)}}f\mathrm{d}Z$$

$$=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g_nf\mathrm{d}Z.\tag{2.66}$$

由积分的定义

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g\mathrm{d}W=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g_n\mathrm{d}W=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g_nf\mathrm{d}Z,\tag{2.67}$$

若注意

“$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g,\ [L^2]$ (关于 G 测度)

$\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}g_nf=gf,\ [L^2]$ (关于 F 测度)”,

则由积分性质4及(2.67)式得

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g\mathrm{d}W=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}g_nf\mathrm{d}Z$$

$$=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}gf\mathrm{d}Z.$$

§3 Karhunen 定理、宽平稳过程的谱展式

在这一节中,我们从一般的 Karhunen 定理入手,把宽平稳过程的谱展式作为它的特例来推出,本节把[a.e.]相等的随机变量视为一样.

定理 3.1 (Karhunen 定理)

(1) 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$\Lambda\in\mathscr{B}^1$,$(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)$是有限测度空间,T为任一集合,$f(t,\lambda)$是定义在$\mathbf{T}\times\Lambda$上的复值函数,且对任何$t\in\mathbf{T}$,$f(t,\cdot)\in\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)$,$Z$为$\Lambda\cap\mathscr{B}^1$上的取值于$H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$的正交随机测度,$\mu$是$Z$的均方测度,若令

$$X_t=(\mathrm{o})\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)\quad(t\in\mathbf{T}),\tag{3.1}$$

则X_t是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的复值随机变量,且$\boldsymbol{E}(|X_t|^2)<\infty\ (t\in\mathbf{T})$,此外还有

$$\boldsymbol{E}(X_t\overline{X_s})=\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda).\tag{3.2}$$

(2) 反之,若$\{X_t:t\in\mathbf{T}\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一族二阶矩有限的复值随机变量,满足

$$\boldsymbol{E}(X_t\overline{X_s})=\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda),$$

$$f(t,\cdot)\in\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)\ (t\in\mathbf{T}).$$

$(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)$是有限测度空间,$\Lambda\in\mathscr{B}^1$,则在$\Lambda\cap\mathscr{B}^1$上存在一个以$\mu$为均方测度的正交随机测度$Z$,使

$$X_t=(\mathrm{o})\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda).\tag{3.3}$$

若$\{f(t,\cdot):t\in\mathbf{T}\}$产生的闭线性流型$\mathscr{L}(f(t,\cdot),t\in\mathbf{T})=\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)$,则满足(3.3)式的正交随机测度还是唯一的.

注意:闭线性流型$\mathscr{G}(f(t,\cdot),t\in\mathbf{T})$定义为

$$\{g:g = \lim_{n\to\infty} g_n,\ [L^2]\ (\text{关于 } \mu \text{ 测度}),\ g_n \in G\},$$

其中 $G = \{g_n(\lambda):g_n(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} f(t_\nu^{(n)},\lambda),\ t_\nu^{(n)} \in \mathbf{T},\ \alpha_\nu^{(n)}$ 为复数$\}$.

证 (1) 由积分性质 2 (2.54) 式) 即得(3.2) 式. 特别地,取 $s = t$,由 $f(t,\cdot) \in \overline{L}^2(\Lambda,\Lambda \cap \mathscr{B}^1,\mu)$,得

$$\boldsymbol{E}(|X_t|^2) = \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda) < \infty.$$

(2) 先设 G 在 $\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda \cap \mathscr{B},\mu)$ 中稠,即

$$\mathscr{L}(f(t,\cdot),t \in \mathbf{T}) = \overline{L}^2(\Lambda,\Lambda \cap \mathscr{B}^1,\mu),$$

则任取 $B \in \Lambda\mathscr{B}^1$,必有 $g_n \in G$,使 $n \to \infty$ 时,有

$$g_n = \sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} f(t_\nu^{(n)},\cdot) \to \mathbf{1}_B,\ [L^2]\ (\text{关于测度 } \mu). \tag{3.4}$$

令

$$z_n(\omega) = \sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} X(t_\nu^{(n)},\omega), \tag{3.5}$$

$$Z(B) = \lim_{n\to\infty} z_n,\ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度}). \tag{3.6}$$

推证

(i) (3.6) 式右方极限存在,且 $Z(B)$ 不依赖于(3.4) 式中 g_n 的选取.

事实上,由定理所给的条件及(3.4) 式,有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|z_m - z_n|^2)\\
&= \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} X(t_\nu^{(n)}) - \sum_{\nu=1}^{k_m} \alpha_\nu^{(m)} X(t_\nu^{(m)})\right|^2\right)\\
&= \int_\Lambda \left|\sum_{\nu=1}^{k_n} \alpha_\nu^{(n)} f(t_\nu^{(n)},\lambda) - \sum_{\nu=1}^{k_m} \alpha_\nu^{(m)} f(t_\nu^{(m)},\lambda)\right|^2 \mu(\mathrm{d}\lambda)\\
&= \int_\Lambda |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \to 0
\end{aligned}$$

$$(\text{当 } n, m \to \infty \text{ 时}). \tag{3.7}$$

由 H 的完备性,(3.6)式右方之极限存在.再证 $Z(B)$ 不依赖 $\{g_n\}$ 的选取.若还有 $\tilde{g}_n \in G$,使 $n \to \infty$,有

$$\tilde{g}_n = \sum_{\nu=1}^{l_n} \tilde{\alpha}_\nu^{(n)} f(\tilde{t}_\nu^{(n)}, \cdot) \to \mathbf{1}_B \tag{3.4'}$$

($[L^2]$,关于测度 μ).仿(3.5)式,定义

$$\tilde{z}_n(\omega) = \sum_{\nu=1}^{l_n} \tilde{\alpha}_\nu^{(n)} X(\tilde{t}_\nu^{(n)}, \omega). \tag{3.5'}$$

再定义

$$z_n^*(\omega) = \begin{cases} z_n(\omega), & \text{当 } n \text{ 为奇数}, \omega \in \Omega, \\ \tilde{z}_n(\omega), & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \omega \in \Omega, \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^*$ 存在 ($[L^2]$ 关于 P 测度),所以 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{z}$ 一样.这说明 $Z(B)$ 与 g_n 的选取无关(当然总要取 $g_n \in G$ 且满足(3.4)式).

(ii) Z 是 $\Lambda \cap \mathscr{B}^1$ 上的正交随机测度.

显然,$\boldsymbol{E}(|Z(B)|^2) < \infty$ (对一切 $B \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1$).再任取 $B_1, B_2 \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1$,由 G 在 $\overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)$ 中稠及 Z 的定义得知:存在 G 中二串函数 $\{g_n^{(1)}\}, \{g_n^{(2)}\}$,使

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{(i)} = \mathbf{1}_{B_i},\ [L^2]\ (\text{关于 } \mu \text{ 测度})\ (i = 1,2), \tag{3.8}$$

对应地仿(3.5)式由 $\{g_n^{(1)}\}, \{g_n^{(2)}\}$ 可定出 $\{z_n^{(1)}\}, \{z_n^{(2)}\}$,使

$$\lim_{n\to\infty} z_n^{(i)} = Z(B_i),\ [L^2]\ (\text{关于 } P \text{ 测度})\ (i = 1,2). \tag{3.9}$$

所以由命题 2.4 及(3.7),(3.8)式有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(Z(B_1)\overline{Z(B_2)}) &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}(z_n^{(1)} \overline{z_n^{(2)}}) \\ &\xlongequal{(3.7)} \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda g_n^{(1)} \bar{g}_n^{(2)} \mathrm{d}\mu \\ &\xlongequal{(3.8)} \int \mathbf{1}_{B_1} \mathbf{1}_{B_2} \mathrm{d}\mu = \mu(B_1 B_2). \end{aligned}$$

由定理3.1的系得知Z是$\Lambda\cap\mathscr{B}^1$上的正交随机测度，μ是Z的均方测度.

(iii) Z满足(3.3)式，令

$$Y_t=(\mathrm{o})\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)\ (t\in\mathbf{T}),\tag{3.10}$$

推证$Y_t=X_t(t\in\mathbf{T})$. 任取定$t\in\mathbf{T}$，取

$$h_n(\lambda)=\Big(\sum_{\nu=1}^{j_n}r_\nu^{(n)}\mathbf{1}_{B_\nu^{(n)}}(\lambda)\Big)\in G,\ n\geqslant 1,\tag{3.11}$$

使

$$\lim_{n\to 1}h_n=f(t,\cdot),\ [L^2]\ (\text{关于测度}\ \mu),$$

于是由积分的定义及(3.10)式，得

$$Y_t=\lim_{n\to\infty}\Big((\mathrm{o})\int_\Lambda h_n(\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)\Big),\ [L^2]\ (\text{关于测度}\ P),\tag{3.12}$$

从而由命题2.4及(3.12)，(3.11)式，得

$$\begin{aligned}(X_t\overline{Y}_t)&=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\Big(\overline{(\mathrm{o})\int_\Lambda h_n(\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)}\cdot X_t\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{j_n}\overline{r}_\nu^{(n)}\boldsymbol{E}(\overline{Z(B_\nu^{(n)})}\cdot X_t).\end{aligned}\tag{3.13}$$

但是，由(3.6)式有

$$Z(B)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k_n}\alpha_\nu^{(n)}X(t_\nu^{(n)}),\ [L^2]\ (\text{关于测度}\ P).$$

所以由命题2.4、本定理的条件和(3.4)式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\,\overline{(Z(B)}\cdot X(t))&=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k_n}\overline{\alpha}_\nu^{(n)}\boldsymbol{E}(\overline{X(t_\nu^{(n)})}\cdot X(t))\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k_n}\overline{\alpha}_\nu^{(n)}\int_\Lambda\overline{f(t_\nu^{(n)},t)}f(t,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{\sum_{\nu=1}^{k_n}\alpha_\nu^{(n)}f(t_\nu^{(n)},\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda)\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\Lambda} f(t,\lambda)\,\overline{g_n(\lambda)}\,\mu(\mathrm{d}\lambda)$$

$$= \int f(t,\lambda)\,\overline{\mathbf{1}_B(\lambda)}\,\mu(\mathrm{d}\lambda). \tag{3.14}$$

由于(3.14)式对一切 $B \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1$ 皆成立，特别地，取 $B = B_\nu^{(n)}$，将(3.14)式代入(3.13)式，得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(X_t\overline{Y}_t) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{j_n}\overline{r}_\nu^{(n)}\int_{\Lambda} f(t,\lambda)\,\overline{\mathbf{1}_{B_\nu^{(n)}}(\lambda)}\,\mu(\mathrm{d}\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\Lambda} f(t,\lambda)\,\overline{h_n(\lambda)}\,\mu(\mathrm{d}\lambda) \\
&= \int_{\Lambda} |f(t,\lambda)|^2\mu(\mathrm{d}\lambda).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

于是由本定理的条件及(2.54)式得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|X_t - Y_t|^2) \\
&= \boldsymbol{E}(|X_t|^2) + \boldsymbol{E}(|Y_t|^2) - \boldsymbol{E}(X_t\overline{Y}_t) - \boldsymbol{E}(\overline{X}_tY_t) \\
&= \int_{\Lambda}|f(t,\lambda)|^2\mu(\mathrm{d}\lambda) + \int_{\Lambda}|f(t,\lambda)|^2\mu(\mathrm{d}\lambda) \\
&\quad - \int_{\Lambda}|f(t,\lambda)|^2\mu(\mathrm{d}\lambda) - \int_{\Lambda}|f(t,\lambda)|^2\mu(\mathrm{d}\lambda) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以 $X_t = Y_t = (\mathrm{o})\int_{\Lambda} f(t,\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)$.

(iv) 推证满足(3.3)式的正交随机测度是唯一的.

事实上，若还有满足(3.3)式的正交随机测度 W，即

$$X_t = (\mathrm{o})\int_{\Lambda} f(t,\lambda)W(\mathrm{d}\lambda) \quad (t \in \mathbf{T}), \tag{3.16}$$

则由(3.6)，(3.16)，(3.4)式有

$$\begin{aligned}
Z(B) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k_n}\alpha_\nu^{(n)}X(t_\nu^{(n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{k_n}\alpha_\nu^{(n)}(\mathrm{o})\int_{\Lambda} f(t_\nu^{(n)},\lambda)W(\mathrm{d}\lambda)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{o})\int_\Lambda g_n(\lambda)W(\mathrm{d}\lambda)$$

$$= (\mathrm{o})\int_\Lambda \mathbf{1}_B(\lambda)W(\mathrm{d}\lambda) = W(B). \tag{3.17}$$

而(3.17)式对一切 $B \in \Lambda \cap \mathscr{B}^1$ 皆成立. 所以 $W \equiv Z$.

若 G 在 $\overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)$ 中不稠, 则由 G 产生的闭线性流型 $\mathscr{L}(G)$ 亦然, 所以必存在 $f \in \overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)$, 使 $f \not\equiv 0$, 且

$$(f, \overline{g}) = 0 \quad (\text{对一切 } g \in \mathscr{L}(G)), \tag{3.18}$$

(参见[69] p.72). 令

$$\widetilde{G} = \{f: f \in \overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu), (f, \overline{g}) = 0,$$
$$\text{对一切} g \in \mathscr{L}(G)\},$$

则对任何 $f \in \overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)$, 必可唯一地分解为

$$f = f_1 + f_2, \ f_1 \in \mathscr{L}(G), \ f_2 \in \widetilde{G}$$

(参见[69] p.71 的分解定理). 所以更有

$$\overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu) = \mathscr{L}(G \cup \widetilde{G}). \tag{3.19}$$

若令 $\widetilde{G} = \{f(t', \cdot): t' \in \mathbf{T}', f(t', \cdot) \in \overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)\}$, 则 (3.19) 式可写成

$$\overline{L}^2(\Lambda, \Lambda \cap \mathscr{B}^1, \mu)$$
$$= \mathscr{L}(f(t, \cdot), f(t', \cdot), t \in \mathbf{T}, t' \in \mathbf{T}'), \tag{3.20}$$

其中 $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}' = \varnothing$. 令

$$\widetilde{B}(s', t') = \int_\Lambda f(s', \lambda)\overline{f(t', \lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda) \quad (s', t' \in \mathbf{T}'). \tag{3.21}$$

则 $\widetilde{B}(s', t')$ 是共轭对称的, 且对任何正整数 n、复数 $a_1, \cdots, a_n$ 及 $t'_1, \cdots, t'_n \in \mathbf{T}'$, 有

$$\sum_{j,k=1}^n \widetilde{B}(t'_j, t'_k)a_j\overline{a}_k = \sum_{j,k=1}^n \int_\Lambda f(t'_j, \lambda)\overline{f(t'_k, \lambda)}a_j\overline{a}_k\mu(\mathrm{d}\lambda)$$

$$= \int_\Lambda \left|\sum_{j=1}^n a_j f(t'_j, \lambda)\right|^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \geqslant 0,$$

即 $\widetilde{B}(s',t')$ 是非负定的. 所以,仿命题 2.3,存在概率空间$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})$上的正态随机过程 $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_{t'}:t'\in\mathbf{T}'\}$,使

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{X}_{t'})=0\quad(t'\in\mathbf{T}');$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{X}_{s'}\widetilde{X}_{t'})=\int_\Lambda f(s',\lambda)\overline{f(t',\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda)=\widetilde{B}(s',t')\qquad(3.22)$$

($\widetilde{E}$ 表示对概率测度$\widetilde{P}$取期望). 再造乘积概率空间$(\Omega^*=\Omega\times\widetilde{\Omega}$, $\mathscr{F}^*=\mathscr{F}\times\widetilde{\mathscr{F}}$, $P^*=P\times\widetilde{P})$,定义此概率空间上的随机过程:

$$X^*(t,\omega^*)=\begin{cases}X(t,\omega), & \text{当 } t\in\mathbf{T},\ \omega^*=(\omega,\widetilde{\omega}),\\ \widetilde{X}(t,\widetilde{\omega}), & \text{当 } t\in\mathbf{T}',\ \omega^*=(\omega,\widetilde{\omega}),\end{cases}$$

显然,$\{X_t^*:t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}\}$ 是$(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^*)$上的二阶矩有限的复值随机过程,满足:

(i) $\boldsymbol{E}^*(X_t^*)=0,\ t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}'$;

$$\text{(ii)}\quad \boldsymbol{E}^*(X_s^*\overline{X}_t^*)=\begin{cases}\boldsymbol{E}(X_s\overline{X}_t), & \text{当 } s,t\in\mathbf{T},\\ \boldsymbol{E}(X_s)\widetilde{\boldsymbol{E}}(\overline{\widetilde{X}}_t)=0, & \text{当 } s\in\mathbf{T},\ t\in\mathbf{T}',\\ \widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{X}_s)\boldsymbol{E}(\overline{X}_t)=0, & \text{当 } s\in\mathbf{T}',t\in\mathbf{T},\\ \widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{X}_s\widetilde{X}_t), & \text{当 } s,t\in\mathbf{T}'.\end{cases}\qquad(3.23)$$

但是由 $\widetilde{G}$ 的定义得知

$$\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(t',\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda)=0\quad(t\in\mathbf{T},\ t'\in\mathbf{T}').\qquad(3.24)$$

由定理的条件及将(3.22),(3.24)代入(3.23)式,得

$$\boldsymbol{E}^*(X_s^*X_t^*)=\int_\Lambda f(s,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(\mathrm{d}\lambda)\quad(s,t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}')$$

$$f(t,\cdot)\in\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu)\quad(t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}').$$

又有

$$\mathscr{L}(f(t,\cdot),t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}')=\overline{L}^2(\Lambda,\Lambda\cap\mathscr{B}^1,\mu),$$

所以存在一个定义在 $\Lambda\cap\mathscr{B}^1$ 上的取值于 $H^*=L^2(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^*)$ 的正交随机测度 Z^*，使

$$X_t^*=(\mathrm{o})\int_\Lambda f(t,\lambda)Z^*(\mathrm{d}\lambda)\quad(t\in\mathbf{T}\cup\mathbf{T}').$$

特别地，把 t 的定义域由 $\mathbf{T}\cup\mathbf{T}'$ 局限到 $\mathbf{T}$ 上去，得到

$$X_t=(\mathrm{o})\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(\mathrm{d}\lambda)\quad(t\in\mathbf{T}),$$

其中 $Z(\omega,B)=Z^*((\omega,\widetilde{\omega}),B)\ (\omega\in\Omega,\ \widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega},\ B\in\Lambda\cap\mathscr{B}^1)$，$Z$ 是取值于 $H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的正交随机测度. 定理证毕.

定理 3.2 （宽平稳过程的谱展式）

(1) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为任一概率空间，$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$ 是有限测度空间，Z 是 $\mathscr{B}^1$ 上的取值于 $H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的正交随机测度，F 是 Z 的均方测度. 令

$$X_t=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}Z(\mathrm{d}\lambda)\quad(t\in\mathbf{R}),\tag{3.25}$$

则 $X=\{X_t:t\in\mathbf{R}\}$ 是均方连续的宽平稳过程，其相关函数为

$$B(\tau)=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau}F(\mathrm{d}\lambda)\quad(\tau\in\mathbf{R}),\tag{3.26}$$

因而 X 的谱测度就是 Z 的均方测度 F.

(2) 设 $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_t:t\in\mathbf{R}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的均方连续的宽平稳过程，其相关函数为

$$B(\tau)=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau}F(\mathrm{d}\lambda)\quad(\tau\in\mathbf{R})\tag{3.27}$$

（因而 F 是 $\widetilde{X}$ 的谱测度），则在 $(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$ 上存在唯一一个取值于 $H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的正交随机测度 Z 满足对每一固定的 $t\in\mathbf{R}$，有

$$\widetilde{X}_t=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}Z(\mathrm{d}\lambda),\tag{3.28}$$

且 Z 的均方测度为 F.

证 (1) 在定理 3.1 中取 $f(t,\lambda)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}$，$\Lambda=\mathbf{R}$，得知

(3.25)式所定的随机过程是二阶矩有限的随机过程，且由(3.2)式知 X 的相关函数

$$B(\tau)=\boldsymbol{E}(X_{t+\tau}\overline{X}_t)=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\tau)\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}F(\mathrm{d}\lambda)$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\lambda}F(\mathrm{d}\lambda)$$

与 t 无关，所以 X 是宽平稳过程，又因为 $B(\tau)$ 是连续函数，所以 X 是均方连续的，且谱测度就是 Z 的均方测度 F.

(2)　在定理 3.1 的(2)中，取 $\Lambda=\mathbf{R}$, $X_t=\widetilde{X}_t$, $\mathbf{T}=\mathbf{R}$, $f(t,\lambda)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}$, $\mu=F$, 则由 Weierstrass 定理知 $\mathscr{L}(f(t,\cdot),t\in\mathbf{R})=\overline{L}^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$，于是得知在$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$上存在唯一一个取值于 H 的正交随机测度 Z 满足对每个固定的 $t\in\mathbf{R}$，有

$$\widetilde{X}_t=(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}Z(\mathrm{d}\lambda),$$

且 Z 的均方测度为 F.

定理 3.2′　(宽平稳序列的谱展式)

(1)　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任一概率空间，$([-\pi,\pi],[-\pi,\pi]\cap\mathscr{B}^1,F)$是有限测度空间，$Z$ 是$[-\pi,\pi]\cap\mathscr{B}^1$上的取值于 $H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的正交随机测度，F 是 Z 的均方测度. 令

$$X_n=(\mathrm{o})\int_{[-\pi,\pi]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda n}Z(\mathrm{d}\lambda)\quad(n=0,\pm1,\cdots),\quad(3.25)'$$

则 $X=\{X_n:n=0,\pm1,\cdots\}$ 是宽平稳序列，其相关函数为

$$B(n)=\int_{[-\pi,\pi]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda n}F(\mathrm{d}\lambda)\quad(n=0,\pm1,\cdots),\quad(3.26)'$$

因而 X 的谱测度就是 Z 的均方测度 F.

(2)　设 $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_n:n=0,\pm1,\cdots\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的宽平稳序列，其相关函数为

$$B(n)=\int_{[-\pi,\pi]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda n}F(\mathrm{d}\lambda)\quad(n=0,\pm1,\cdots)\quad(3.27)'$$

(因而 F 是 $\widetilde{X}$ 的谱测度),则在($[-\pi,\pi],[-\pi,\pi]\cap\mathscr{B}^1,F$)上存在唯一一个正交随机测度 Z,它取值于 $H=\overline{L}^2(\Omega,\mathscr{F},P)$,对每一个固定的 n,有

$$\widetilde{X}_n=(\mathrm{o})\int_{[-\pi,\pi]}e^{i\lambda n}Z(d\lambda), \qquad (3.28)'$$

且 Z 的均方测度为 F.

证 应用定理3.1,取 $\Lambda=[-\pi,\pi]$, $\mathbf{T}=\{0,\pm1,\cdots\}$,仿定理3.2即可证此定理.

§4 谱展式的应用、大数定律及谱测度的估计

在这一节里,我们将应用宽平稳过程的谱展式来研究宽平稳过程的大数定律及其谱测度的渐近估计,为此,我们先引进另一种类型的随机积分.

定义4.1 设 $X=\{X_t:t\in\mathbf{R}\}$ 是概率空间($\Omega,\mathscr{F},P$)上的二阶矩有穷的复值随机过程,$f(t)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的复值函数.考虑有穷区间$[a,b]$,对$[a,b]$的任一有穷分割 Δ,

$$\Delta:a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

令 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$.在$[t_{i-1},t_i]$中任取一点 $\tau_i(i=1,\cdots,n)$,构造和$\sum_{i=1}^n f(\tau_i)X(\tau_i)\Delta t_i$,显然,它是一个二阶矩有穷的复值随机变量.如果当 $\delta=\delta(\Delta)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i\to0$ 时,此和在 L^2 意义下有极限,且此极限不依赖于分割 Δ 及 τ_i 的取法,则称 $f(t)X(t)$ 在$[a,b]$上是R-L² 可积的并称此极限为 $f(t)X(t)$ 在$[a,b]$上的R-L² 积分,记作

$$(\text{R-L}^2)\int_a^b f(t)X(t)dt.$$

如果当 $a\to-\infty,b\to\infty$,$(\text{R-L}^2)\int_a^b f(t)X(t)dt$ 收敛于某一

极限,则记此极限为

$$(\text{R-L}^2)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

定理 4.1　为使 $f(t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上 R-L^2 可积,只需 Riemann 积分:

$$\int_a^b\int_a^b B(t,s)f(t)\overline{f(s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \tag{4.1}$$

存在,其中 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $B(t,s)=\boldsymbol{E}(X(t)\overline{X(s)})$. 此外,若(4.1)式存在,再令

$$Y(t)=(\text{R-L}^2)\int_{t_0}^{t} f(\tau)X(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$(a\leqslant t_0 < t \leqslant b,\ -\infty < t_0 < t < \infty) \tag{4.2}$$

则有

$$\boldsymbol{E}(Y(t)\overline{Y(s)})=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} B(u,v)f(u)\overline{f(v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{4.3}$$

首先证明下面引理.

引理 4.1　设 $\{\xi_t : t\in\mathbf{R}\}$ 是二阶矩有穷的复值随机过程,则

"$\lim\limits_{t\to 0}\xi_t$ 存在(在 L^2 意义下)$\Longleftrightarrow$

$\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t'\to 0}}\boldsymbol{E}(\xi_t\bar{\xi}_{t'})$ 存在且有穷".

证　"$\Longrightarrow$". 由命题 2.4 即得.

"$\Longleftarrow$". 由于

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t'\to 0}}\boldsymbol{E}(|\xi_t-\xi_{t'}|^2)$$

$$=\lim_{\substack{t\to 0\\ t'\to 0}}[\boldsymbol{E}(\xi_{t'}\bar{\xi}_t)+\boldsymbol{E}(\xi_{t'}\bar{\xi}_{t'})-\boldsymbol{E}(\xi_t\bar{\xi}_{t'})-\boldsymbol{E}(\xi_{t'}\bar{\xi}_t)],$$

故"$\Longleftarrow$"成立,引理获证.

下面证明定理 4.1.

证　首先考虑 $[a,b]$ 是有穷区间的情况. 用引理 4.1,为证 $f(t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 R-L^2 积分存在,只需证明:对 $[a,b]$ 的任

意两个分割 Δ_1 及 Δ_2，当 $\delta(\Delta_1)\to 0$，$\delta(\Delta_2)\to 0$ 时，

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n_1} f(\tau_i)X(\tau_i)\Delta t_i\ \overline{\sum_{j=1}^{n_2} f(\mu_j)X(\mu_j)\Delta s_j}\Big) \tag{4.4}$$

存在有穷极限. 而(4.4)式的数值为

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} f(\tau_i)\,\overline{f(\mu_j)}B(\tau_i,\mu_j)\Delta t_i\Delta s_j,$$

故由 Riemann 积分的定义及 Riemann 积分(4.1)的存在性得知 $f(t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上是 R-L^2 可积的.

对任意两个有穷区间 $[a_1,b_1]$，$[a_2,b_2]$，作对应的任意分割：

$$\widetilde{\Delta}_1:\ a_1 = p_0 < p_1 < \cdots < p_{m_1} = b_1,$$

$$\widetilde{\Delta}_2:\ a_2 = q_0 < q_1 < \cdots < q_{m_2} = b_2,$$

任取 $\rho_i\in[p_{i-1},p_i]$，$\gamma_i\in[q_{i-1},q_i]$，仿上可证

$$E\Big((\text{R-L}^2)\int_{a_1}^{b_1} f(\rho)X(\rho)\mathrm{d}\rho\cdot\overline{(\text{R-L}^2)\int_{b_2}^{b_2} f(\gamma)X(\gamma)\mathrm{d}\gamma}\Big)$$

$$=\lim_{\substack{\delta(\widetilde{\Delta}_1)\to 0\\ \delta(\widetilde{\Delta}_2)\to 0}} E\Big(\sum_{i=1}^{m_1} f(\rho_i)X(\rho_i)\Delta p_i\cdot\overline{\sum_{j=1}^{m_2} f(\gamma_j)X(\gamma_j)\Delta q_j}\Big)$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} B(u,v)f(u)\,\overline{f(v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{4.5}$$

取 $[a_1,b_1]=[t_0,t]$，$[a_2,b_2]=[t_0,s]$，即得(4.3)式. 在(4.5)式中令 $a_1,a_2\to-\infty$，$b_1,b_2\to\infty$，再一次用引理4.1，得对无穷区间，定理的前半部仍成立.

定理 4.2(大数定律) 设 $X=\{X(t):t\in\mathbf{R}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的均方连续的宽平稳过程，$F(A)$，$Z(A)$ $(A\in\mathscr{B}^1)$ 及 $B(\tau)$ 分别为 X 的谱测度、正交随机测度及相关函数，则

(1) $$\lim_{T\to\infty}(\text{R-L}^2)\int_0^T\frac{1}{T}X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu}\mathrm{d}t = Z(\{\mu\}),\ [L^2]\ (\mu\in\mathbf{R}); \tag{4.6}$$

(2)　$\boldsymbol{E}(|Z(\{\mu\})|^2)=F(\{\mu\})=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T B(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\mu}\mathrm{d}\tau\ (\mu\in\mathbf{R}).$

(4.7)

特别地,若 $\boldsymbol{E}(X_t)\equiv 0$,在(4.6),(4.7)式中取 $\mu=0$,得

$$\text{“}\lim_{T\to\infty}(\text{R-L}^2)\int_0^T \frac{1}{T}X(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{E}(X(t)) = 0,\ [L^2]$$

$$\Longleftrightarrow F(\{0\}) = 0\text{”}. \tag{4.8}$$

证　(1)　由于 X 是均方连续的,用命题2.2和 $B(\tau)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,故由定理 4.1 知 $X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu}$ 在 $[0,T]$ 上是 R-L^2 可积的.再令

$$X^*(t) = X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu} - Z(\{\mu\}), \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}W(T) &= (\text{R-L}^2)\int_0^T \frac{1}{T}X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu}\mathrm{d}t - Z(\mu)\\ &= (\text{R-L}^2)\int_0^T \frac{1}{T}X^*(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.10}$$

由 Z 的正交性有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\left((\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} f(\lambda)\,\overline{Z(\{\mu\})}Z(\mathrm{d}\lambda)\right) = f(\mu)\boldsymbol{E}(|Z(\{\mu\})|^2)\\ &\quad = f(\mu)F(\{\mu\})\\ &\qquad (\text{对一切 } f\in \overline{L}^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F),\ \mu\in\mathbf{R}),\end{aligned} \tag{4.11}$$

在(4.11)式中取 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\lambda}$ 并利用(3.28)和(4.9)式可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(X^*(t)\,\overline{X^*(s)})\\ &\overset{(4.9)}{=\!=\!=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-s)\mu}B(t-s) + \boldsymbol{E}(|Z(\{\mu\})|^2)\\ &\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu}\boldsymbol{E}(X(t)\,\overline{Z(\{\mu\})}) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\mu}\,\overline{\boldsymbol{E}(X(s)}Z(\{\mu\}))\\ &\overset{(3.28)}{=\!=\!=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-s)\mu}B(t-s) + F(\{\mu\})\\ &\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu}\boldsymbol{E}\left((\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}Z(\mathrm{d}\lambda)\cdot\overline{Z(\{\mu\})}\right)\\ &\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\mu}\boldsymbol{E}\left(\overline{(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\lambda}Z(\mathrm{d}\lambda)}\cdot Z(\{\mu\})\right)\\ &\overset{(4.11)}{=\!=\!=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-s)\mu}B(t-s) + F(\{\mu\})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-it\mu}e^{it\mu}F(\{\mu\}) - e^{is\mu}e^{-is\mu}F(\{\mu\})\\
&= e^{-i(t-s)\mu}B(t-s) - F(\{\mu\})\\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{i(t-s)(\lambda-\mu)}F(d\lambda) - F(\{\mu\}).
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

令

$$
F^*(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda+\mu), & \text{当 } \lambda < 0,\\ F(\lambda+\mu) - F(\{\mu\}), & \text{当 } \lambda \geqslant 0, \end{cases}
$$

其中 $F(t) = F((-\infty, t])$，$F^*(\{0\}) = 0$，则由(4.12)式得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(X^*(t)\overline{X^*(s)})\\
&= \int_{\mathbf{R}-\{0\}} e^{i(t-s)\lambda}F^*(d\lambda) + F(\{\mu\}) - F(\{\mu\})\\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{i(t-s)\lambda}F^*(d\lambda).
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

所以由(4.3)式得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|W_T|^2) &= \boldsymbol{E}\left(\left|(R-L^2)\int_0^t \frac{1}{T}X^*(t)dt\right|^2\right)\\
&\xlongequal{(4.3)} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \boldsymbol{E}(X^*(t)\overline{X^*(s)})dtds\\
&\xlongequal{(4.13)} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left(\int_{\mathbf{R}} e^{i(t-s)\lambda}F^*(d\lambda)\right)dtds.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

由于 F^* 是有限测度，$[0,T]$ 是有限区间，$|e^{i(t-s)\lambda}| \leqslant 1$，所以在(4.14)式中应用 Fubini 定理，即得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(|W_T|^2) &= \int_{\mathbf{R}} F^*(d\lambda)\left(\left|\frac{1}{T}\int_0^T e^{it\lambda}dt\right|^2\right)\\
&= \int_{\mathbf{R}}\left|\frac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda T}\right|^2 F^*(d\lambda),
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

令 $T \to \infty$，并利用控制收敛定理，即得

$$
\lim_{T\to\infty} \boldsymbol{E}(|W_T|^2) = 0, \tag{4.16}
$$

$\Bigg($注意：定义 $\left.\dfrac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda T}\right|_{T=0} = \lim\limits_{T\to 0}\dfrac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda T} = 1$，又

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda T}=\mathbf{1}_{\{0\}}(\lambda),\ F^*(\{0\})=0,\ \left|\frac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda T}\right|\leqslant 1.)$$

(4.6) 式得证.

(2) (4.7) 式的第一等式由 Z 的定义即得，而第二等式用 Fubini 定理及控制收敛定理可知

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T B(\tau)e^{-i\tau\mu}d\tau\\
&=\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbf{R}}F(d\lambda)\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda-\mu)\tau}d\tau\right)\\
&=\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{e^{i(\lambda-\mu)T}-1}{i(\lambda-\mu)T}F(d\lambda)\\
&=\int_{\mathbf{R}}\lim_{T\to\infty}\frac{e^{i(\lambda-\mu)T}-1}{i(\lambda-\mu)T}F(d\lambda)\\
&=\int_{\mathbf{R}}\mathbf{1}_{\{\mu\}}(\lambda)F(d\lambda)=F(\{\mu\}).
\end{aligned}$$

附注：在定理 4.2，(4.6)，(4.7)，(4.8) 式中，以 $T-s$ 代 T $(T-s\to\infty)$，三式仍然成立.

定理 4.2′（宽平稳序列的大数定律）　设 $X=\{X_n:n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为宽平稳序列，$F(A)$，$Z(A)(A\in\mathscr{B}^1)$ 及 $B(m)$ 分别为 X 的谱测度、正交随机测度及相关函数，则

(1) $$\lim_{n-m+1\to\infty}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}X_j e^{-ij\mu}=Z(\{\mu\}),\ [L^2] \qquad (4.6)'$$

对任何 $\mu\in[-\pi,\pi]$ 成立；

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|Z(\{\mu\})|^2)&=F(\{\mu\})\\&=\lim_{n-m+1\to\infty}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}B(j)e^{-ij\mu}\quad(\mu\in[-\pi,\pi]).\end{aligned} \qquad (4.7)'$$

特别地，若 $\boldsymbol{E}(X_n)\equiv0$，在 (4.6)′，(4.7)′ 式中取 $\mu=0$，得

$$\text{“}\lim_{n-m+1\to\infty}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}X_j=\boldsymbol{E}(X_n)=0,\ [L^2]$$
$$\Longleftrightarrow F(\{0\})=0\text{”}. \qquad (4.8)'$$

证 (1) $$\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}X_j e^{-ij\mu}$$

$$=(o)\int_{[-\pi,\pi]}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}e^{ij(\lambda-\mu)}Z(d\lambda)$$

$$=(o)\int_{[-\pi,\pi]}\frac{e^{im(\lambda-\mu)}}{n-m+1}\cdot\frac{1-e^{i(n-m+1)(\lambda-\mu)}}{1-e^{i(\lambda-\mu)}}Z(d\lambda). \tag{4.17}$$

(4.17) 式中之被积函数当 $\mu=\lambda$ 时,定义为 1,但其被积函数的绝对值不超过 1,且

$$\lim_{n-m+1\to\infty}\left(\frac{e^{im(\lambda-\mu)}}{n-m+1}\cdot\frac{1-e^{i(n-m+1)(\lambda-\mu)}}{1-e^{i(\lambda-\mu)}}\right)$$
$$=\mathbf{1}_{\{\mu\}}(\lambda)\quad(\text{对一切 }\lambda,\mu\in[-\pi,\pi]).$$

而 F 在$[-\pi,\pi]\cap\mathscr{B}^1$ 上是有限测度,所以

$$\lim_{n-m+1\to\infty}\left(\frac{e^{im(\lambda-\mu)}}{n-m+1}\cdot\frac{1-e^{i(n-m+1)(\lambda-\mu)}}{1-e^{i(\lambda-\mu)}}\right)$$
$$=\mathbf{1}_{\{\mu\}}(\lambda),\ [L^2]\ (\text{关于 }F\text{ 测度}) \tag{4.18}$$

由(4.17),(4.18) 式并应用关于正交随机测度的积分性质 4,得

$$\lim_{n-m+1\to\infty}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n+m+1}X_j e^{-ij\mu}$$
$$=(o)\int_{[-\pi,\pi]}\mathbf{1}_{\{\mu\}}(\lambda)Z(d\lambda)=Z(\{\mu\}).$$

(2) (4.7)′ 中第一式,由 Z 的定义可得,而第二式由

$$\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}B(j)e^{-ij\mu}$$

$$=\int_{[-\pi,\pi]}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}e^{ij(\lambda-\mu)}F(d\lambda)$$

$$=\int_{[-\pi,\pi]}\frac{e^{im(\lambda-\mu)}}{n-m+1}\cdot\frac{1-e^{i(n-m+1)(\lambda-\mu)}}{1-e^{i(\lambda-\mu)}}F(d\lambda). \tag{4.19}$$

由(4.18)(由 F 是有限测度,$[L^2]$ 收敛必蕴含$[L^1]$ 收敛)及(4.19) 式得

$$\lim_{n-m+1\to\infty}\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{n-m+1}B(j)e^{-ij\mu}$$
$$=\int_{[-\pi,\pi]}\mathbf{1}_{\{\mu\}}(\lambda)F(d\lambda)=F(\{\mu\}).$$

定理证毕.

下面我们研究如何用样本序列来估计相关函数与谱函数的问题.

定理 4.3 设 $X^{(\nu)}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 $(X_0^{(\nu)},\varphi)$ 平稳过程(即 $X_n^{(\nu)}=X_0^{(\nu)}\circ\varphi^n$, $n\geqslant 0$,定义参见例 1.4), $\nu=1,2$. $X=\{X_n=X_n^{(1)}+iX_n^{(2)}:n\geqslant 0\}$, φ 是遍历的保测变换, $\boldsymbol{E}(X_n)=a$.

(1) 任取非负整数 $m_1,\cdots,m_k$,任取 k 维的复变复值函数 f,使 $Y_0\equiv f(X_{m_1},\cdots,X_{m_k})$ 为期望有穷的复值随机变量. 令 $Y_n=Y_0\circ\varphi^n(n\geqslant 0)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}Y_j=\boldsymbol{E}(Y_0),\ [\text{a.e.}],\ [L^1].\tag{4.20}$$

(2) 若 $\boldsymbol{E}(|X_0|^2)<\infty$, $B(\tau),F(A)$ 是 X 的相关函数及谱测度,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(X_{\tau+j}\overline{X}_j)=\boldsymbol{E}(X_\tau\overline{X}_0)=B(\tau),\ [\text{a.e.}],\ [L^1],\tag{4.21}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}X_je^{-ij\lambda}\right|^2d\lambda=F((\mu_1,\mu_2]),\ [\text{a.e.}]\tag{4.22}$$

($\mu_1,\mu_2\in C(F)$,而 $\mu\in C(F)$ 意即 $F(\{\mu\})=0$). (4.22) 式左边的积分是含参变量 ω 的普通 Lebesgue 积分.

证 (1) 因为 $Y=\{Y_n:n\geqslant 0\}$ 是 (Y_0,φ) 平稳过程, $\boldsymbol{E}(|Y_0|)<\infty$, φ 是遍历的保测变换,所以,由 (1.37) 式即得 (4.20) 式.

(2) 在 (1) 中取 $k=2$, $m_1=\tau$, $m_2=0$, $Y_0=X_\tau\overline{X}_0$,则由 $\boldsymbol{E}(|X_0|^2)<\infty$ 得 $\boldsymbol{E}(|Y_0|)<\infty$. 因此,由 (4.20) 式即得

(4.21) 式.

最后证明(4.22) 式. 令

$$\Phi_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{1}{n}\Big|\sum_{j=0}^{n-1}X_j e^{-ij\mu}\Big|^2 d\mu, \tag{4.23}$$

右端的积分是含参变量 ω 的普通 Lebesgue 积分. 因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\mu}d\mu=\begin{cases}0, & 当\ j\neq 0,\\ 2\pi, & 当\ j=0.\end{cases} \tag{4.24}$$

将(4.24) 代入(4.23) 式得

$$\Phi_n(\pi)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}|X_j|^2 d\mu\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|X_j|^2. \tag{4.25}$$

所以由(4.25),(4.21) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(\pi)=B(0),\ [\text{a.e.}]. \tag{4.26}$$

显然,对任何固定的 $\omega\in\Omega$ 和 n, $\Phi_n(\lambda)$ 是 λ 的单调非降右连续实变实值函数($\lambda\in[-\pi,\pi]$). 所以可以由 $\Phi_n(\lambda)$ 产生一个含参变量 ω 的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 但是由(4.23),(4.24) 式得

$$\begin{aligned}&\int_{[-\pi,\pi]}e^{it\lambda}\Phi_n(d\lambda)\\ &\xlongequal{(4.23)}\int_{[-\pi,\pi]}e^{it\lambda}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\Big|\sum_{j=0}^{n-1}X_j e^{-ij\lambda}\Big|^2 d\lambda\\ &=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}\int_{[-\pi,\pi]}X_j\overline{X}_k e^{i(t-j+k)\lambda}d\lambda\\ &\xlongequal{(4.24)}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-t-1}X_{j+t}\overline{X}_j.\end{aligned} \tag{4.27}$$

令 $n\to\infty$,并注意(4.21) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-\pi,\pi]}e^{it\lambda}\Phi_n(d\lambda)=B(t)=\int_{[-\pi,\pi]}e^{it\lambda}F(d\lambda),\ [\text{a.e.}]. \tag{4.28}$$

所以由 Lévy 定理得知

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n((\mu_1,\mu_2])=F((\mu_1,\mu_2]),\ [\text{a.e.}]\quad(\mu_1,\mu_2\in C(F)).$$

定理证毕.

§5　算子遍历定理及其在随机过程中的应用

在本节中,我们将要把平稳过程的遍历理论加以抽象,研究算子的遍历定理,然后再将这类定理应用到随机过程中去.

定义 5.1　设$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$是Banach空间,T是由$\mathbf{B}$到$\mathbf{B}$的有界线性算子.如果$\|T\| \triangleq \sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in\mathbf{B}}} \|Tf\| \leqslant 1$,则称$T$是**压缩的**,特别地,若$\|T\|=1$,则称$T$是**保范的**.这时必有

$$\|Tf\| = \|f\| \quad (\forall f \in \mathbf{B}).$$

若$\mathbf{B}=L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$,称**由B到B的算子$T$是正的**,如果"$f\geqslant 0 \Longrightarrow Tf\geqslant 0$".

例 5.1　设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任一测度空间,φ是保测变换.定义

$$Tf = f\circ\varphi, f\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P) \quad (1\leqslant p\leqslant\infty), \tag{5.1}$$

则$T: L^p(\Omega,\mathscr{F},P) \mapsto L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$,而且$T$还是正的保范线性算子.

证　记$\|\cdot\|_p$为$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$中的范数.设$1\leqslant p<\infty$.任取$f\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,则

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_\Omega |Tf|^p \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega |f\circ\varphi|^p \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}(\mu\circ\varphi^{-1}) \\ &= \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu = \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

再设$p=\infty$.对任意的$f\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,仍有

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu(|Tf|>a)=0\} \\ &= \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu(|f\circ\varphi|>a)=0\} \\ &= \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu\circ\varphi^{-1}(|f|^{-1}(a,\infty))=0\} \\ &= \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu(|f|^{-1}(a,\infty))=0\}\end{aligned}$$

$$= \inf\{a : a \geqslant 0,\ \mu(|f| > a) = 0\}$$
$$= \|f\|_\infty < \infty.$$

显然 T 是正的、线性的. 故 T 是正的保范线性算子.

例 5.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$是一可测空间,对任何 $\omega \in \Omega$, $P(\omega,\cdot)$是$\mathscr{F}$上的概率测度,对任何 $A \in \mathscr{F}$, $P(\cdot,A) \in \mathscr{F}$. 若测度 μ 满足

$$\int_\Omega \mu(\mathrm{d}\omega)P(\omega,A) = \mu(A) \quad (A \in \mathscr{F}), \tag{5.2}$$

定义

$$Tf = \int_\Omega P(\cdot,\mathrm{d}\omega)f(\omega), \quad f \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu), \tag{5.3}$$

则 $T: L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu) \mapsto L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, 而且 T 是压缩型线性算子 $(\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 此外, T 还是由 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu) \cap L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 到 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu) \cap L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 的压缩型线性算子.

证 显然 T 是线性算子.

设 $1 \leqslant p < \infty$. 任取 $f \in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, 由于 $P(\omega,\Omega) \equiv 1$, 用 Hölder 不等式、Fubini 定理及(5.2) 式可得

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_\Omega \left|\int_\Omega P(\omega_1,\mathrm{d}\omega)f(\omega)\right|^p \mu(\mathrm{d}\omega_1) \\
&\leqslant \int_\Omega \left(\int_\Omega P(\omega_1,\mathrm{d}\omega)|f(\omega)|^p\right)\mu(\mathrm{d}\omega_1) \\
&= \int_\Omega \mu(\mathrm{d}\omega_1)\int_\Omega P(\omega_1,\mathrm{d}\omega)|f(\omega)|^p \\
&= \int_\Omega \mu(\mathrm{d}\omega)|f(\omega)|^p = \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

任取 $f \in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu) \cap L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, 可知 $Tf \in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, 且 $\|Tf\|_1 \leqslant \|f\|_1$. 令

$$\nu_f(A) = \int_A \mu(\mathrm{d}\omega)|f(\omega)| \quad (A \in \mathscr{F}),$$

由于 $f \in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, 所以 $\nu_f \ll \mu$(即 ν_f 关于 μ 绝对连续). 因此由(5.2) 式有

$$“\mu(A)=0 \Longrightarrow \int_A P(\cdot,\mathrm{d}\omega)\,|f(\omega)|=0,\ [\mathrm{a.e.}]”. \quad (5.4)$$

所以

$$\begin{aligned}
“\mu(|f|>a)=0 \Longrightarrow \\
|Tf| &\leqslant \int_\Omega P(\cdot,\mathrm{d}\omega)\,|f(\omega)| \\
&= \int_{\{|f|\leqslant a\}} P(\cdot,\mathrm{d}\omega)\,|f(\omega)| \\
&\leqslant a,\ [\mathrm{a.e.}]”,
\end{aligned} \quad (5.5)$$

此即“$\mu(|f|>a)=0 \Longrightarrow \mu(|Tf|>a)=0$”. 因此

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_\infty &= \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu(|Tf|>a)=0\} \\
&\leqslant \inf\{a: a\geqslant 0,\ \mu(|f|>a)=0\} \\
&= \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

故例 5.2 中的诸论断成立.

定理 5.1(Hopf)　设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任意测度空间,$T:L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)\to L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,且 T 是正的压缩型线性算子,则

$$\int_{\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=0}^{k-1} T^i f\geqslant 0\}} f\mathrm{d}\mu \geqslant 0 \quad (\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu),\ n\geqslant 1). \tag{5.6}$$

证　令 $S_0 f\equiv 0,\ S_k f=\sum\limits_{i=0}^{k-1} T^i f\ (k\geqslant 1)$,

$$W_n^+ f=\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k f \quad (f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu),\ n\geqslant 0),$$

则

(ⅰ) $W_n^+ f\geqslant 0\ (\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu),\ n\geqslant 0)$;

(ⅱ) $W_n^+ f\geqslant S_k f\ (\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu),\ 0\leqslant k\leqslant n,\ n\geqslant 0)$;

(ⅲ) $$\begin{aligned}
\{W_n^+ f\geqslant 0\} &= \Big\{\Big(0 \vee \Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=0}^{k-1} T^i f\Big)\Big)\geqslant 0\Big\} \\
&= \Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=0}^{k-1} T^i f\geqslant 0\Big\}.
\end{aligned}$$

由(ⅱ)及 T 是正的线性算子得

$$f+TW_n^+f \geqslant f+TS_kf=S_{k+1}f \quad (0\leqslant k\leqslant n).$$

所以由 $S_0f=0$,得

$$\begin{aligned} f+TW_n^+f &\geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n+1} S_kf \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} S_kf \\ &= W_n^+f \quad (\text{在}\{W_n^+f\geqslant 0\}\text{上}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

即

$$f\geqslant W_n^+f-TW_n^+f \quad (\text{在}\{W_n^+f\geqslant 0\}\text{上}). \tag{5.8}$$

由(ⅲ)及(5.8)并注意 T 是正算子(从而$\{W_n^+f\geqslant 0\}\subset\{TW_n^+f\geqslant 0\}$)和(ⅰ)可得

$$\begin{aligned} \int_{\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=0}^{k-1}T^if\geqslant 0\}} f\mathrm{d}\mu &= \int_{\{W_n^+f\geqslant 0\}} f\mathrm{d}\mu \\ &\geqslant \int_{\{W_n^+f\geqslant 0\}} (W_n^+f-TW_n^+f)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega (W_n^+f-TW_n^+f)\mathrm{d}\mu - \int_{\{W_n^+f<0\}} (W_n^+f-TW_n^+f)\mathrm{d}\mu \\ &\geqslant \int_\Omega (W_n^+f-TW_n^+f)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega |W_n^+f|\mathrm{d}\mu - \int_\Omega |TW_n^+f|\mathrm{d}\mu \\ &= \|W_n^+f\|_1 - \|TW_n^+f\|_1 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

定理 5.1 得证.

系 设 φ 是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的保测变换. 定义 $Tf=f\circ\varphi$ $(\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu))$. 由例 5.1 知 T 是由 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 到 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 的保范的、正的线性算子,若令 $X_i=T^if$ $(i=0,1,\cdots)$,则

$$\int_{\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\sum\limits_{i=0}^{k-1}X_i\geqslant 0\}} X_0\mathrm{d}\mu\geqslant 0. \tag{5.10}$$

注 若 μ 是概率测度 P,用定理 1.1,(5.10)式实质上就是定理 1.2 的(1.11)式.

下面我们介绍一个非常广泛而且应用颇多的算子遍历定理，它的证明很长，故只叙述结果，不予证明，有兴趣的读者请参见[8].

定理 5.2(Chacon and Ornstein)　设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任一测度空间，T 是由$L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$到 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的、正的压缩型线性算子，则对任何 $f,p\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，$p\geqslant 0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}T^kf}{\sum\limits_{k=0}^{n}T^kp}$$

在 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{T^kp>0\}$ 上[a.e.]存在且有穷.

证明参见[8].

令$(\Omega,\mathscr{F})$是任一可测空间，

$$\mathscr{L}=\{\mu:\mu\text{ 是 }\mathscr{F}\text{上的可数可加的实值集合函数}\},$$

如第八章定理 1.2 后面一样，在 $\mathscr{L}$ 中定义线性运算和范数 $\|\mu\|=|\mu|(\Omega)$，则$(\mathscr{L},\|\cdot\|)$是 Banach 空间. 如 $\mu_1,\mu_2\in\mathscr{L}$，$\mu_1\ll\mu_2$ 即 μ_1 关于 μ_2 绝对连续，则用$\dfrac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mu_2}$表示 μ_1 对 μ_2 的 Radon-Nikodym 导数.

定理 5.3　设 U 是由 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}$ 的正的压缩型线性算子. $\alpha,\beta\in\mathscr{L}$，$\beta\geqslant 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}U^k\alpha\right)}{\mathrm{d}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}U^k\beta\right)}$$

在 $\Omega-\Omega^*$ 上存在且有穷，其中 $\Omega^*\in\mathscr{F}$，且 $U^k\beta(\Omega^*)=0$ (对一切 $k\geqslant 0$).

证　首先我们注意到：若 $\gamma,\delta,\mu\in\mathscr{L}$，$\mu\geqslant 0$，$\gamma\ll\mu$，$\delta\ll\mu$，$\dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\mu}>0$，则$\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\delta}$存在而且

$$\frac{d\gamma}{d\delta}=\frac{d\gamma}{d\mu}\Big/\frac{d\delta}{d\mu}. \tag{5.11}$$

事实上,由 $\delta\ll\mu$ 得

$$\delta(B)=\int_B\frac{d\delta}{d\mu}d\mu \quad (\forall B\in\mathscr{F}).$$

而$\dfrac{d\delta}{d\mu}>0$,所以

$$\delta(B)=0\Longrightarrow\mu(B)=0. \tag{5.12}$$

又由 $\gamma\ll\mu$ 得知

$$\mu(B)=0\Longrightarrow\gamma(B)=0. \tag{5.13}$$

由(5.12)和(5.13)得知 $\gamma\ll\delta$,且对任何 $B\in\mathscr{F}$还有

$$\int_B\frac{d\gamma}{d\mu}d\mu=\gamma(B)=\int_B\frac{d\gamma}{d\delta}d\delta=\int_B\frac{d\gamma}{d\delta}\frac{d\delta}{d\mu}d\mu.$$

所以$\dfrac{d\gamma}{d\mu}=\dfrac{d\gamma}{d\delta}\cdot\dfrac{d\delta}{d\mu}$. 而$\dfrac{d\delta}{d\mu}>0$,所以

$$\frac{d\gamma}{d\delta}=\frac{d\gamma}{d\mu}\Big/\frac{d\delta}{d\mu}.$$

(5.11)得证. 下面定义

$$\mu=\sum_{k=0}^{\infty}C_kU^k(\beta+|\alpha|),\ C_k>0,\ \sum_{k=0}^{\infty}C_k=1, \tag{5.14}$$

则由 U 是正的压缩型线性算子及$\beta+|\alpha|\geqslant0$ 得 $\mu\geqslant0$, $\mu\in\mathscr{L}$, 且

$$\begin{aligned}\|\mu\|&=\sum_{k=0}^{\infty}C_kU^k(\beta+|\alpha|)(\Omega)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}C_k\|\beta+|\alpha|\|\\&=\|\beta+|\alpha|\|<\infty.\end{aligned}$$

而由(5.14)知

$$U^k\alpha\ll\mu,\ U^k\beta\ll\mu\ (k\geqslant0). \tag{5.15}$$

所以由(5.11)知:Radon-Nikodym 导数

$$\frac{d\left(\sum\limits_{k=0}^{n}U^k\alpha\right)}{d\left(\sum\limits_{k=0}^{n}U^k\beta\right)}$$

在$\{\omega\in\Omega:\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{n}U^k\beta\right)/\mathrm{d}\mu>0\}$上有定义.

对任意$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,定义

$$\xi_f(B)=\int_B f\mathrm{d}\mu\quad(B\in\mathscr{F}),\tag{5.16}$$

则$\xi_f\in\mathscr{L}$, $\xi_f\ll\mu$, $|\xi_f|=\xi_f^+ +\xi_f^-$, $\xi_f=\xi_f^+ -\xi_f^-$.而由U是正的压缩型线性算子和$\xi_f\ll\mu$得知

$$U\xi_f\ll\mu.$$

所以可定义

$$Tf=\mathrm{d}(U\xi_f)/\mathrm{d}\mu,\quad f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu).$$

显然T是由$L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$到$L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的线性算子.若$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, $f\geqslant 0$,则$\xi_f\in\mathscr{L}$, $\xi_f\geqslant 0$.而U是正算子,所以$U\xi_f\geqslant 0$.又因为$\mu\geqslant 0$, $\mu\in\mathscr{L}$,所以$Tf=\mathrm{d}(U\xi_f)/\mathrm{d}\mu\geqslant 0$,此即$T$是正算子.记$L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$中的范数为$\|\cdot\|_1$,则

$$\|Tf\|_1=\int_\Omega|Tf|\mathrm{d}\mu=\|U\xi_f\|\leqslant\|\xi_f\|=|\xi_f|(\Omega)$$
$$=\int_\Omega(f^+ + f^-)\mathrm{d}\mu=\|f\|_1\quad(f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)).$$

此即T是压缩型算子.故T满足定理5.2的全部条件.若$f,p\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, $p\geqslant 0$, $A_k\triangleq\{\omega\in\Omega:(T^kp)(\omega)>0\}$, $A\triangleq\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$,则由定理5.2得知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}T^kf}{\sum_{k=0}^{n}T^kp}$$

在A上[a.e.]存在且有穷.特别地,取$f=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}$, $p=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\mu}$,由于$\beta\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\beta,\mu\in\mathscr{L}$,所以,$f,p\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, $p\geqslant 0$(注意:$\alpha\ll\mu$, $\beta\ll\mu$, $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu},\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\mu}$存在),而且$\xi_f=\alpha$, $\xi_p=\beta$.因此

$$Tf = \frac{\mathrm{d}(U\xi_f)}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}(U\alpha)}{\mathrm{d}\mu}, \quad Tp = \frac{\mathrm{d}(U\beta)}{\mathrm{d}\mu}.$$

对 k 作归纳法可以证明对一切 $k \geqslant 1$,恒有

$$T^k f = \frac{\mathrm{d}(U^k\alpha)}{\mathrm{d}\mu}, \quad T^k p = \frac{\mathrm{d}(U^k\beta)}{\mathrm{d}\mu}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{n} U^k\alpha\right)}{\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{n} U^k\beta\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\mathrm{d}(U^k\alpha)/\mathrm{d}\mu}{\sum_{k=0}^{n}\mathrm{d}(U^k\beta)/\mathrm{d}\mu} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f}{\sum_{k=0}^{n} T^k p} \tag{5.17}$$

在 A 上[a. e.]存在且有穷.(注意在 $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{T^k p > 0\} = \{\sum_{k=0}^{\infty} T^k p > 0\}$ 上(5.17)中的3个表示式均有意义.)取 $\Omega^* = \Omega - A$,则

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(\Omega^* \cap A_k) = \mu(\Omega^* \cap \{U^k p > 0\}) \\ &= \mu\left(\Omega^* \cap \left\{\frac{\mathrm{d}(U^k\beta)}{\mathrm{d}\mu} > 0\right\}\right) \quad (k \geqslant 0). \end{aligned} \tag{5.18}$$

因此,由(5.18)得

$$\begin{aligned} (U^k\beta)(\Omega^*) &= \int_{\Omega^*} \frac{\mathrm{d}(U^k\beta)}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\Omega^* \cap \{\frac{\mathrm{d}(U^k\beta)}{\mathrm{d}\mu} > 0\}} \frac{\mathrm{d}(U^k\beta)}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu = 0 \quad (k \geqslant 0). \end{aligned}$$

定理5.3证毕.

定理5.4(马尔可夫过程的遍历性定理) 设 $(E, \mathscr{E}, \mu)$ 是任一测度空间,$P(t, x, A)$ $(t = 0, 1, 2, \cdots,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$ 是离散的、时齐的转移函数,即

(i) 对任何 t, x, $P(t, x, \cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的概率测度;

(ii) 对任何 t, A, $P(t, \cdot, A) \in \mathscr{E}$;

(iii) 对任何 s, t, x, A,有

$$P(s+t,x,A)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A),$$

特别地,对任何 $n\geqslant 1$,有

$$P(n,x_0,A)=\int_E P(1,x_0,\mathrm{d}x_1)\cdots\int_E P(1,x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\mathbf{1}_A(x_n).$$

令

$$(Tf)(x)=\int_E P(1,x,\mathrm{d}y)f(y),\ f\in L^1(E,\mathscr{E},\mu),\ x\in E,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}T^kf}{n+1}$$

在 E 上[a.e.]存在且有穷.特别地,对任何 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}P(k,x,A)\tag{5.19}$$

存在且有穷.

证 显然 T 是由 $L^1(E,\mathscr{E},\mu)$ 到 $L^1(E,\mathscr{E},\mu)$ 的正的压缩型线性算子,且由 K-C 方程式有

$$(T^kf)(x)=\int_E P(k,x,\mathrm{d}y)f(y)\quad(\forall f\in L^1(E,\mathscr{E},\mu)).$$

取 $p(x)\equiv 1$,则 $T^kp\equiv 1$ $(\forall k\geqslant 0)$,所以由定理 5.2 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}T^kf}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}T^kf}{\sum_{k=0}^{n}T^kp}$$

在 E 上[a.e.]存在且有穷.

特别地,任取 $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$,取 $\mu(B)=\mathbf{1}_B(x)$ $(\forall B\in\mathscr{E})$,则 $\mathbf{1}_B\in L^1(E,\mathscr{E},\mu)$ $(\forall B\in\mathscr{E})$,此处 μ 满足

$$\mu(\{x\})=1,\ \mu(E-\{x\})=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}P(k,\cdot,A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}T^k\mathbf{1}_A}{n+1}\tag{5.20}$$

在 E 上[a.e.]存在且有穷(关于概率测度 μ). 而 $\mu(\{x\})=1$, $\mu(E-\{x\})=0$,所以(5.20)在 x 处存在且有穷,即(5.19)成立. 定理证毕.

定理 5.5(平稳过程的遍历定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是任一测度空间,φ 是保测变换,$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,则

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k)=g,\ [\text{a.e.}],\tag{5.21}$$

$$\int_\Omega|g|\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega|f|\mathrm{d}\mu<\infty;\tag{5.22}$$

(2) $$g(\varphi)=g.\tag{5.23}$$

(注意:本定理加强了定理 1.3,因为那里要求 μ 是 σ 有限测度.)

证 对任意 $h\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,定义

$$Th=h(\varphi),$$

则 T 是由 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 到 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 的正的压缩型(实际上是保范的)线性算子且 $T^kh=h(\varphi^k)$. 取 $p\equiv1$,则由定理 5.2 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}T^kf}{\sum_{k=0}^{n-1}T^kp}$$

在 $\Omega=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}T^kp>0\right\}$ 上[a.e.]存在且有穷,记此极限为 g,即得(5.21)成立.

仿定理 1.3 可以推出(5.22)和(5.23). 定理证毕.

第十一章　随机微分方程式

§1　ITÔ积分及其性质

下面我们将用三节的篇幅，简单地介绍随机微分方程式的基本概念.本节将要引进 ITÔ 积分及其性质，它是研究随机微分方程式的一个基本工具.

在研究平稳过程时，我们曾建立过两种随机积分，其一是正交随机测度 Z 对函数族 $\overline{L}^2(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,F)$ 中的函数 g 的积分

$$(\mathrm{o})\int_{\mathbf{R}} g\mathrm{d}Z$$

(参见第十章定义 2.6)，其二是第十章定义 4.1 中所引进的 R-L^2 积分

$$(\mathrm{R}\text{-}\mathrm{L}^2)\int_{\mathbf{R}} f(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

这两种积分都是在被积函数与测度中只有一个含有随机参变量 ω，下面我们将要引进的 ITÔ 积分，无论"测度"和被积函数都含随机参变量 ω.

在本节中恒设 $\{B(t):0\leqslant t<l\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个 S.B^1.M.O.，$\mathscr{H}_b^a$ 是满足下述三条件的函数的全体：

$$f:[a,b]\times\Omega\mapsto\mathbf{R},$$

(h_1)　$f\in\mathscr{B}[a,b]\times\mathscr{F}$，其中

$$\mathscr{B}[a,b]=\{A:A=B\cap[a,b],\ B\in\mathscr{B}^1\};$$

(h_2) 对每个 $t \in [a,b]$, $f(t) \equiv f(t,\cdot) \in \mathscr{F}(t) \equiv \sigma(B(s), a \leqslant s \leqslant t)$;

(h_3) 对每个 $t \in [a,b]$, $f(t,\cdot) \in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$,而且

$$\int_a^b \boldsymbol{E}(|f(t)|^2)\mathrm{d}t < \infty,$$

此处 $0 \leqslant a \leqslant b < l$.

恒设 S_b^a 为 $\mathscr{H}_b^a$ 中的全体阶梯函数,即

$$S_b^a = \left\{f: f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),\ f \in \mathscr{H}_b^a,\right.$$
$$\left. a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,\ f_i \in \mathscr{F}_{t_i},\ i = 1,\cdots,n\right\}.$$

定义 1.1(ITÔ 积分) 设 $\{B(t): 0 \leqslant t < l\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 S.B[1].M.O., $0 \leqslant a < b < l$, $f \in S_b^a$,

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t).$$

定义 f 对 $\{B(t): 0 \leqslant t < l\}$ 的 **ITÔ 积分**为

$$(\mathrm{i})\int_a^b f(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)(B(t_{i-1},\omega) - B(t_i,\omega)). \tag{1.1}$$

对任何 $f \in \mathscr{H}_b^a$,取 $f^{(k)} \in S_b^a$,使

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)} = f, [L^2] \quad (关于测度\ m \times p)$$

(其中 m 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度),定义 f 对 $\{B(t): 0 \leqslant t < l\}$ 的 **ITÔ 积分**为

$$(\mathrm{i})\int_a^b f(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega)$$
$$= \lim_{k\to\infty}(\mathrm{i})\int_a^b f^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega), [L^2] \quad (关于测度\ P). \tag{1.2}$$

显然, $\mathscr{H}_b^a$ 是 Hilbert 空间 $L^2([a,b] \times \Omega, \mathscr{B}[a,b] \times \mathscr{F},$

$m \times P$) 上的闭线性子空间,从而 $\mathscr{H}_b^a$ 亦为 Hilbert 空间. 它们中的内积定义为

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_b^a \int_\Omega f(t,\omega) g(t,\omega) P(\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \boldsymbol{E}(f(t)g(t))\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{1.3}$$

$f, g \in L^2([a,b]\times\Omega, \mathscr{B}[a,b]\times\mathscr{F}, m\times P)$. 范数记为 $\|\cdot\|_H$.

为了证明定义 1.1 的合理性,必须证明下列各点:

(1)　S_b^a 在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_b^a$ 中稠,即任取 $f \in \mathscr{H}_b^a$,确有 $f^{(k)} \in S_b^a$ ($k \geqslant 1$),使

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)} = f, [L^2] \quad (\text{关于测度 } m\times P).$$

(2)　若 $f^{(k)} \in S_b^a (k \geqslant 1)$, $f \in \mathscr{H}_b^a$,

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)} = f, [L^2] \quad (\text{关于测度 } m\times P),$$

则必有

$$\lim_{j,k\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{i})\int_a^b f^{(j)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega) - (\mathrm{i})\int_a^b f^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega)\right|^2\right) = 0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{i})\int_a^b f^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega)$$

在 $[L^2]$ 意义下(关于测度 P) 的极限存在.

(3)　若有 $f^{(k)} \in S_b^a$, $g^{(k)} \in S_b^a$ ($k \geqslant 1$), $f \in \mathscr{H}_a^b$,

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)} = \lim_{k\to\infty} g^{(k)} = f, [L^2] \quad (\text{关于测度 } m\times P),$$

则必有

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{i})\int_a^b f^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega) = \lim_{k\to\infty} (\mathrm{i})\int_a^b g^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega),$$

$[L^2]$ (关于测度 P). (这可仿第十章定理 2.6 (ⅲ) 的证明.)

为此,我们先证明几个引理.

引理 1.1 设 $f,g\in S_b^a$,则

(1) $\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\right)=0$;

$$\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\cdot(\mathrm{i})\int_a^b g(t)\mathrm{d}B(t)\right)=\int_a^b \boldsymbol{E}(f(t)g(t))\mathrm{d}t.$$

证 (1) 由积分的定义及 $f(t_i)\in\mathscr{F}(t_i)$ 和 $\{B(t)\}$ 具有独立增量及 $\boldsymbol{E}(B(t))\equiv 0$,得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\right)\\
&=\boldsymbol{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i)(B(t_{i+1})-B(t_i))\right)\\
&=\boldsymbol{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i)\boldsymbol{E}(B(t_{i+1})-B(t_i))\,|\,\mathscr{F}(t_i))\right)\\
&=\boldsymbol{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i)\boldsymbol{E}(B(t_{i+1})-B(t_i))\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

不失普遍性可令

$$f(t,\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

$$g(t,\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}g(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

由 $f(t_i)g(t_j)\in\mathscr{F}(t_i\vee t_j)$ 得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\cdot(\mathrm{i})\int_a^b g(t)\mathrm{d}B(t)\right)\\
&=\boldsymbol{E}\Big(\sum_{i,j=0}^{n-1}f(t_i)g(t_j)(B(t_{i+1})-B(t_i))\\
&\qquad(B(t_{j+1})-B(t_j))\Big)\\
&=\boldsymbol{E}\Big(\sum_{i,j=0}^{n-1}\boldsymbol{E}(f(t_i)g(t_j)(B(t_{i+1})-B(t_i))
\end{aligned}$$

$$(B(t_{j+1})-B(t_j))\Big|\mathscr{F}(t_i\vee t_j))\Big). \tag{1.4}$$

若 $i<j$,则 $t_i\vee t_j=t_j$,此时 $f(t_i),g(t_j),B(t_{i+1})-B(t_i)$ 皆$\mathscr{F}(t_j)$可测,所以再用$\{B(t)\}$具有独立增量得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(f(t_i)g(t_j)(B(t_{i+1})-B(t_i))(B(t_{j+1})-B(t_j))|\mathscr{F}(t_j))\\
&\quad=f(t_i)g(t_j)(B(t_{i+1})-B(t_i))\boldsymbol{E}(B(t_{j+1})-B(t_j))\\
&\quad=0;
\end{aligned} \tag{1.5}$$

若 $i=j$,有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(f(t_i)g(t_i)(B(t_{i+1})-B(t_i))(B(t_{j+1})\\
&\qquad-B(t_j))|\mathscr{F}(t_i\vee t_j))\\
&\quad=f(t_i)g(t_i)\boldsymbol{E}((B(t_{i+1})-B(t_i))^2|\mathscr{F}(t_i))\\
&\quad=f(t_i)g(t_i)\boldsymbol{E}((B(t_{i+1})-B(t_i))^2)\\
&\quad=f(t_i)g(t_i)(t_{i+1}-t_i)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

(因为 $B(t_{i+1})-B(t_i)$ 服从正态分布 $N(0,t_{i+1}-t_i)$);

若 $i>j$,由 i,j 地位的对称性,仿(1.5)式亦有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(f(t_i)g(t_j)(B(t_{i+1})-B(t_i))(B(t_{j+1})\\
&\qquad-B(t_j))|\mathscr{F}(t_i\vee t_j))=0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

将(1.5),(1.6),(1.7)代入(1.4)式得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\cdot(\mathrm{i})\int_a^b g(t)\mathrm{d}B(t)\right)\\
&\quad=\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{E}(f(t_i)g(t_i)(t_{i+1}-t_i))\\
&\quad=\int_a^b\boldsymbol{E}(f(t)g(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

引理1.2　设 $g\in L^p(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,m)$, m 是直线上的Lebesgue测度,$1\leqslant p<\infty$.令 $g_s(t)=g(t-s)$, $s,t\in\mathbf{R}$,则变换 $s\mapsto g_s$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $L^p(\mathbf{R},\mathscr{B}^1,m)$ 的有界的、一致连续的变换,即

$$\|g_s\|_p\equiv\left(\int_{\mathbf{R}}|g_s(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant K\quad(s\in\mathbf{R}),$$

$$\lim_{|s-t|\to 0} \| g_s - g_t \|_p = 0.$$

证 由于 Lebesgue 测度保持平移不变性,故取 $K = \| g \|_p$,有

$$\| g_s \|_p \equiv \| g \|_p \quad (\text{对一切 } s \in \mathbf{R}).$$

下面证明一致连续性. 任给 $\varepsilon > 0$. 总可取 $\mathbf{R}$ 上的实值连续函数 h,使 $\| g - h \|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ 且 h 在 $[-A, A]$ 的外部为 0. 当然此 h 在 $\mathbf{R}$ 上为一致连续的. 所以存在一个 $\delta \in (0, A)$,使

$$|h(s) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{3(3A)^{\frac{1}{p}}} \quad (\text{当 } |s-t| > \delta \text{ 时}).$$

因此,若令 $h_s(u) = h(u-s)$,则当 $|t-s| < \delta$ 时,有

$$\begin{aligned}\| h_s - h_t \|_p^p &= \int_{\mathbf{R}} |h(u-s) - h(u-t)|^p \mathrm{d}u \\ &\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p \frac{1}{3A}(2A + \delta) < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.\end{aligned}$$

所以当 $|t-s| > \delta$ 时,有

$$\begin{aligned}\| g_s - g_t \|_p &\leqslant \| g_s - h_s \|_p + \| h_s - h_t \|_p \\ &\quad + \| h_t - g_t \|_p \\ &= 2\| g - h \|_p + \| h_s - h_t \|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 1.3 S_b^a 在 $\mathscr{H}_b^a$ 中稠(按范数 $\| \cdot \|_H$).

证 令 $\bar{S}_b^a$ 为 S_b^a 在 $\mathscr{H}_b^a$ 中的闭包,

$$C\mathscr{H}_b^a = \{f: f \in \mathscr{H}_b^a, t \to f(t, \cdot) \text{ 是}[a,b] \text{ 到 } L^2(\Omega, \mathscr{F}, P) \text{ 的 } L^2 \text{ 连续的}\},$$

即 $C\mathscr{H}_b^a$ 是 $\mathscr{H}_b^a$ 中满足下列条件的函数的全体:对任何 $t_0 \in [a,b]$,

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in [a,b]}} E(|f(t) - f(t_0)|^2) = 0. \tag{1.8}$$

令 $B\mathscr{H}_b^a = \{f: f \in \mathscr{H}_b^a, \sup\limits_{\substack{t \in [a,b] \\ \omega \in \Omega}} |f(t,\omega)| < \infty\}$.

首先证明 $\bar{S}_b^a \supset C\mathscr{H}_b^a$. 事实上,任取 $f \in C\mathscr{H}_b^a$,任取分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 定义

$$g^{(n)}(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

$$g^{(n)} \in S_b^a,\ g^{(n)}(t,\omega) = f(t_i,\omega),\ t \in [t_i,t_{i+1}).$$

由(1.8)式易证(因为$[a,b]$是有限闭区间)$t \mapsto f(t,\cdot)$ 在$[a,b]$上是一致 L^2 连续的,即

$$\lim_{\substack{|s-t|\to 0\\ s,t\in[a,b]}} \boldsymbol{E}(|f(s)-f(t)|^2) = 0. \tag{1.8$'$}$$

所以任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使

$$\boldsymbol{E}(|f(s)-f(t)|) < \varepsilon/(b-a) \quad (\text{当 } |s-t| < \delta).$$

因此,当 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{t_{i+1}-t_i\} < \delta$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|g^{(n)}(t)-f(t)|^2)\\
&= \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1}(f(t_i)-f(t))\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)\right|^2\right)\\
&\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\boldsymbol{E}\left(\left|(f(t_i)-f(t))\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)\right|^2\right)\\
&\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\sup_{t\in[t_i,t_{i+1})}\boldsymbol{E}(|f(t_i)-f(t)|^2)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (t\in[a,b)).
\end{aligned}$$

因此 $\int_a^b \boldsymbol{E}(|g^{(n)}(t)-f(t)|^2)\mathrm{d}t < \varepsilon$. 故

$$C\mathscr{H}_b^a \subset \bar{S}_b^a.$$

其次证明 $\bar{S}_b^a \supset B\mathscr{H}_b^a$. 任取 $f \in B\mathscr{H}_b^a$. 定义

$$f^{(n)}(t,\omega) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f\left(t-\frac{x}{n},\omega\right)\mathrm{d}x,$$

此处定义 $f(t,\omega) = 0$,当 $t \in [a,b]$. 由 $\mathscr{H}_b^a$ 的定义,直接验证可知 $f^{(n)} \in \mathscr{H}_b^a$. 此外,由 $f^{(n)}$ 的定义、Jensen 不等式$\left(\text{注意}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1\right)$,得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|f^{(n)}(t+s)-f^{(n)}(t)|^2)\\
&\quad=\boldsymbol{E}\left(\left|\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\left[f\left(t+s-\frac{x}{n}\right)-f\left(t-\frac{x}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|^2\right)\\
&\quad\leqslant\boldsymbol{E}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\left|f\left(t+s-\frac{x}{n}\right)-f\left(t-\frac{x}{n}\right)\right|^2\mathrm{d}x\right)\\
&\quad\leqslant n\boldsymbol{E}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}|f(t+s-y)-f(t-y)|^2\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}\tag{1.9}$$

令 $g(y)=f(-y)$, $g_t(y)=g(y-t)=f(t-y)$. 若注意 $f\in B\mathscr{H}_b^a$, $f(t,\omega)=0$, $t\overline{\in}[a,b]$, $\omega\in\Omega$,则 g,g_t 满足引理1.2中全部条件(此时 $p=2$),从而任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\omega)>0$,当 $|s|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}|f(t+s-y,\omega)-f(t-y,\omega)|^2\mathrm{d}y\\
&\qquad\leqslant\int_0^{\infty}|g_{t+s}(y,\omega)-g_t(y,\omega)|^2\mathrm{d}y\\
&\qquad\leqslant\|g_{t+s}(\cdot,\omega)-g_t(\cdot,\omega)\|_2^2<\varepsilon,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{s\to0}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}|f(t+s-y,\omega)-f(t-y,\omega)|^2\mathrm{d}y=0.\tag{1.10}$$

但是由 $f\in B\mathscr{H}_b^a$, $f(t,\omega)=0$, $t\overline{\in}[a,b]$, $\omega\in\Omega$,得

$$\sup_{\substack{\omega\in\Omega\\ t\in R}}|f(t,\omega)|\leqslant K<\infty,\tag{1.11}$$

由(1.9),(1.10),(1.11)式并应用控制收敛定理可得

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{E}(|f^{(n)}(t+s)-f^{(n)}(t)|^2)=0\quad(t\in[a,b)).\tag{1.12}$$

因此得知 $f^{(n)}\in\bar{S}_b^a$.

下面再证 $f^{(n)}\to f$ (依$\mathscr{H}_b^a$ 中的范数),从而 $f\in\bar{S}_b^a$. 事实上依 $f^{(n)}$ 的定义及 Jensen 不等式,有

$$\boldsymbol{E}\left(\int_a^b|f(t)-f^{(n)}(t)|^2\mathrm{d}t\right)$$

$$= \boldsymbol{E}\left(\int_a^b \left| f(t) - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f\left(t - \frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant \boldsymbol{E}\left(\int_a^b \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \left| f(t) - f\left(t - \frac{x}{n}\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)$$

$$= \boldsymbol{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\left(\int_a^b \left| f(t) - f\left(t - \frac{x}{n}\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right). \quad (1.13)$$

用引理 1.2 及控制收敛定理可证

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\int_a^b | f(t) - f^{(n)}(t)|^2 \mathrm{d}t\right) = 0. \quad (1.14)$$

最后我们证明:$\bar{S}_b^a \supset \mathscr{H}_b^a$.任取 $f \in \mathscr{H}_b^a$.定义

$$f^{(n)} = \begin{cases} f, & 当\ |f| \leqslant n, \\ 0. & 当\ |f| > n, \end{cases}$$

则 $f^{(n)} \in \bar{S}_b^a$.但是

$$\boldsymbol{E}\left(\int_a^b | f^{(n)}(t) - f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)$$

$$= \int_a^b \int_{\{\omega:\, |f(t,\omega)| > n\}} | f(t,\omega)|^2 P(\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}t, \quad (1.15)$$

而由 $f \in \mathscr{H}_b^a$ 得$\int_\Omega | f(t,\omega)|^2 P(\mathrm{d}\omega) < \infty$,用控制收敛定理,在(1.15)式中令 $n \to \infty$,即得

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\int_a^b | f^{(n)}(t) - f(t)|^2 \mathrm{d}t\right) = 0,$$

所以 $f \in \bar{S}_a^b$.引理证毕.

引理 1.4　若 $f^{(k)} \in S_b^a\ (k \geqslant 1)$, $f \in \mathscr{H}_b^a$, $\lim\limits_{k\to\infty} f^{(k)} = f$, $[L^2]$ (关于测度 $m \times P$),则

$$\lim_{j,k\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\left| (\mathrm{i})\int_a^b f^{(j)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega) - (\mathrm{i})\int_a^b f^{(k)}(t,\omega)\mathrm{d}B(t,\omega)\right|^2\right) = 0.$$

由引理 1.1 即得此引理.

由引理 1.3,1.4 得知定义 1.1 的合理性.

定理 1.1 令

$$\Phi(f) = (\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t) \quad (f \in \mathscr{H}_b^a), \tag{1.16}$$

则 Φ 是由 Hilbert 空间$\mathscr{H}_b^a$ 到 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的线性连续算子,而且

$$\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)\right) = 0 \quad (f \in \mathscr{H}_b^a); \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{E}\left((\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)) \cdot (\mathrm{i})\int_a^b g(t)\mathrm{d}B(t)\right)$$

$$= \int_a^b \boldsymbol{E}(f(t)g(t))\mathrm{d}t \quad (f,g \in \mathscr{H}_b^a). \tag{1.18}$$

证 由 ITÔ 积分的定义、引理 1.1 和 Hilbert 空间中内积的连续性即得此定理.

下面考虑变动上限的 ITÔ 积分. 固定 $f \in \mathscr{H}_b^a$,令

$$X(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f(s)\mathrm{d}B(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.19}$$

定理 1.2 $X = \{X(t),\mathscr{F}(t),t \in [a,b]\}$ 是一个均方连续的鞅,其中 $\mathscr{F}(t) = \sigma(B(s),a \leqslant s \leqslant t)$.

证 显然 $\boldsymbol{E}(|X(t)|) < \infty$. 下证 X 满足鞅性质,即 $X(t) \in \mathscr{F}(t)$ 且

$$\boldsymbol{E}(X(t) - X(s) \mid \mathscr{F}(s)) = 0 \quad (a \leqslant s \leqslant t < b). \tag{1.20}$$

首先假定 $f \in S_b^a$. 由 $\mathscr{F}(t)$ 和 $X(t)$ 的定义即得$X(t) \in \mathscr{F}(t)$. 任取 $a \leqslant s < t \leqslant b$,由 $f \in S_b^a$,总有 $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$,

$$X(t) - X(s) = (\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i)), \tag{1.21}$$

由 $f(t) \in \mathscr{F}(t)$ 和$\{B(t)\}$ 具有独立增量及 $\boldsymbol{E}(B(t)) \equiv 0$,得

$$\boldsymbol{E}(f(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i))|\mathscr{F}(t_i))$$

$$= f(t_i)\boldsymbol{E}(B(t_{i+1}) - B(t_i)|\mathscr{F}(t_i))$$

$$= f(t_i)\boldsymbol{E}(B(t_{i+1}) - B(t_i)) = 0. \tag{1.22}$$

所以

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(f(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i)) \mid \mathscr{F}(s))\\&\quad = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}(f(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i)) \mid \mathscr{F}(t_i)) \mid \mathscr{F}(s)]\\&\quad = 0.\end{aligned} \tag{1.23}$$

由(1.21),(1.22),(1.23)式即得(1.20)式.

其次,对任意的 $f \in \mathscr{H}_b^a$,由引理 1.3 得知存在 $f^{(n)} \in S_b^a$,使

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)} = f, [L^2] \quad (关于测度\ m \times P). \tag{1.24}$$

定义

$$X^{(n)}(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f^{(n)}(s)\mathrm{d}B(s), \tag{1.25}$$

则 $X^{(n)} = \{X^{(n)}(t), \mathscr{F}(t), t \in [a,b]\}$ 是鞅.

对任何 $a \leqslant s < t \leqslant b$,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(X(t) - X(s) \mid \mathscr{F}(s))\\&\quad = \boldsymbol{E}(X(t) - X^{(n)}(t) \mid \mathscr{F}(s))\\&\qquad + \boldsymbol{E}(X^{(n)}(t) - X^{(n)}(s) \mid \mathscr{F}(s))\\&\qquad + \boldsymbol{E}(X^{(n)}(s) - X(s) \mid \mathscr{F}(s)).\end{aligned} \tag{1.26}$$

由 $X^{(n)}$ 是鞅知(1.26)式右端第二项为0.下证(1.26)式右端第一项对任何 $t \in [a,b]$ 当 $n \to \infty$ 时,它$[L^2]$收敛于0 (关于测度 P)(第三项类似).事实上,由 Jensen 不等式和定理 1.1 得知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{E}(X(t) - X^{(n)}(t) \mid \mathscr{F}(s))|^2)\\&\quad \leqslant \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}(|X(t) - X^{(n)}(t)|^2 \mid \mathscr{F}(s)))\\&\quad = \boldsymbol{E}(|X(t) - X^{(n)}(t)|^2)\\&\quad = \int_a^t \boldsymbol{E}(|f(u) - f^{(n)}(u)|^2)\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{1.27}$$

由 $f^{(n)}$ 的取法知 $n \to \infty$ 时,(1.27)式右端趋于0,所以(1.26)式右端第一项当 $n \to \infty$ 时,它$[L^2]$收敛于0(关于 P 测度),而且

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t) = X(t), [L^2] \quad (关于测度\ P).$$

所以由 $X^{(n)}(t) \in \mathscr{F}(t)$ 得知 $X(t) \in \mathscr{F}(t)$.故 X 是鞅.

最后证明对任何 $f \in \mathscr{H}_b^a$, X 是均方连续的.事实上,由定理 1.1 及

$$E(|X(t)-X(s)|^2)=E\left(\left|(\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right|^2\right)$$
$$=\int_s^t E(|f(u)|^2)\mathrm{d}u,$$

再用 $f \in \mathscr{H}_b^a$ 所应满足的第三个条件知上式右端当 $s \to t$ 时它趋于 0.故 X 是均方连续的.

定义 1.2 设 $X=\{X(t):t\in \mathbf{T}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个广义实值随机过程 $\mathbf{T}\subset \mathbf{R}$.

称广义实值随机过程 $Y=\{Y(t):t\in \mathbf{T}\}$ 是广义实值随机过程 $X=\{X(t):t\in \mathbf{T}\}$ 的**可分的标准修正**,如果 Y 是可分的,且

$$P(Y(t)=X(t))=1,\quad t\in \mathbf{T}.$$

众所周知,对任何广义实值随机过程,恒存在可分的标准修正.

显然均方连续蕴含了随机连续.由第四章定理 1.1 知:对随机连续的可分的 $\{X(t):t\in \mathbf{T}\}$ 而言,$\mathbf{T}$ 中任一可数稠子集皆为可分集.

引理 1.5 设 $X=\{X(t):t\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的适应于 $\{\mathscr{F}(t):t\geqslant 0\}$ 的实值的随机连续的随机过程,则它必存在一个可分的标准修正 $Y=\{Y(t):t\geqslant 0\}$,而且 Y 是适应于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 的循序可测的.

证 令 M 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的全体[a.e.]有穷的广义实值随机变量,对于任意的 $\xi,\eta\in M$,定义

$$d(\xi,\eta)=E\{\min(|\xi-\eta|,1)\},$$

则(把[a.e.]相等的随机变量不加区别,因而 $\xi-\eta$ 有意义) d 是 M 中的一个度量,而且在 M 中按度量 d 收敛等价于随机变量列的概率收敛.

由于 $\{X(t):t\geqslant 0\}$ 是随机连续的,所以变换

$$t \mapsto X(t)$$

是由$[0,\infty)$到M的连续算子(M中的拓扑就是度量d所决定的拓扑).所以,对任何正整数n,此算子在$[0,n]$上一致连续.因此存在$\delta_n > 0$,使

$$d(X(t),X(t')) \leqslant 2^{-n} \quad (t,t' \in [0,n],\ |t-t'| \leqslant \delta_n).$$

不失普遍性可设$n \uparrow \infty$时,δ_n单调下降于0.分割$[0,n]$,使得

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{a_n}^{(n)} = n,$$

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant a_n - 1} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| \leqslant \delta_n.$$

而且$\Lambda_{n+1} = \{t_j^{(n+1)}: 0 \leqslant j \leqslant a_{n+1}\}$是$\Lambda_n = \{t_j^{(n)}: 0 \leqslant j \leqslant a_n\}$的加细,即$\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$.定义

$$X^{(n)}(t) = \begin{cases} X(t_{j-1}^{(n)}), & \text{当 } t_{j-1}^{(n)} \leqslant t < t_j^{(n)},\ j = 1,2,\cdots,a_n, \\ X(n), & \text{当 } t \geqslant n. \end{cases}$$

下面分几步来证明此引理.

(Ⅰ)　$d(X^{(n)}(t),X^{(n+1)}(t)) \leqslant 2^{-n}$ (当$t < n$).

事实上,若$t < n$,则对某个j和k有

$$t_{j-1}^{(n)} \leqslant t < t_j^{(n)}, \quad t_{k-1}^{(n+1)} \leqslant t < t_k^{(n+1)}.$$

故必有$|t_{j-1}^{(n)} - t_{k-1}^{(n+1)}| \leqslant \delta_n$,(Ⅰ)得证.

(Ⅱ)　对每个$t \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)}(t)$, [a.e.]收敛.

事实上,由Chebyshev不等式及(Ⅰ),当$n > t$时,有

$$\begin{aligned} &P(|X^{(n)}(t) - X^{(n+1)}(t)| \geqslant n^{-2}) \\ &\quad = P((|X^{(n)}(t) - X^{(n+1)}(t)| \wedge 1) \geqslant n^{-2}) \\ &\quad \leqslant n^2 d(X^{(n)}(t),X^{(n+1)}(t)) \\ &\quad \leqslant n^2 2^{-n}. \end{aligned}$$

再用Borel-Cantelli引理,得

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{ |X^{(n)}(t) - X^{(n+1)}(t)| < \frac{1}{n^2} \right\}\right) \\ &\quad = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{ |X^{(n)}(t) - X^{(n+1)}(t)| \geqslant n^{-2} \}\right) = 1. \end{aligned}$$

即(Ⅱ)成立.

(Ⅲ) 当 $n > t$ 时,从$[0,t]\times\Omega$ 到 $\mathbf{R}$ 的变换:

$$(s,\omega)\mapsto X^{(n)}(s,\omega)$$

是 $\mathscr{B}[0,t]\times\mathscr{F}(t)$ 可测的.

事实上,由 $X^{(n)}$ 的定义可表示 $X^{(n)}(s,\omega)$ 如下:

$$X^{(n)}(s,\omega)=\sum_{j=1}^{a_n}X(t_{j-1}^{(n)},\omega)\mathbf{1}_{[t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)})\times\Omega}(s,\omega)+X(n,\omega)\mathbf{1}_{[n,\infty)\times\Omega}(s,\omega).$$

由于 $n>t$, $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{a_n}^{(n)}=n$,所以必存在 $k\leqslant a_n$,使

$$t_{k-1}^{(n)}\leqslant t<t_k^{(n)}.$$

因此,若限制 $s\in[0,t]$,则有

$$X^{(n)}(s,\omega)=\sum_{j=1}^{k-1}X(t_{j-1}^{(n)},\omega)\mathbf{1}_{[t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)})\times\Omega}(s,\omega)+X(t_{k-1}^{(n)},\omega)\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{(n)},t]\times\Omega}(s,\omega)\quad(s\in[0,t],\ \omega\in\Omega).$$

而上式右端每一个

$$X(t_{j-1}^{(n)},\cdot)\in\mathscr{F}(t_{j-1}^{(n)})\subset\mathscr{F}(t_{k-1}^{(n)})\subset\mathscr{F}(t)\quad(1\leqslant j\leqslant k),$$

每一个

$$\mathbf{1}_{[t_{j-1}^{(n)},t_j^{(n)})\times\Omega}(\cdot,\cdot)\in\mathscr{F}[0,t]\times\mathscr{F}(t)\quad(1\leqslant j\leqslant k-1),$$

$$\mathbf{1}_{[t_{k-1}^{(n)},t]\times\Omega}(\cdot,\cdot)\in\mathscr{F}[0,t]\times\mathscr{F}(t).$$

所以(Ⅲ)成立.

(Ⅳ) 定义 $Y(t,\omega)=\limsup\limits_{n\to\infty}X^{(n)}(t,\omega)$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$. 推证 $Y=\{Y(t):t\geqslant 0\}$ 是 X 的标准修正.

事实上,任取 $t\geqslant 0$,由 $\{t_j^{(n)}\}$ 的取法,当 $n>t$ 时,必有 j_n,使

$$t_{j_n-1}^{(n)}\leqslant t<t_{j_n}^{(n)}\quad(1\leqslant j_n\leqslant n).\tag{1.28}$$

而 $0\leqslant t_{j_n}^{(n)}-t_{j_n-1}^{(n)}\leqslant\delta_n\to 0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}(t - t_{j_n-1}^{(n)}) = 0.$$

因此由引理假设和 $X^{(n)}$ 的定义得知

$$X^{(n)}(t) = X(t_{j_n-1}^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} X(t), [\mathrm{P.}] \tag{1.29}$$

再由(Ⅱ)知:

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t) = Y(t), [\mathrm{a.e.}]. \tag{1.30}$$

故得 $P(X(t) = Y(t)) = 1$.

(注意:尽管 $Y(t)$ 可以取 $\pm\infty$,但 $X(t)$ 是实值的,所以 $P(Y(t)\in\mathbf{R}) = 1$.)

(Ⅴ)　$Y = \{Y(t):t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 是循序可测的.

由(Ⅳ),$\{X^{(n)}(t)\}$ 关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 是循序可测的,而 $\{Y(t)\}$ 是它的上极限,故 $\{Y(t)\}$ 亦然.

(Ⅵ)　$Y = \{Y(t):t\geqslant 0\}$ 是可分的.

令 $\mathbf{T}_0 = \{t_j^{(n)}:j = 1,2,\cdots,a_n,\ n = 1,2,\cdots\}$.对于任意固定的 $t\geqslant 0$,当 $n > t$ 时,如(1.29)式中所证,有

$$X^{(n)}(t,\omega) = X(t_{j_n-1}^{(n)},\omega), \tag{1.31}$$

其中 t 满足(1.28)式.而今 $Y(t,\omega) = \limsup_{n\to\infty} X^{(n)}(t,\omega)$,所以存在 $n_k = n_k(\omega)$,使 $n_k\to\infty$ 且

$$Y(t,\omega) = \lim_{k\to\infty} X^{(n_k)}(t,\omega) \xlongequal{(1.31)} \lim_{k\to\infty} X(t_{j_{n_k}-1}^{(n_k)},\omega). \tag{1.32}$$

当 $s\in\mathbf{T}_0$, $n > s$ 时,由 $X^{(n)}(t)$ 的定义有 $X^{(n)}(s) = X(s)$,再注意 $Y(t)$ 的定义知 $Y(s) = X(s)$.所以

$$Y(t_{j_{n_k}-1}^{(n_k)},\omega) = X(t_{j_{n_k}-1}^{(n_k)},\omega) \tag{1.33}$$

(注意:$t_{j_{n_k}-1}^{(n_k)}\in\mathbf{T}_0$, $t_{j_{n_k}-1}^{(n_k)} < t_{a_{n_k}}^{(n_k)} = n_k$).但是 $\lim_{k\to\infty} t_{j_{n_k}-1}^{n_k} = t$,所以由(1.32)式得知 $\{Y(t):t\geqslant 0\}$ 是可分的(注意,此处例外集为空集).引理证毕.

附注 由定理1.2和引理1.5对变动上限的ITÔ积分所定义的随机过程 $\left\{X(t)=(\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u):a\leqslant t\leqslant b\right\}$，可设它是可分的，关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 循序可测的.

定理 1.3 设 $X(t)$ 如(1.19)式所定义，$\mathscr{F}(t)$ 如定理1.2所定义. 不妨设 $X=\{X(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 是可分的，则其几乎所有的轨道在 $[a,b]$ 上连续.

证 先设 $f\in S_b^a$，$X(t)=(\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u)$. 令 $f(t,\omega)=\sum_{i=0}^{n-1}f_i(\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$. 取 $k=k(t)$，使 $t_k\leqslant t<t_{k+1}$，则

$$
\begin{aligned}
X(t,\omega)=&\sum_{i=0}^{k-1}f(t_i,\omega)[B(t_{i+1},\omega)-B(t_i,\omega)]\\
&+f(t_k,\omega)[B(t,\omega)-B(t_k,\omega)].
\end{aligned}
$$

由 $\{B(t)\}$ 的轨道的连续性得知 $\{X(t)\}$ 的轨道的连续性.

对任何 $f\in\mathscr{H}_b^a$，由引理1.3得知有 $f^{(n)}\in S_b^a$，使

$$\|f-f^{(n)}\|_H\leqslant n^{-4}\quad(n\geqslant 1).$$

于是知

$$X^{(n)}=\left\{X^{(n)}(t)=(\mathrm{i})\int_a^t f^{(n)}(u)\mathrm{d}B(u):a\leqslant t\leqslant b\right\}$$

的轨道是连续的，从而 $X^{(n)}$ 更是可分的，所以

$$\{|X(t)-X^{(n)}(t)|^2:a\leqslant t\leqslant b\}$$

是可分的. 令 $\mathbf{T}_0$ 是其可分集. 而由定理1.2知 $\{X(t),\mathscr{F}(t),t\in[a,b]\}$，$\{X^{(n)}(t),\mathscr{F}(t),t\in[a,b]\}$ 都是均方连续鞅，$\varphi(x)=|x|^2$ 是凸函数，所以

$$\{|X(t)-X^{(n)}(t)|^2,\mathscr{F}(t),a\leqslant t\leqslant b\}$$

是非负下鞅. 因此，由第九章定理1.2及本章定理1.1得

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t)-X^{(n)}(t)|^2>\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= P\left(\sup_{t\in T_0}|X(t)-X^{(n)}(t)|^2>\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\leqslant n^2\sup_{t\in T_0}\boldsymbol{E}(|X(t)-X^{(n)}(t)|^2)$$
$$\leqslant n^2\boldsymbol{E}(|X(b)-X^{(n)}(b)|^2)$$
$$= n^2\boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{i})\int_a^b(f(u)-f^{(n)}(u))\mathrm{d}B(u)\right|^2\right)$$
$$= n^2\int_a^b\boldsymbol{E}(|f(u)-f^{(n)}(u)|^2)\mathrm{d}u$$
$$= n^2\|f-f^{(n)}\|_H\leqslant\frac{1}{n^2}. \tag{1.34}$$

再用 Borel-Cantelli 引理得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t)-X^{(n)}(t)|^2\leqslant\frac{1}{n^2}\right\}\right)=1.$$

此即存在 $\Omega_0, P(\Omega_0)=1$,当 $\omega\in\Omega_0$ 时有

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t,\omega)-X^{(n)}(t,\omega)|<\frac{1}{n}\quad(\text{当 } n\geqslant k_n(\omega)).$$

亦即任取 $\omega\in\Omega_0$,

$$\lim_{n\to\infty}X^{(n)}(t,\omega)=X(t,\omega)$$

在 $t\in[a,b]$ 上一致成立,而 $X^{(n)}(\cdot,\omega)$ 是$[a,b]$上的连续函数,故 $X(\cdot,\omega)$ 亦然.定理证毕.

前面我们定义了 $\mathscr{H}_b^a$ 中的函数 f 对 S.B^1.M.O. $\{B(t)\}$ 的 ITÔ 积分.令 $\mathscr{I}_b^a$ 表示满足(h_1)、(h_2) 和

$$(h_3)' \quad P\left(\int_a^b|f(t,\omega)|^2\mathrm{d}t<\infty\right)=1$$

的函数 $f(\cdot,\cdot)$ 的全体所成之集,我们将把 ITÔ 积分从 $\mathscr{H}_b^a$ 拓广到 $\mathscr{I}_b^a$ 中的函数.

显然$(h_3)'$弱于(h_3),从而 $\mathscr{I}_b^a\supset\mathscr{H}_b^a$.令 $\Phi(f)$ 如(1.16)式所定义$(f\in\mathscr{H}_b^a)$,M 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的[a.e.]为有穷的广义实值随机变量的全体,M 中[a.e.]相等之随机变量不加区别.在

$\mathscr{I}_b^a$, M 中分别引进度量 d_1, d_2 如下：

$$d_1(f,g) = F\left(\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad f,g \in \mathscr{I}_b^a,$$

$$F(\xi) = \boldsymbol{E}\left(\frac{|\xi|}{1+|\xi|}\right), \quad \xi \in M;$$

$$d_2(\xi,\eta) = F(\xi-\eta), \quad \xi,\eta \in M.$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} d_1(f_n,f) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2 \mathrm{d}t = 0, \ [\mathrm{P.}];$$

$$\lim_{n\to\infty} d_2(\xi_n,\xi) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \ [\mathrm{P.}].$$

引理 1.6 Φ 是由度量空间 $(\mathscr{H}_b^a, d_1)$ 到度量空间 (M, d_2) 的一致连续的变换，而且 $(\mathscr{H}_b^a, d_1)$ 在 $(\mathscr{I}_b^a, d_1)$ 中稠.

证 我们分几步来证明.

（Ⅰ） 对任何 $f \in \mathscr{H}_b^a$，实数 $\varepsilon > 0$，$\tau \geqslant 0$，有

$$P(|\Phi(f)| > \tau) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} + \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} F\left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

事实上，

$$\begin{aligned} &P(|\Phi(f)| > \tau) \\ &\quad = P\left(|\Phi(f)| > \tau;\ \int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t > \varepsilon^2\right) \\ &\qquad + P\left(|\Phi(f)| > \tau;\ \int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2\right) \\ &\quad \overset{\text{设}}{=\!=} \mathrm{I} + \mathrm{II}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\leqslant P\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t > \varepsilon^2\right) \\ &\leqslant P\left(\frac{\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\text{因}\frac{x}{1+x}\text{ 在}[0,\infty)\text{ 上严格上升}\right)$$

$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\boldsymbol{E}\left[\frac{\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}F\left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

若令 $f_s(t,\omega) = f(t,\omega)$ 当 $\int_a^b |f(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$ 时,否则令 $f_s(t,\omega) = 0$,则 $f_s \in \mathscr{H}_b^a$,故 f_s 对 $\{B(t)\}$ 的 ITÔ 积分有定义,且由引理 1.1 及 Chebychev 不等式,有

$$\text{Ⅱ} \leqslant P\left(\left|(\mathrm{i})\int_a^b f_s(t)\mathrm{d}B(t)\right| > \tau\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{i})\int_a^b f_s(t)\mathrm{d}B(t)\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{E}\left(\int_a^b f_s(t)^2 \mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{E}\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t;\ \left\{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2\right\}\right)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{\tau^2},$$

(Ⅰ)得证.

(Ⅱ) $F(\Phi(f)) \leqslant 4\left\{F\left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$, $f \in \mathscr{H}_b^a$. 事实上,对任何 $\xi \in M$,若令 $\eta = \frac{|\xi|}{1+|\xi|}$,则 $\{|\xi| \leqslant \tau\} \subset \{|\eta| \leqslant \tau\}$,且 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$,所以

$$F(\xi) = \boldsymbol{E}(\eta) = \boldsymbol{E}(\eta \mathbf{1}_{\{|\xi| \leqslant \tau\}}) + \boldsymbol{E}(\eta \mathbf{1}_{\{|\xi| > \tau\}})$$

$$\leqslant \tau + P(|\xi| > \tau).$$

取 $\tau = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\xi = \Phi(f)$, $C = F\left(\left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right)$并利用(Ⅰ)可得

$$F(\Phi(f)) \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} P(|\Phi(f)| > \tau)$$
$$\leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} C.$$

若 $C = 0$,由 $\varepsilon > 0$ 可任意小,故(Ⅱ)所要求的不等式成立;若 $C > 0$,取 $\varepsilon = C^{\frac{2}{3}}$,并注意 $C \leqslant 1$,可得

$$F(\Phi(f)) \leqslant C^{\frac{1}{3}} + C^{\frac{2}{3}} + C^{\frac{1}{3}} + C$$
$$= C^{\frac{1}{3}}(1 + C^{\frac{1}{3}} + 1 + C^{\frac{1}{3}}) \leqslant 4C^{\frac{1}{3}}.$$

(Ⅱ)得证.

(Ⅲ) Φ 是由$(\mathscr{H}_b^a, d_1)$到(M, d_2)的一致连续变换. 因为由(Ⅱ)有

$$d_2(\Phi(f), \Phi(g)) = F(\Phi(f) - \Phi(g))$$
$$= F(\Phi(f-g))$$
$$\leqslant 4\left\{F\left(\left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$= 4\{d_1(f,g)\}^{\frac{1}{3}} \quad (f, g \in \mathscr{H}_b^a).$$

故(Ⅲ)成立.

(Ⅳ) $(\mathscr{H}_b^a, d_1)$在$(\mathscr{I}_b^a, d_1)$中稠. 任取 $f \in \mathscr{I}_b^a$,定义

$$f_n(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega), & \text{当} |f(t,\omega)| \leqslant n, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases}$$

则 $f_n \in \mathscr{H}_b^a$,且当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b |f(t)|^2 \mathbf{1}_{\mathbf{R}-[-n,n]}(f(t)) \mathrm{d}t \to 0, \text{ [a.e.]}$$

(因为$\int_b^a |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$, [a.e.],用控制收敛定理可知上式成

立). 且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(t)-f_n(t)|^2\mathrm{d}t = 0, \text{[P.]}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} d_k(f,f_n)=0$,引理证毕.

利用此引理,我们可以把ITÔ积分从 $\mathscr{H}_b^a$ 拓广到 $\mathscr{I}_b^a$ 中的函数.

定义 1.3　任取 $f\in\mathscr{I}_b^a$,总存在 $f_n\in\mathscr{H}_b^a$,使 $d_1(f,f_n)\to 0$ $(n\to\infty)$, 从而 $\lim\limits_{m,n\to\infty} d_1(f_n,f_m)=0$,因此

$$\lim_{m,n\to\infty} d_2(\Phi(f_n),\Phi(f_m))=0,$$

故必存在 $\xi\in M$,使

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(f_n)=\xi, \text{[P.]}.$$

定义 f 对 $\{B(t)\}$ 的 **ITÔ 积分**为

$$(\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t)=\xi=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{i})\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}B(t), \text{[P.]}.$$

显然,ξ 不依赖 $\{f_n\}$ 的选取(证明仿第十章定义 2.6 (ⅲ)).

定理 1.4　对任何 $f\in\mathscr{I}_b^a$,定义

$$\Phi(f)=(\mathrm{i})\int_a^b f(t)\mathrm{d}B(t),$$

则 Φ 是由距离空间$(\mathscr{I}_b^a,d_1)$到距离空间(M,d_2)的一致连续的线性算子,而且

$$\boldsymbol{E}(|\Phi(f)|^k)<\infty \quad (k\geqslant 0,\ f\in\mathscr{I}_b^a).$$

证　因为现在对任何 $f\in\mathscr{I}_b^a$, $\Phi(f)$ 已有定义,引理 1.6 中的(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)三步对 $f\in\mathscr{I}_b^a$ 亦成立(因为其中的证明并不要求限制 $f\in\mathscr{H}_b^a$,只要求 $\Phi(f)\in M$ 有定义即可). 所以 Φ 是由$(\mathscr{I}_b^a,d_1)$到(M,d_2)的一致连续算子. 而 Φ 的线性性质是显然的,且

$$\boldsymbol{E}(|\Phi(f)|^k)\leqslant n^k+\int_{\{|\Phi(f)|>n\}}|\Phi(f)|^k\mathrm{d}P$$

$$\leqslant n^k + \sum_{N=n}^{\infty}\int_{N+1\geqslant|\Phi(f)|>N}|\Phi(f)|^k \mathrm{d}P$$

$$\leqslant n^k + \sum_{N=n}^{\infty}(N+1)^k[P(|\Phi(f)|>N) - P(|\Phi(f)|>N+1)],$$

在引理 1.6 (Ⅰ) 中取 $\tau = N,\ \varepsilon = N^{-k}$,得

$$P(|\Phi(f)|>N)\leqslant N^{-2(1+k)} + (1+N^k)C,$$

其中 $C = F\left(\left[\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\right)$.所以

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|\Phi(f)|^k)\\
&\leqslant n^k + \sum_{N=n}^{\infty}(N+1)^k[N^{-2(1+k)} + (1+N^k)C\\
&\qquad - (N+1)^{-2(1+k)} - (1+(N+1)^k)C]\\
&\leqslant n^k + \sum_{N=n}^{\infty}(N+1)^k[N^{-2(1+k)} - (N+1)^{-2(1+k)}]\\
&= n^k + \sum_{N=n}^{\infty}\frac{(N+1)^{2(1+k)} - N^{2(1+k)}}{N^{2(1+k)}(N+1)^{2+k}} < \infty.
\end{aligned}$$

定理证毕.

下面我们研究变动上限的 ITÔ 积分

$$(\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u) \quad (f\in \mathscr{I}_b^a).$$

由于对固定的 t, $(\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u)$ 本来就只[a.e.]确定,故不失普遍性可恒设$\left\{X(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right\}$可分.

定理 1.5 (1) 设 $f\in\mathscr{I}_b^a$,则$\left\{X(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u):\ a\leqslant t\leqslant b\right\}$随机连续,从而由引理 1.5,它总有适应于$\{\mathscr{F}(t)\}$的循序可测的可分的标准修正.

(2)　设 $f \in \mathscr{I}_b^a$, $f_n \in \mathscr{I}_b^a$,且 $\left\{X(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u):\right.$ $\left.a \leqslant t \leqslant b\right\}$, $\left\{X^{(n)}(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f_n(u)\mathrm{d}B(u): a \leqslant t \leqslant b\right\}$ 皆为可分的,又 $d_1(f_n, f) \to 0$,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 \mathrm{d}t = 0,\ [\mathrm{P.}],$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |X^{(n)} - X(t)| = 0,\ [\mathrm{P.}].$$

(3)　设 $f \in \mathscr{I}_b^a$, $f_n(t) = f(t)\mathbf{1}_{[-n,n]}\left(\int_a^t |f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)$, $X(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u)$, $X^{(n)}(t) = (\mathrm{i})\int_a^t f_n(u)\mathrm{d}B(u)$, $a \leqslant t \leqslant b$. 若 $\{f(t)\}$ 和 $\{X(t)\}$ 皆为可分,则 $\{X(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ 的几乎所有的轨道皆连续.

证　(1)　由于

$$\{X(t)\}\ \text{随机连续} \iff \lim_{t\to s}\boldsymbol{E}\left(\frac{\left|(\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right|}{1 + \left|(\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right|}\right) = 0,$$

又因为引理 1.6 (Ⅲ) 对 $f \in \mathscr{I}_b^a$ 亦成立,所以

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left(\frac{\left|(\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right|}{1 + \left|(\mathrm{i})\int_s^t f(u)\mathrm{d}B(u)\right|}\right) \\
&= \boldsymbol{E}\left(\frac{\left|(\mathrm{i})\int_a^b (\mathbf{1}_{[a,t]}(u)f(u) - \mathbf{1}_{[a,s]}(u)f(u))\mathrm{d}B(u)\right|}{1 + \left|(\mathrm{i})\int_a^b (\mathbf{1}_{[a,t]}(u)f(u) - \mathbf{1}_{[a,s]}(u)f(u))\mathrm{d}B(u)\right|}\right) \\
&= F(\Phi(\mathbf{1}_{[a,t]}(u)f(u)) - \Phi(\mathbf{1}_{[a,s]}(u)f(u))) \\
&\leqslant 4\left\{F\left(\left[\int_a^b |\mathbf{1}_{[a,t]}(u)f(u) - \mathbf{1}_{[a,s]}(u)f(u)|^2 \mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$= 4\left\{F\left(\left(\int_s^t |f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

而 $f \in \mathscr{I}_b^a$，故由$(\mathrm{h}_3)'$及控制收敛定理，得

$$\lim_{t\to s}\int_s^t |f(u)|^2 \mathrm{d}u = 0,\ [\mathrm{a.e.}].$$

再用 $F(\xi) = \boldsymbol{E}\left(\dfrac{|\xi|}{1+|\xi|}\right)$的定义及控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to s} F\left(\left(\int_s^t |f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

(1) 得证.

(2) 由可分性及$\dfrac{x}{1+x}$在$[0,\infty)$上单调上升和引理1.6(Ⅲ)对 $g \in \mathscr{I}_b^a$ 亦成立，可推出

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\left\{\frac{\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|X^{(n)}(t) - X(t)|}{1+\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|X^{(n)}(t) - X(t)|}\right\}\\
&\quad = \sup_{a\leqslant t\leqslant b}\boldsymbol{E}\left(\frac{|X^{(n)}(t) - X(t)|}{1+|X^{(n)}(t) - X(t)|}\right)\\
&\quad = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} F(X^{(n)}(t) - X(t))\\
&\quad \leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant b} 4\left\{F\left(\left(\int_a^t |f_n(u) - f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}\\
&\quad \leqslant 4\left\{F\left(\left(\int_a^b |f_n(u) - f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

由 F 的定义知

$$\text{“}\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(u) - f(u)|^2 \mathrm{d}u = 0,\ [\mathrm{P.}]$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} F\left(\left(\int_a^b |f_n(u) - f(u)|^2 \mathrm{d}u\right)\right) = 0\text{”}.$$

由定理假设可得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}\left\{\frac{\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|X^{(n)}(t) - X(t)|}{1+\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|X^{(n)}(t) - X(t)|}\right\} = 0.$$

这等价于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X^{(n)}(t)-X(t)|=0,\ [\mathrm{P.}].$$

(2) 得证.

(3)　令

$$\psi(t,\omega)=\begin{cases}0, & \text{若}\sup\limits_{a\leqslant u\leqslant t}|f(u,\omega)|=0,\\ 1, & \text{若}\sup\limits_{a\leqslant u\leqslant t}|f(u,\omega)|>0,\end{cases}$$

则

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(\mathrm{i})\int_a^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right|\leqslant\psi(b)\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(\mathrm{i})\int_s^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right|,$$

从而

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(\mathrm{i})\int_a^t f(s)\mathrm{d}B(s)\right|>0\right)\leqslant P(\psi(b)>0)$$
$$=P(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|>0).$$

所以取 $\{X^{(n)}(t)\}$ 可分,则

$$P(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t)-X^{(n)}(t)|>0)$$
$$=P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|(\mathrm{i})\int_a^t f(s)\mathbf{1}_{\{|s|>n\}}\left(\int_a^s|f(u)|^2\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}B(s)\right|>0\right)$$
$$\leqslant P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|f(t)\mathbf{1}_{\{|s|>n\}}\left(\int_a^t|f(u)|^2\mathrm{d}u\right)\right|>0\right)$$
$$\leqslant P\left(\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t>n\right).$$

由 $\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$, [a.e.],得知

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t>n\right)=0,$$

从而存在 $n_k\uparrow\infty$,使

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\int_a^b|f(t)|^2\mathrm{d}t>n_k\right)<\infty,$$

因此,由 Borel-Cantelli 引理得知

$$P\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t)-X^{(n_k)}(t)|>0\}\Big)=0,$$

即

$$P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X(t)-X^{(n_k)}(t)|=0\}\Big)=1,$$

所以,存在 Ω_0, $P(\Omega_0)=1$,对任何 $\omega\in\Omega_0$,存在 $K_0=K(\omega)$(不依赖 t),使 $k\geqslant K_0$ 时,有

$$X(t,\omega)=X^{(n_k)}(t,\omega),\ t\in[a,b],$$

而由定理1.3,$\{X^{(n_k)}(t)\}$ 的几乎所有的轨道皆连续,故$\{X(t)\}$亦然.定理证毕.

§2 随机微分方程式的解的存在性、唯一性及其性质

本节沿用 §1 的符号.在这一节中,我们将运用 §1 建立的 ITÔ 积分作为工具,来研究一类特殊的随机微分方程式的解的存在性、唯一性及其他性质.这类方程式是

$$X'(t)=m(X(t),t)+\sigma(X(t),t)B'(t),\tag{2.1}$$

等价形式是

$$\mathrm{d}X(t)=m(X(t),t)\mathrm{d}t+\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t),\tag{2.2}$$

其中$\{B(t):0\leqslant t<l\}$是S.B^1.M.O.; $m(x,t)$,$\sigma(x,t)$是满足某些条件的二元实值函数.

我们先简单地解释它的物理背景.

若令 $X(t)$ 表示时刻 t 液体中的某质点的位置.若该液体不受外力的作用,则 $X(t)$ 就是自然布朗运动.为简单起见,只考虑一维的情形(想像液体在一根很细的长管中),这时 $X(t)=\sigma B(t)$,其中 $X(t)$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2t)$, σ^2 称为方差系数,$\{B(t)\}$是S.B^1.M.O..如果问题稍为复杂一点,假定液体还受外力的作

用,设在时刻 t 处于 x 附近的一小段液体 V 受力而获得的速度为 $m(x,t)$,时刻 t 处于 x 的质点在 V 内作自然布朗运动,其方差系数为 $\sigma^2(x,t)$.这样质点的运动由两部分组成.在从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的时间内,质点的位移应为

$$\mathrm{d}X(t)=m(X(t),t)\mathrm{d}t+\sigma(X(t),t)\mathrm{d}B(t).$$

这就是(2.2)式.

下面我们给出(2.2)式的精确数学模型.设$\{B(t):0\leqslant t<l\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 S.B[1].M.O., $0\leqslant a<b<l$, $m(x,t),\sigma(x,t)$ 是由 $\mathbf{R}\times[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的 Borel 可测函数,而且均满足 Lipschitz 条件,即存在正数 K,使

$$\begin{gathered}|m(x,t)-m(y,t)|\leqslant K|x-y|,\\ |\sigma(x,t)-\sigma(y,t)|\leqslant K|x-y|,\\ (x,y\in\mathbf{R},\ t\in[a,b]),\end{gathered}\tag{2.3}$$

此外,还满足

$$|m(x,t)|\leqslant K(1+x^2)^{\frac{1}{2}},\quad |\sigma(x,t)|\leqslant K(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\quad (x\in\mathbf{R},\ t\in[a,b]).\tag{2.4}$$

设$\mathscr{F}(t)=\sigma(B(s),a\leqslant s\leqslant t)$, $t\in[a,b]$, $\xi\in\mathscr{F}(a)$, $\boldsymbol{E}(|\xi|^2)<\infty$. 把(2.2)式写成等价的随机积分方程式:

$$X(t)-X(a)=\int_a^t m(X(s),s)\mathrm{d}s+(\mathrm{i})\int_a^t\sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s).\tag{2.5}$$

(注意:(2.5)式右端第一项中的积分是固定任一 $\omega\in\Omega$,对 s 的普通 Lebesgue 积分.)

定理 2.1　存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可分的关于$\{\mathscr{F}(t)\}$循序可测的均方连续的实值随机过程 $X=\{X(t):t\in[a,b]\}$,满足:

(ⅰ)　对每个 $t\in[a,b]$, $X(t)\in\mathscr{F}(t)$;

(ⅱ)　$\int_a^b\boldsymbol{E}(|X(t)|^2)\mathrm{d}t<\infty$;

(iii) $\{X(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ 满足(2.5)式及初始条件 $X(a) = \xi$;

(iv) $\{X(t)\}$ 的几乎所有的轨道在$[a,b]$上连续;

(v) 满足(2.5)式及初始条件 $X(a) = \xi$ 的解在下述意义下是唯一的,即若 $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}(t): t \in [a,b]\}$ 亦满足(2.5)式及初始条件 $\widetilde{X}(a) = \xi$,而且$\{\widetilde{X}(t)\}$ 是可分的,则

$$P(X(t) = \widetilde{X}(t) \text{ 对一切 } t \in [a,b]) = 1.$$

(vi) $\{X(t), \mathscr{F}(t), t \in [a,b]\}$ 是马尔科夫过程.

证　我们将用一般微分方程式中常用的逐次逼近法来构造(2.5)式的解.

令 $X^{(0)}(t) \equiv \xi$,

$$X^{(n+1)}(t) = \xi + \int_a^t m(X^{(n)}(s), s)\mathrm{d}s + (\mathrm{i})\int_a^t \sigma(X^{(n)}(s), s)\mathrm{d}B(s). \tag{2.6}$$

对 n 用归纳法来证明$\{X^{(n)}(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ $(n \geqslant 0)$ 具有下述诸性质.

(a) $X^{(n)} = \{X^{(n)}(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ 是有定义的,而且是均方连续的,可取它为可分的关于$\{\mathscr{F}(t)\}$ 循序可测,其几乎所有的轨道在$[a,b]$上是连续的;

(b) 对几乎所有的 ω, $s \mapsto m(X^{(n)}(s,\omega), s)$ 是有界 Borel 可测函数;

(c) 对每个 $t \in [a,b]$,算子

$(s,\omega) \mapsto m(X^{(n)}(s,\omega), s)$ 和$(s,\omega) \mapsto \sigma(X^{(n)}(s,\omega), s)$

$(a \leqslant s \leqslant t, \omega \in \Omega)$ 皆为 $\mathscr{B}[a,t] \times \mathscr{F}(t)$ 可测的;

(d) 对每个 $s \in [a,b]$, $X^{(n)}(s) \in \mathscr{F}(s)$,从而

$$\sigma(X^{(n)}(s), s) \in \mathscr{F}(s);$$

(e) $\int_a^b \boldsymbol{E}(|\sigma(X^{(n)}(s), s)|^2)\mathrm{d}s < \infty$.

显然 $X^{(0)}(t) \equiv \xi$ 恒满足(a)～(e).设 $X^{(n)} = \{X^{(n)}(t): a \leqslant t$

$\leqslant b\}$ 满足(a) ~ (e),推证 $X^{(n+1)}$ 亦满足这5条性质(对 $X^{(n+1)}$ 而言,它满足的对应性质的标号用上加一撇来表示,例如(e)′ 即是

$$\int_a^b \boldsymbol{E}(|\sigma(X^{(n+1)}(s),s)|^2)\mathrm{d}s < \infty).$$

(a)′　由(b), $\int_a^b m(X^{(n)}(s),s)\mathrm{d}s$ 对几乎所有的 ω 有定义. 由(c),(d)(e) 及 $\mathscr{H}_b^a$ 和 ITÔ 积分的定义,对每个 $\omega \in \Omega$,

$$(\mathrm{i})\int_a^t \sigma(X^{(n)}(s),s)\mathrm{d}B(s)$$

都是有定义的,因此适当定义一个零概率集上 $X^{(n+1)}(t,\omega)$ 的值, $X^{(n)}(t)$ 就全有定义了.

下面证明 $X^{(n+1)} = \{X^{(n+1)}(t): t \in [a,b]\}$ 的均方连续性. 事实上,对任何 $s < t$,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|X^{(n+1)}(t) - X^{(n+1)}(s)|^2) \\
&\quad = \boldsymbol{E}\left(\left|\int_s^t m(X^{(n)}(u),u)\mathrm{d}u \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_s^t \sigma(X^{(n)}(u),u)\mathrm{d}B(u)\right|^2\right) \\
&\quad \leqslant 2\left\{\boldsymbol{E}\left(\left|\int_s^t m(X^{(n)}(u),u)\mathrm{d}u\right|^2\right)\right. \\
&\qquad \left. + \boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{i})\int_s^t \sigma(X^{(n)}(u),u)\mathrm{d}B(u)\right|^2\right)\right\} \\
&\quad \leqslant 2\left\{(t-s)\int_s^t \boldsymbol{E}(|m(X^{(n)}(u),u)|^2)\mathrm{d}u\right. \\
&\qquad \left. + \int_s^t \boldsymbol{E}(|\sigma(X^{(n)}(u),u)|^2)\mathrm{d}u\right\}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

(上述不等式由 Schwarz 不等式及定理 1.1 得到.) 再用 $m(x,t)$, $\sigma(x,t)$ 满足(2.4) 式得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(|X^{(n+1)}(t) - X^{(n+1)}(s)|^2) \\
&\quad \leqslant 2\Big((t-s)+1)K^2\int_s^t (1 + \boldsymbol{E}(|X^{(n)}(u)|^2)\Big)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

令 $t\to s$ 并注意 $\{X^{(n)}(t):t\in[a,b]\}$ 均方连续,从而由第十章命题 2.4 有 $\sup\limits_{u\in[a,b]}\boldsymbol{E}(|X^{(n)}(u)|^2)<\infty$,得

$$\lim_{t=s}\boldsymbol{E}(|X^{(n+1)}(t)-X^{(n+1)}(s)|^2)=0,$$

即 $\{X^{(n+1)}(t):t\in[a,b]\}$ 均方连续.

由 §1 附注及定理 1.3,(2.6) 式的右端总可取得它是可分的关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 是循序可测的,且其几乎所有的轨道在 $[a,b]$ 上连续. (a)′ 证毕.

(b)′ 由(a),对几乎所有的 ω, $X^{(n)}(\cdot,\omega)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而有界,再用 $m(x,t)$ 满足(2.4) 式得知(b)′ 成立.

(c)′ 由(a)′ 知 $\{X^{(n+1)}(t)\}$ 关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 是循序可测的, $m(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ 皆为二维 Borel 可测函数,得

$$\begin{aligned}&(s,\omega)\mapsto m(X^{(n+1)}(s,\omega),s),\\&(s,\omega)\mapsto\sigma(X^{(n+1)}(s,\omega),s)\end{aligned}\qquad(a\leqslant s\leqslant t,\ \omega\in\Omega)$$

皆为 $\mathscr{B}[a,t]\times\mathscr{F}(t)$ 可测.

(d)′ 由(c) 及 Fubini 定理知 $\int_a^t m(X^{(n)}(s),s)\mathrm{d}s$ 是 $\mathscr{F}(t)$ 可测的,由定理 1.2 知(i) $\int_a^b\sigma(X^{(n)}(s),s)\mathrm{d}B(s)$ 是 $\mathscr{F}(t)$ 可测的,(d)′ 获证.

(e)′ 由 (2.4) 式 及 $\{X^{(n+1)}(t)\}$ 均 方 连 续 (从 而 $\sup\limits_{t\in[a,b]}\boldsymbol{E}(|X^{(n+1)}(t)|^2)<\infty$) 得知

$$\begin{aligned}&\int_a^b\boldsymbol{E}(|\sigma(X^{(n+1)}(s),s)|^2)\mathrm{d}s\\&\leqslant K^2\int_a^b[1+\boldsymbol{E}(|X^{(n+1)}(t)|^2)]\mathrm{d}s<\infty.\end{aligned}\tag{2.8}$$

至此,归纳法完成.

下面我们证明:对每个 $t\in[a,b]$,存在 $X(t)\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$,使

$$\lim_{n\to\infty}X^{(n)}(t)=X(t),\ [L^2]\quad(\text{关于测度 }P).\tag{2.9}$$

定义

$$Y^{(0)}(t)\equiv\xi,\ Y^{(n)}(t)=X^{(n)}(t)-X^{(n-1)}(t)\ (n\geqslant 1), \tag{2.10}$$

则 $n\geqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}E(|Y^{(n+1)}(t)|^2)&=E(|X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t)|^2)\\&=E\left(\left|\int_a^t[m(X^{(n)}(s),s)-m(X^{(n-1)}(s),s)]ds\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\int_a^t[\sigma(X^{(n)}(s),s)-\sigma(X^{(n-1)}(s),s)]ds\right|^2\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

仿(a)′ 的证明,有

$$\begin{aligned}&E(|Y^{(n+1)}(t)|^2)\\&\leqslant 2\left\{(t-a)\int_a^t E[|m(X^{(n)}(s),s)-m(X^{(n-1)}(s),s)|^2]ds\right.\\&\quad\left.+\int_a^t E[|\sigma(X^{(n)}(s),s)-\sigma(X^{(n-1)}(s),s)|^2]ds\right\}\\&\overset{(2.3)}{\leqslant}2[(t-a)+1]K^2\int_a^t E[|X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)|^2]ds\\&\leqslant A\int_a^t E(|Y^{(n)}(s)|^2)ds\ (n\geqslant 1),\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $A=2[(t-a)+1]K^2$.

显然,由 $Y^{(1)}(t)$ 的定义有

$$\begin{aligned}E(|Y^{(1)}(t)|^2)&=E(|X^{(1)}(t)-\xi|^2)\\&=E\left(\left|\int_a^t m(X^{(0)}(s),s)ds+\int_a^t\sigma(X^{(0)}(s),s)ds\right|^2\right),\end{aligned}$$

仿(2.12)式可证

$$\begin{aligned}E(|Y^{(1)}(t)|^2)&\leqslant A\int_a^t E(|Y^{(0)}(s)|^2)ds\\&=A(t-a)E(|\xi^2|).\end{aligned} \tag{2.13}$$

由(2.12),(2.13)式并对 n 作归纳法可证

$$E(|Y^{(n)}(t)|^2) \leqslant A^n E(|\xi|^2)(t-a)^n/n! \quad (n \geqslant 0). \tag{2.14}$$

但是

$$X^{(n)}(t) = X^{(m)}(t) + \sum_{j=m+1}^{n} Y^{(j)}(t) \quad (n \geqslant m \geqslant 0),$$

所以,由 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} |X^{(n)}(t) - X^{(m)}(t)|^2 &= \Big|\sum_{j=m+1}^{n} Y^{(j)}(t)\Big|^2 \\ &\leqslant \sum_{j=m+1}^{n} 2^{-j} \sum_{j=m+1}^{n} 2^j |Y^{(j)}(t)|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

因此对任意 $t \in [a,b]$,有

$$\begin{aligned} &E(|X^{(n)}(t) - X^{(m)}(t)|) \\ &\leqslant \sum_{j=m+1}^{n} 2^j E(|Y^{(j)}(t)|^2) \\ &\leqslant \sum_{j=m+1}^{n} 2^j A^j E(|\xi|^2) \frac{(t-a)^j}{j!} \\ &\leqslant E(|\xi^2|) \sum_{j=m+1}^{n} \frac{[2A(b-a)]^j}{j!}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

从而

$$\lim_{n,m\to\infty} E(|X^{(n)}(t) - X^{(m)}(t)|) = 0.$$

所以由 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 空间的完备性,存在 $X(t) \in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$,使

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t) = X(t), [L^2] \quad (\text{关于测度 } P).$$

由(2.16)式还看出上述收敛性对 $t \in [a,b]$ 是一致的,而 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是均方连续的,故 $\{X(t)\}$ 亦然,由 $X^{(n)}(t) \in \mathscr{F}(t)$ 得 $X(t) \in \mathscr{F}(t)$. 所以由引理 1.5,不妨设 $\{X(t)\}$ 是可分的关于 $\{\mathscr{F}(t)\}$ 是循序可测的.

最后证明 $\{X(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ 满足(ⅰ)~(ⅵ).

(ⅰ) 上面已证明 $X(t) \in \mathscr{F}(t)$, $t \in [a,b]$;

(ⅱ) 由于 $\{X(t): t \in [a,b]\}$ 均方连续,所以由第十章命

题2.4有

$$\sup_{t\in[a,b]} \boldsymbol{E}(|X(t)|^2)\leqslant M<\infty,$$

故(ⅱ)成立;

(ⅲ)　因 $X^{(n)}(a)\equiv\xi\ (n\geqslant 0)$,所以 $X(a)=\xi$. 推证 $\{X(t):t\in[a,b]\}$ 满足(2.5)式.令

$$\begin{aligned}D(t)&=X(t)-\xi-\int_a^t m(X(s),s)\mathrm{d}s\\&\quad-(\mathrm{i})\int_a^t\sigma(X(s),s)\mathrm{d}B(s)\\&=X(t)-X^{(n+1)}(t)-\int_a^t[m(X(s),s)\\&\quad-m(X^{(n)}(s),s)]\mathrm{d}s\\&\quad-(\mathrm{i})\int_a^t[\sigma(X(s),s)-\sigma(X^{(n)}(s),s)]\mathrm{d}B(s).\end{aligned}$$

仿(2.7)式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|D(t)|^2)&\leqslant 4\Big\{\boldsymbol{E}(|X(t)-X^{(n+1)}(t)|^2)\\&\quad+\boldsymbol{E}\left(\left|\int_a^t[m(X(s),s)-m(X^{(n)}(s),s)]\mathrm{d}s\right|^2\right)\\&\quad+\boldsymbol{E}\left(\left|(\mathrm{i})\int_a^t[\sigma(X(s),s)-\sigma(X^{(n)}(s),s)]\mathrm{d}B(s)\right|^2\right)\Big\}\\&\leqslant 4\Big\{\boldsymbol{E}|X(t)-X^{(n+1)}(t)|^2)\\&\quad+(t-a)\int_a^t\boldsymbol{E}(|m(X(s),s)-m(X^{(n)}(s),s)|^2)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_a^t\boldsymbol{E}(|\sigma(X(s),s)-\sigma(X^{(n)}(s),s)|^2)\mathrm{d}s\Big\}\\&\overset{(2.3)}{\leqslant}4\Big\{\boldsymbol{E}(|X(t)-X^{(n+1)}(t)|^2)\\&\quad+(t-a)\int_a^t\boldsymbol{E}(K^2|X(s)-X^{(n)}(s)|^2)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+\int_a^t \boldsymbol{E}(K^2|X(s)-X^{(n)}(s)|^2)\mathrm{d}s\Big\}. \tag{2.17}$$

注意

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(|X(s)-X^{(n)}(s)|^2)\equiv 0,$$

对 $s\in[a,b]$ 一致成立，则在(2.17)式中令 $n\to\infty$，即得 $\boldsymbol{E}(|D(t)|^2)=0$，$t\in[a,b]$，从而对每个 $t\in[a,b]$，$D(t)=0$，[a.e.]. 但是，我们可以取得定义 $D(t)$ 的右端诸随机过程是可分的且具有公共的可分集（因为定义 $D(t)$ 右端的有关随机过程皆为随机连续的，所以只要它们可分，则其时间参数集中任一可数稠子集都可作它们的可分集）. 因此 $\{D(t)\}$ 是可分随机过程. 所以由 $D(t)=0$，[a.e.]，$t\in[a,b]$ 可得

$$P\Big(\bigcap_{t\in[a,b]}\{D(t)=0\}\Big)=1.$$

（ⅳ） 由 $\{X(t):t\in[a,b]\}$ 满足(2.5)式及定理 1.3 即知（ⅳ）成立.

（ⅴ） 若 $\{X(t)\}$，$\{\tilde{X}(t)\}$ 都满足(2.5)式，且可分，则

$$X(t)-\tilde{X}(t)=\int_a^t[m(X(s),s)-m(\tilde{X}(s),s)]\mathrm{d}s$$
$$+(\mathrm{i})\int_a^t\sigma(X(s),s)-\sigma(\tilde{X}(s),s)\mathrm{d}B(s).$$

令 $F(t)=\int_a^t\boldsymbol{E}(|X(s)-\tilde{X}(s)|^2)\mathrm{d}s$，仿(2.12)式可证

$$\boldsymbol{E}(|X(t)-\tilde{X}(t)|^2)$$
$$\leqslant A\int_a^t\boldsymbol{E}(|X(s)-\tilde{X}(s)|^2)\mathrm{d}s-AF(t),$$

即 $\mathrm{d}F(t)/\mathrm{d}t\leqslant AF(t)$ 或 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-At}F(t))/\mathrm{d}t\leqslant 0$. 把此不等式从 a 到 t 积分得

$$\mathrm{e}^{-At}F(t)-\mathrm{e}^{-Aa}F(a)\leqslant 0.$$

但是 $F(a)=0$，所以 $F(t)\leqslant 0$. 而由定义 $F(t)\geqslant 0$，故 $F(t)\equiv 0$. 因此对每一个 $t\in[a,b]$ 有 $\boldsymbol{E}(|X(t)-\tilde{X}(t)|)=0$. 再用 $\{X(t)\}$，$\{\tilde{X}(t)\}$ 的可分性得

$$P(X(t)=\tilde{X}(t),\ \text{对一切}\ t\in[a.b])=1.$$

(vi) 为证(vi),只需证明对任何 $s<t$,有

$$P(X(t)\in A,\Gamma)=\int_\Gamma P(X(t)\in A\mid X(s))\mathrm{d}P$$
$$(A\in\mathscr{B}^1,\ \Gamma\in\mathscr{F}(s)),\qquad(2.18)$$

为此,只需证(2.18)式对 $A\in\mathscr{B}^1,\Gamma\in\sigma(B(s_1),\cdots,B(s_n),B(s))$ 成立,其中 $a\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_n<s$.由(2.5)式有

$$X(t)=X(s)+\int_s^t m(X(u),u)\mathrm{d}u$$
$$+(\mathrm{i})\int_s^t\sigma(X(u),u)\mathrm{d}B(u).\qquad(2.19)$$

令

$$Z(s,t)=\int_s^t m(X(u),u)\mathrm{d}u+(\mathrm{i})\int_s^t\sigma(X(u),u)\mathrm{d}B(u),$$

则由定理 1.2 得知 $Z(s,t)\in\sigma(B(u),s\leqslant u\leqslant t)$.但由于 $\{B(t)\}$ 具有独立增量,所以 $\sigma(Z(s,t))$ 与 $\mathscr{F}(s)\equiv\sigma(B(u),a\leqslant u\leqslant s)$ 独立.令 $g(x,y)=x+y$,则 $X(t)=g(X_s,Z(s,t))$.所以为了证明(2.18)式对 $A\in\mathscr{B}^1$, $\Gamma\in\sigma(B(s_1),\cdots,B(s_n),B(s))$ 成立,又需证明

$$P((X(s),Z(s,t))\in\Pi,\Gamma)$$
$$=\int_\Gamma P((X(s),Z(s,t))\in\Pi\mid X(s))\mathrm{d}P$$
$$(\Pi\in\mathscr{B}^2,\ \Gamma\in\sigma(B(s_1),\cdots,B(s_n),B(s)))\qquad(2.20)$$

(因为 $\{X(t)\in A\}=g^{-1}(A)=\{(x,y):g(x,y)\in A\}\in\mathscr{B}^2$).定义两个 Π 系如下:

$$\mathscr{D}=\{\Pi:\Pi=A_1\times A_2,\ A_i\in\mathscr{B}^1\},$$

$$\mathscr{G}=\{\Gamma:\Gamma=\bigcap_{j=1}^n\{B(S_i)\in C_i\}\ \{B(s)\in C\},\ C_i,C\in\mathscr{B}^1\}.$$

任取定 $\Gamma\in\mathscr{G}$,任取 $\Pi=A_1\times A_2\in\mathscr{D}$,则

$$(2.20)\text{式左端}=P(X(s)\in A_1,Z(s,t)\in A_2,\Gamma).$$

用$\mathscr{F}(s)$与$\sigma(Z(s,t))$独立,$X(s)\in\mathscr{F}(s)$, $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}(s)$得知

$$\begin{aligned}(2.20)\text{式右端} &= \int_\Gamma P(X(s)\in A_1, Z(s,t)\in A_2 \mid X(s))\mathrm{d}P \\ &= \int_\Gamma \mathbf{1}_{\{X(s)\in A_1\}} P(Z(s,t)\in A_2 \mid X(s))\mathrm{d}P \\ &= \int_\Gamma \mathbf{1}_{\{X(s)\in A_1\}} P(Z(s,t)\in A_2)\mathrm{d}P \\ &= P(Z(s,t)\in A_2)P(X(s)\in A_1, \Gamma) \\ &= P(X(s)\in A_1, Z(s,t)\in A_2, \Gamma) \\ &\quad (\text{因}\{X(s)\in A_1\}\cap\Gamma\in\mathscr{F}(s)).\end{aligned}$$

显然对固定的$\Gamma\in\mathscr{G}$,使(2.20)式成立的全体Π构成一个d系,所以用单调系定理得知对$d(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{B}^2$中的一切$\Pi$,(2.20)式成立,再一次应用单调系定理得知:对一切$\Pi\in\mathscr{B}^2$,一切$\Gamma\in\sigma(\mathscr{G})=\sigma(B(s_1),\cdots,B(s_n),B(s))$,(2.20)式成立.定理证毕.

§3 复合函数的微分公式

在这一节中,我们将要建立随机微分的复合函数公式,一般称之为ITÔ公式,它与普通微积分中的复合函数微分公式极为类似.

沿用§1和§2中的符号,设$\{B(t):0\leqslant t<l\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的S.B^1.M.O., $0\leqslant a<b<l$, $\mathscr{F}(t)=\sigma(B(s), a\leqslant s\leqslant t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\{a(t):a\leqslant t\leqslant b\}$,$\{\beta(t):a\leqslant t\leqslant b\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可分的实值随机过程,且满足§1中的条件$(\mathrm{h}_1)$和$(\mathrm{h}_2)$及

$$\int_a^b |\alpha(t,\omega)|\mathrm{d}t<\infty,\ \int_a^b |\beta(t,\omega)|^2\mathrm{d}t<\infty\quad(\omega\in\Omega).\tag{3.1}$$

且

$$\int_s^t \alpha(u,\omega)\mathrm{d}u,\ (\mathrm{i})\int_s^t \beta(u,\omega)\mathrm{d}B(u,\omega)\quad (a\leqslant s\leqslant t\leqslant b)$$

皆有定义,$\beta(t)\in \mathscr{I}_b^a$.

定义 3.1　称$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程 $X=\{X(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 有**随机微分** $\mathrm{d}X(t)$,而且

$$\mathrm{d}X(t)=\alpha(t)\mathrm{d}t+\beta(t)\mathrm{d}B(t),\tag{3.2}$$

如果 $X(t)$ 满足(h_1),(h_2) 且对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 在$[a,b]$上连续,而且

$$X(t,\omega)-X(s,\omega)=\int_s^t \alpha(u,\omega)\mathrm{d}u+(\mathrm{i})\int_s^t \beta(u,\omega)\mathrm{d}B(u,\omega)\quad (a\leqslant s\leqslant t\leqslant b).\tag{3.3}$$

定理3.1　设$g(t,x)$是定义在$[a,b]\times\mathbf{R}$上的实值函数.令$g'_t=\dfrac{\partial g}{\partial t}$, $g'_x=\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $g''_{x,x}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $Y(t)=g(t,X(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, $X=\{X(t):a\leqslant t\leqslant b\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程且有随机微分(3.2)式.若 $g,g'_t,g'_x,g''_{x,x}$ 皆连续,则 $Y=\{Y(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 有随机微分 $\mathrm{d}Y(t)$,且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t)=\Big[&\alpha(t)g'_x(t,X(t)))+g'_t(t,X(t))\\&+\frac{1}{2}\beta^2(t)g''_{x,x}(t,X(t))\Big]\mathrm{d}t\\&+\beta(t)g'_x(t,X(t))\mathrm{d}B(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

引理3.1　如果 $X=\{X(t):a\leqslant t\leqslant b\}$ 有随机微分(3.2)式,则对一切 $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$,有

$$\begin{aligned}&[X(t)-X(s)]^2\\&=\int_s^t [2(X(u)-X(s))\alpha(u)+\beta^2(u)]\mathrm{d}u\\&\quad+(\mathrm{i})\int_s^t 2[X(u)-X(s)]\beta(u)\mathrm{d}B(u).\end{aligned}\tag{3.5}$$

注意:由于 $X(t),\beta(t)$ 皆满足$(h_1),(h_2)$,故 $X(t)\beta(t)$ 亦然,又由于$\{X(t)\}$ 的几乎所有的轨道皆连续从而在$[a,b]$上有界;$\int_a^b \beta^2(t,\omega)\mathrm{d}t < \infty$(对几乎所有的 ω),所以$\int_a^b X^2(t,\omega)\beta^2(t,\omega)\mathrm{d}t < \infty$(对几乎所有的 ω).因此 $X(t)\beta(t)\in \mathscr{I}_b^a$,从而(3.5)式右端第二项的 ITÔ 积分有定义.而(3.5)式右端第一项之积分对任意固定的 $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$,对几乎所有的 ω 皆为有穷数,又因为我们把[a.e.]相等的随机变量不加区别,所以(3.5)式是有意义的.

证 (i) 先设 $\beta(t)\in S_b^a$.记

$$\beta(u,\omega)=\sum_{i=0}^{m-1}\beta(t_i,\omega)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(u),\quad u\in[s,t],$$

Δ_0 是分割:$s=t_0<t_1<\cdots t_m=t$,

Δ_n 是分割:$s=t_{n,0}<t_{n,1}<\cdots<t_{n,k_n}=t\ (n\geqslant 1)$.

再设 Δ_{n+1} 是 Δ_n 之加细(即 Δ_{n+1} 之分点皆为 Δ_n 之分点)$(n\geqslant 0)$.令 $\delta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k_n}|t_{n,i}-t_{n,i-1}|\to 0\ (n\to\infty)$.显然

$$\begin{aligned}
&(X(t)-X(s))^2\\
&=\Big(\sum_{i=1}^{k_n}[X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]\Big)^2\\
&=2\sum_{1<i<k_n}[X(t_{n,j})-X(t_{n,j-1})][X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]\\
&\quad+\sum_{1\leqslant i\leqslant k_n}[X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]^2\\
&=2\sum_{i=1}^{k_n}[X(t_{n,i-1})-X(s)][X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k_n}[X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]^2\\
&\xlongequal{\text{记作}}\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

令 $\varphi_n(t)=t_{n,i-1}$(当 $t_{n,i-1}\leqslant t<t_{n,i}$), $i=1,\cdots,k_n$,则由(3.3)

式有

$$
\begin{aligned}
&[X(t_{n,i-1})-X(s)][X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})]\\
&\quad=\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}[X(t_{n,i-1})-X(s)]\alpha(u)\mathrm{d}u\\
&\qquad+(\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}[X(t_{n,i-1})-X(s)]\beta(u)\mathrm{d}B(u),\\
&\quad=\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}[X(\varphi_n(u))-X(s)]\alpha(u)\mathrm{d}u\\
&\qquad+(\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}[X(\varphi_n(u))-X(s)]\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

将(3.7)代入(3.6)式得

$$
\begin{aligned}
\xi_n^{(1)}&=2\int_s^t[X(\varphi_n(u))-X(s)]\alpha(u)\mathrm{d}u\\
&\quad+2(\mathrm{i})\int_s^t[X(\varphi_n(u))-X(s)]\beta(u)\mathrm{d}B(u),
\end{aligned}\tag{3.8}
$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(u)=u$，$\{X(t)\}$ 的几乎所有的轨道连续，从而在 $[s,t]$ 上有界，故对(3.8)式右端第一个积分用控制收敛定理，对第二个积分用定理 1.4 可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\xi_n^{(1)}&=2\int_s^t[X(u)-X(s)]\alpha(u)\mathrm{d}u\\
&\quad+2(\mathrm{i})\int_s^t[X(u)-X(s)]\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

而由(3.3)式有

$$
\begin{aligned}
\xi_n^{(2)}&=\sum_{i=1}^{k_n}\left(\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\alpha(u)\mathrm{d}u\right)^2\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{k_n}\left(\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\alpha(u)\mathrm{d}u\right)\left((\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\beta(u)\mathrm{d}B(u)\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k_n}\left((\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\beta(u)\mathrm{d}B(u)\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\stackrel{\text{记作}}{=\!=} \eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)} + \eta_n^{(3)}. \tag{3.10}$$

显然

$$\eta_n^{(1)} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k_n}\left|\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \alpha(u)\mathrm{d}u\right|\int_s^t |\alpha(u)|\mathrm{d}u,$$

$$\eta_n^{(2)} \leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant k_n}\left|(\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \beta(u)\mathrm{d}B(u)\right|\int_s^t |\alpha(u)|\mathrm{d}u.$$

由$\int_a^b |\alpha(u,\omega)|\mathrm{d}u < \infty$ 对几乎所有的 ω 成立知：对几乎所有的 ω，$\int_s^v \alpha(u,\omega)\mathrm{d}u$ 是 v 的连续函数，从而在$[s,t]$上一致连续，由 $\beta(t)\in \mathscr{I}_b^a$，$\{\beta(t)\}$可分，若取$\left\{(\mathrm{i})\int_a^t \beta(u)\mathrm{d}B(u): a\leqslant t\leqslant b\right\}$可分，则由定理 1.5 (3) 得知其对几乎所有的轨道连续，从而对几乎所有的 ω，

$$(\mathrm{i})\int_s^v \beta(u,\omega)\mathrm{d}B(u,\omega)$$

在$[s,t]$上一致连续. 故得

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty}\eta_n^{(2)} = 0, \ [\mathrm{a,e.}]. \tag{3.11}$$

最后我们估计 $\eta_n^{(3)}$. 由于分割 Δ_n 是Δ_0 的加细($n\geqslant 1$)，所以由 $\beta(t)\in S_b^a$ 的定义得

$$\begin{aligned}\eta_n^{(3)} &= \sum_{i=1}^{k_n}\left((\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\beta(u)\mathrm{d}B(u)\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in\Gamma_i(n)}\left((\mathrm{i})\int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}}\beta(u)\mathrm{d}B(u)\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{m}\beta(t_{i-1})^2\sum_{j\in\Gamma_i(n)}(B(t_{n,j})-B(t_{n,j-1}))^2,\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\Gamma_i(n) = \{j: t_{i-1} < t_{n,j} \leqslant t_i\}$.

对每个固定的 i ($1\leqslant i\leqslant m$)，由于 $\delta_n\to 0$，Δ_{n+1} 是 Δ_n 的加细，仿第五章定理 2.3 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in\Gamma_i(n)}(B(t_{n,j})-B(t_{n,j-1}))^2=(t_i-t_{i-1}),\ [\text{a.e.}].$$

(3.13)

因此,由(3.12),(3.13)及 $\beta(t)$ 的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n^{(3)}=\sum_{i=1}^m\beta(t_{i-1})^2(t_i-t_{i-1})=\int_s^t\beta(u)^2\mathrm{d}u. \tag{3.14}$$

由(3.6),(3.9),(3.10),(3.11),(3.14)式得知 $\beta(t)\in S_b^a$ 时,(3.5)式成立.

(ⅱ)　对一般的 $\beta(t)\in\mathscr{I}_b^a$,由引理1.6知存在 $\widetilde{\beta}_n(t)\in\mathscr{H}_b^a$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|\widetilde{\beta}_n(t)-\beta(t)|^2\mathrm{d}t=0,\ [\text{P.}]. \tag{3.15}$$

再由引理1.3知存在 $\widetilde{\beta}_{n,k}(t)\in S_b^a$,使

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{E}\left(\int_a^b|\widetilde{\beta}_{n,k}(t)-\widetilde{\beta}_n(t)|^2\mathrm{d}t\right)=0,$$

且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b|\widetilde{\beta}_{n,k}(t)-\widetilde{\beta}_n(t)|^2\mathrm{d}t=0,\ [\text{P.}]. \tag{3.16}$$

故由(3.15),(3.16)式知存在 $\beta_n^*(t)\in S_b^a$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|\beta_n^*(t)-\beta(t)|^2\mathrm{d}t=0,\ [\text{P.}], \tag{3.17}$$

从而存在非负整数集中一个趋于无穷的子列 $\{k_n\}$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|\beta_{k_n}^*(t)-\beta(t)\right|^2\mathrm{d}t=0,\ [\text{a.e.}]. \tag{3.18}$$

记 $\beta_n(t)=\beta_{k_n}^*(t)$. 由(3.5)式对 $\beta_n(t)$ 成立,知

$$\begin{aligned}&(X^{(n)}(t)-X^{(n)}(s))^2\\&\quad=\int_s^t[2(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))\alpha(u)+\beta_n^2(u)]\mathrm{d}u\\&\qquad+(\mathrm{i})\int_s^t2(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))\beta_n(u)\mathrm{d}B(u),\end{aligned} \tag{3.5*}$$

其中 $X^{(n)}(t)$ 有随机微分：

$$dX^{(n)}(t) = \alpha(t)dt + \beta_n(t)dB(t).$$

由随机微分的定义、(3.18) 式及定理 1.5 (2) 得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))-(X(u)-X(s))|\\&\quad=\lim_{n\to\infty}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big|(\mathrm{i})\int_s^u\beta_n(r,\omega)dB(r,\omega)\\&\qquad-(\mathrm{i})\int_s^u\beta(r,\omega)dB(r,\omega)\Big|=0,\ [\mathrm{P.}].\end{aligned}\tag{3.19}$$

故存在 $\{n\}$ 的一个子序列(为使符号简单起见,仍用 $\{n\}$ 表示)使

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}|(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))-(X(u)-X(s))|\\&\quad=0,\ [\mathrm{a.e.}].\end{aligned}\tag{3.20}$$

因此,由 $\int_a^b|\alpha(t,\omega)|dt<\infty$, [a.e.],及控制收敛定理,可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_s^t[X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s)]\alpha(u)dn\\&\quad=\int_s^t[X(u)-X(s)]\alpha(u)du,\ [\mathrm{a.e.}].\end{aligned}\tag{3.21}$$

由(3.18) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t\beta_n^2(u)du=\int_s^t\beta^2(u)du,\ [\mathrm{a.e.}].\tag{3.22}$$

由 $(c+d)^2\leqslant 2c^2+2d^2$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_s^t\{[X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s)]\beta_n(u)-[X(u)-X(s)]\beta(u)\}^2du\\&\quad\leqslant 2\int_s^t[(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))\ (\beta_n(u)-\beta(u))]^2du\\&\qquad+2\int_s^t[(X^{(n)}(u)-X^{(n)}(s))-(X(u)\\&\qquad-X(s))]^2\beta^2(u)du.\end{aligned}\tag{3.23}$$

由(3.18) 式及对几乎所有的 ω, $X^{(n)}(\cdot,\omega)$ 在 $[s,t]$ 上有界,得 (3.23) 式右端第一项当 $n\to\infty$ 时,[a.e.] 趋于 0. 由(3.20) 式及

$\int_a^b \beta^2(t,\omega)\mathrm{d}t < \infty$, [a.e.] 得知(3.23) 式右端第二项当 $n \to \infty$ 时,[a.e.] 趋于 0. 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t \{[X^{(n)}(u) - X^{(n)}(s)]\beta_n(u) - [X(u) - X(s)]\beta(u)\}^2\mathrm{d}u = 0, \ [\text{a.e.}]. \tag{3.24}$$

再由定理 1.5 (2) 得

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{i})\int_s^t [X^{(n)}(u) - X^{(n)}(t)]\beta_n(u)\mathrm{d}B(u) = (\mathrm{i})\int_s^t [X(u) - X(t)]\beta(u)\mathrm{d}B(u), \ [\text{P.}]. \tag{3.25}$$

取$\{n\}$ 的一个子序列(仍记之为$\{n\}$),使(3.25) 式在[a.e.] 意义下仍成立. 则由(3.5)*, (3.20), (3.21), (3.22), (3.25) 式得知 (3.5) 式对 $X(t)$ 成立. 引理证毕.

引理 3.2 沿用引理 3.1 的符号,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}[X(t_{n,i}) - X(t_{n,i-1})]^2 = \int_s^t \beta^2(u)\mathrm{d}u, \ [\text{P.}]. \tag{3.26}$$

证 由(3.5) 式,有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k_n}[X(t_{n,i}) - X(t_{n,i-1})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k_n}\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}}\{2[X(u) - X(t_{n,i-1})]\alpha(u) + \beta^2(u)\}\mathrm{d}u \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k_n}(\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} 2[X(u) - X(t_{n,i-1})]\beta(u)\mathrm{d}B(u) \\
&= \int_s^t \{2[X(u) - X(\varphi_n(u))]\alpha(u) + \beta^2(u)\}\mathrm{d}u \\
&\quad + (\mathrm{i})\int_s^t 2[X(u) - X(\varphi_n(u))]\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned}$$

由于对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 连续,从而 $X(u,\omega) - X(\varphi_n(u),\omega)$

在 $u\in[s,t]$ 上一致趋于0(当 $n\to\infty$ 时). 用$\int_b^a|\alpha(u,\omega)|\mathrm{d}u<\infty$,

[a.e.];得知上式右端第一项当 $n\to\infty$ 时,[a.e.] 趋于$\int_s^t\beta^2(u)\mathrm{d}u$,

再用定理 1.5 (2) 知第二项[P.] 趋于 0. 引理证毕.

下面我们应用前述二引理来证明定理 3.1.

证 由于 $X(t)$ 有随机微分,且 $g,g'_t,g'_x,g''_{x,x}$ 皆连续,为证定理 3.1,只需证明:

$$
\begin{aligned}
&Y(t)-Y(s)\\
&\quad=\int_s^t[\alpha(u)g'_x(u,X(u))+g'_u(u,X(u))\\
&\qquad+\frac{1}{2}\beta^2(u)g''_{x,x}(u,X(u))]\mathrm{d}u\\
&\qquad+(\mathrm{i})\int_s^t\beta(u)g'_x(u,X(u))\mathrm{d}B(u).
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

而由 Taylor 展开得

$$
\begin{aligned}
&g(t+\Delta t,X+\Delta X)-g(t,X)\\
&\quad=(g(t+\Delta t,X+\Delta X)-g(t,X+\Delta X))\\
&\qquad+(g(t,X+\Delta X)-g(t,X))\\
&\quad=g'_t(t+\theta\Delta t,X+\Delta X)\Delta t+g'_x(t,X)\Delta X\\
&\qquad+\frac{1}{2}g''_{x,x}(t,X+\theta_1\Delta X)(\Delta X)^2\\
&\quad=g'_t(t+\theta\Delta t,X+\Delta X)\Delta t+g'_x(t,X)\Delta X\\
&\qquad+\frac{1}{2}g''_{x,x}(t,X)(\Delta X)^2\\
&\qquad+\frac{1}{2}\varepsilon(t,X,X+\Delta X)(\Delta X)^2,
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

由于 $g''_{x,x}$ 连续,当 $t,X,\Delta X$ 在有界区域变动,$\Delta X\to 0$ 时,$\varepsilon(t,X,X+\Delta X)$ 一致地趋于 0. 令分割列 $\{\Delta_n:n\geqslant 0\}$ 如引理 3.1 中所定义,$\delta_{n,i}=t_{n,i}-t_{n,i-1}$,则由(3.28) 式有

$$Y(t)-Y(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k_n} [g(t_{n,i}, X(t_{n,i})) - g(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}))] \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} g'_t(t_{n,i-1} + \theta\delta_{n,i}, X(t_{n,i}))\delta_{n,i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k_n} g'_x(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}))(X(t_{n,i}) - X(t_{n,i-1})) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_n} g''_{x,x}(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}))(X(t_{n,i}) \\
&\quad - X(t_{n,i-1}))^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}), X(t_{n,i}))(X(t_{n,i}) \\
&\quad - X(t_{n,i-1}))^2 \\
&\xlongequal{\text{记作}} A_n + B_n + \frac{1}{2}C_n + \frac{1}{2}D_n \quad (n \geqslant 0).
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

下面计算 A_n, B_n, C_n, D_n 的极限. 由 g'_t 连续、$\{X(t)\}$ 的几乎所有的轨道连续,得

$$
\lim_{n\to\infty} A_n = \int_s^t g'_u(u, X(u))\mathrm{d}u, \ [\text{a.e.}]. \tag{3.30}
$$

而由(3.3) 式得

$$
\begin{aligned}
B_n &= \int_s^t g'_x(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))\alpha(u)\mathrm{d}u \\
&\quad + (\mathrm{i})\int_s^t g'_x(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned}
$$

仿(3.8),(3.9) 式可证

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_n &= \int_s^t g'_x(u, X(u))\alpha(u)\mathrm{d}u \\
&\quad + (\mathrm{i})\int_s^t g'_x(u, X(u))\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

将(3.5) 式代入 C_n 的表达式中,得

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=1}^{k_n} g''_{x,x}(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}))(X(t_{n,i}) - X(t_{n,i-1}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} g''_{x,x}(t_{n,i-1}, X(t_{n,i-1}))\bigg\{\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} [2(X(u) \\
&\quad - X(t_{n,i-1}))\alpha(u) + \beta^2(u)]\mathrm{d}u \\
&\quad + (\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} 2[X(u) - X(t_{n,i-1})]\beta(u)\mathrm{d}B(u)\bigg\} \\
&= \sum_{i=1}^{k_n}\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} g''_{x,x}(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))[2(X(u) \\
&\quad - X(\varphi_n(u)))\alpha(u) + \beta^2(u)]\mathrm{d}u \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k_n}(\mathrm{i})\int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} g''_{x,x}(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))2[X(u) \\
&\quad - X(\varphi_n(u))]\beta(u)\mathrm{d}B(u) \\
&= \int_s^t g''_{x,x}(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))[2(X(u) \\
&\quad - X(\varphi_n(u)))\alpha(u) + \beta^2(u)]\mathrm{d}u \\
&\quad + (\mathrm{i})\int_s^t g''_{x,x}(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))2[X(u) \\
&\quad - X(\varphi_n(u))]\beta(u)\mathrm{d}B(u).
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

由于对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 在$[s,t]$上一致连续,$g''_{x,x}$ 连续,$\varphi_n(u) \to u$ (当 $n \to \infty$ 时),所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup_{s\leqslant u\leqslant t} &\left| g''_{x,x}(\varphi_n(u), X(\varphi_n(u)))(X(u) \right. \\
&\left. - X(\varphi_n(u)))\right| = 0, \ [\text{a.e.}].
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

代入(3.32)式并注意$\int_s^t |\alpha(u)|\mathrm{d}u < \infty$, $\int_s^t \beta^2(u)\mathrm{d}u < \infty$, [a.e.]得

$$
\lim_{n\to\infty} C_n = \int_s^t g''_{x,x}(u, X(u))\beta^2(u)\mathrm{d}u, \ [\text{a.e.}]. \tag{3.34}
$$

最后估计 D_n 的极限. 由于对几乎所有的 ω, $X(\cdot,\omega)$ 连续, 而

$$\begin{aligned}\varepsilon(t_{n,i-1},X(t_{n,i-1}),X(t_{n,i}))\\ &= g''_{x,x}(t_{n,i-1},X(t_{n,i-1})+\theta_1(X(t_{n,i})-X(t_{n,i-1})))\\ &\quad - g''_{x,x}(t_{n,i-1},X(t_{n,i-1})),\quad 0\leqslant\theta_1\leqslant 1,\end{aligned}$$

$g''_{x,x}$ 连续, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(t_{n,i-1},X(t_{n,i-1}),X(t_{n,i}))=0,\ [\text{a.e.}]\quad (\text{对 } i \text{ 一致地成立}). \tag{3.35}$$

由(3.26),(3.35)式即得

$$\lim_{n\to\infty} D_n = 0,\ [\text{P.}]. \tag{3.36}$$

由(3.29),(3.30),(3.31),(3.34),(3.36)式得证本定理.

第十二章 应 用

随机过程论在国民经济(工、农、林、牧、副、渔、商、经济、金融……)、科学与技术(特别是近代物理、化学、分子生物学与各种高新技术)、国防建设中均有极其广泛的应用.作者在本章中只能挂一漏万地简单介绍一下随机过程论在几个方面的应用.

§1 更新过程与新陈代谢

在给予更新过程的数学定义以前,我们先看两个具体的例子.

例 1.1(设备的更替) 考虑一件设备(它可能是一台机床;也可能是一个零件或一个细胞……),它一直使用到(存活到)报废为止,然后再用一个同类设备来替换(或代谢).假定这类设备的使用时间的长度(或寿命)是一个正值随机变量 T,而相继投入使用的设备的寿命为 $T_1, T_2, \cdots$,一般说,可以假定 $\{T_n : n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的,且其公共分布就是 T 的分布.令 $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} T_k \ (n \geqslant 1)$,$X_t$ 是 $[0, t)$ 时间区间内替换的新设备的个数,则 τ_n 是更换第 n 个新设备的时刻,且 $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ 与 $\{\tau_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 有如下关系:

$$\{X_t < n\} = \{\tau_n \geqslant t\} \quad (t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \cdots),$$

$\{X_t : t \geqslant 0\}$ 与 $\{T_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 有如下关系:

T_n 是 X_t 的第 n 个跳跃点与第 $n-1$ 个跳跃点之间的长度.

例 1.2 考虑轮船入港.假定 τ_n 是第 n 条轮船进入港口的时刻 $(n \geqslant 1)$.设 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$,再令 $T_1 = \tau_1$, $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$, X_t 是 $[0,t)$ 时刻区间内进入港口的轮船总条数.若 $\{T_n : n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列,则 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 亦具有例 1.1 中 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 之概率特性.

下面我们给出更新过程的数学定义.

定义 1.1 设 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一族取非负整数的随机变量, $\{T_n : n \geqslant 1\}$ 是一列取正数的相互独立的具有公共分布的随机变量, $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} T_k \quad (n \geqslant 1)$,而且满足

$$\{X_t < n\} = \{\tau_n \geqslant t\} \quad (t \geqslant 0,\ n = 1,2,\cdots), \tag{1.1}$$

亦即

$$\{X_t = n\} = \{\tau_{n+1} \geqslant t > \tau_n\} \quad (t \geqslant 0,\ n = 1,2,\cdots), \tag{1.2}$$

则称 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 是一个**更新过程**,称 τ_n 为其第 n 个**更新时刻**, T_n 是其第 n 个**更新间距**, $n = 1,2,\cdots$.

比更新过程稍广的概念是"延迟的更新"过程.如果定义 5.1 中 $\{T_n : n \geqslant 1\}$ 独立同分布的条件改为: $\{T_n : n \geqslant 1\}$ 相互独立, $\{T_n : n \geqslant 2\}$ 相同分布,则称相应的随机过程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 为**延迟的更新过程**.

延迟的更新过程的直观意义是 T_1 与 $T_n (n \geqslant 2)$ 未必同分布,亦即初始设备的使用寿命的分布未必与新替换上的设备的使用寿命同分布,亦即初始设备可能是旧设备.

定义 1.2(更新方程) 设 $f, h : [0, \infty) \mapsto \mathbf{R}$.若 g 满足

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s) f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [0, \infty), \tag{1.3}$$

则称 $g(t)$ 满足 (f,h) **更新方程式**.

定理 1.1 设 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 是更新过程, T_n 是其第 n 个更新间

距，$n=1,2,\cdots$，它们的公共分布函数 $F(x)$ 具有密度函数 $f(x)$，$m(t)\triangleq \boldsymbol{E}(X_t)$ $(t\geqslant 0)$ 是其期望函数，则 $m(t)$ 满足(f,F)更新方程式：

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

证 用第四章 §4 条件期望的计算方法有

$$m(t)=\int_0^\infty \boldsymbol{E}(X_t \mid T_1=s)f(s)\mathrm{d}s \quad (t\geqslant 0). \tag{1.5}$$

而由(1.1)有

$$\{X_t=0\}=\{X_t<1\}=\{\tau_1\geqslant t\}=\{T_1\geqslant t\},$$

所以 $P(X_t=0 \mid T_1=s)=1$（当 $s>t\geqslant 0$），从而

$$\boldsymbol{E}(X_t \mid T_1=s)=0 \quad (\text{当 } s>t\geqslant 0). \tag{1.6}$$

而当 $s\leqslant t$ 时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X_t \mid T_1=s)&=\sum_{k=1}^\infty kP(X_t=k \mid T_1=s)\\&=\sum_{k=1}^\infty kP(X_{t-s}=k-1)\\&=1+m(t-s) \quad (s\leqslant t).\end{aligned} \tag{1.7}$$

以(1.6)，(1.7)代入(1.5)即得(1.4)．定理证毕．

定义1.3 设 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是更新过程，T_n 与 τ_n 分别为第 n 个更新间距和第 n 个更新时刻$(n\geqslant 1)$，称

$$\gamma(t)\triangleq \tau_{X_t+1}-t \tag{1.8}$$

为时刻 t"还活着"的物体的"**剩余寿命**"，简称"剩余寿命"．

"剩余寿命"的研究，在更新过程中，是一个很重要的问题．下面我们证明剩余寿命的分布亦满足某一更新方程式．

定理1.2 设 $\{X_t:t\geqslant 0\}$，$\{T_n:n\geqslant 1\}$，$\{\tau_n:n\geqslant 1\}$，$\{\gamma(t):t\geqslant 0\}$ 如定义1.3，$F(t)$ 和 $f(t)$ 分别为 T_n 的分布函数与密度函数．再令

$$g_x(t)=P(\gamma(t)\geqslant x), \tag{1.9}$$

$$h_x(t) = 1 - F(t + x),$$

则 g_x 满足(f, h_x)更新方程式：

$$g_x(t) = 1 - F(t + x) + \int_0^t g_x(t - s) f(s) \mathrm{d}s. \quad (1.10)$$

（若取 $g_x(t) = P(\gamma(t) > x)$，(1.10) 仍然成立.）

证　依条件概率性质有

$$P(\gamma(t) \geqslant x) = \int_0^\infty P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) f(s) \mathrm{d}s. \quad (1.11)$$

而当 $s > t + x$ 时有 $\{T_1 = s\} \subset \{\gamma(t) \geqslant x\}$；而当 $t \leqslant s < t + x$ 且 $\{T_1 = s\}$ 时，$\{\gamma(t) \geqslant x\} \cong \varnothing$；所以由(1.11)得

$$P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) = \begin{cases} 1, & \text{当 } s > t + x, \\ 0, & \text{当 } t \leqslant s < t + x. \end{cases} \quad (1.12)$$

当 $s < t$ 时，由 $\gamma(t)$ 的定义得

$$\begin{aligned}
& P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) \\
& = P\left(\sum_{i=1}^{X_t+1} T_i - t \geqslant x \,\Big|\, T_1 = s\right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t - s) \geqslant x,\ X_t = m \,\Big|\, T_1 = s\right) \\
& = \\
& \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t - s) \geqslant x,\ \tau_{m+1} \geqslant t > \tau_m \,\Big|\, T_1 = s\right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t - s) \geqslant x,\right. \\
& \qquad \left. \sum_{i=2}^{m+1} T_i \geqslant (t - s) > \sum_{i=2}^{m} T_i \,\Big|\, T_1 = s\right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t - s) \geqslant x,\right. \\
& \qquad \left. \sum_{i=2}^{m+1} T_i \geqslant (t - s) > \sum_{i=2}^{m} T_i\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{m} T_i - (t-s) \geqslant x, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} T_i \geqslant (t-s) > \sum_{i=1}^{m-1} T_i\Big) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau_m - (t-s) \geqslant x,\ \tau_m \geqslant (t-s) > \tau_{m-1}) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau_m - (t-s) \geqslant x,\ X_{t-s} = m-1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\tau_{X_{t-s}+1} - (t-s) \geqslant x,\ X_{t-s} = m-1\Big) \\
&= P(\gamma(t-s) \geqslant x).
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

以(1.12)、(1.13)代入(1.11)得

$$
\begin{aligned}
&P(\gamma(t) \geqslant x) \\
&\quad = \int_{t+x}^{\infty} f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t P(\gamma(t-s) \geqslant x) f(s)\mathrm{d}s \\
&\quad = 1 - F(t+x) + \int_0^t P(\gamma(t-s) \geqslant x) f(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

此即(1.10)成立.定理 1.2 证毕.

我们为什么要研究剩余寿命 $\gamma(t)$ 的分布呢?因为不仅剩余寿命有重要的直观背景,而且剩余寿命的分布与更新过程的分布也有密切的关系.这就是下面的

定理 1.3 设 $\{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是更新过程,$\gamma(t)$ 是剩余寿命,$F_t(x) \triangleq P(\gamma(t) \leqslant x)$ 是其分布函数.考虑 $t, v \geqslant 0$,令

$$
X_{t+} = \lim_{u \downarrow t} X_u .
$$

(1) 若 $F_t(x)$ 有密度函数 $f_t(x)$,则

$$
P(X_{t+v} - X_t = n) = \begin{cases} P(\gamma(t) \geqslant v) = \displaystyle\int_v^{\infty} f_t(s)\mathrm{d}s, & \text{当 } n = 0, \\ \displaystyle\int_0^v P(X_{v-s} = n-1) f_t(s)\mathrm{d}s, & \text{当 } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.14}
$$

(2) 若 $\gamma(t)$ 是离散随机变量:

$$P(\gamma(t)=a_{t,m})=p_{t,m}\quad(m=0,1,\cdots,\ t\geqslant 0),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_{t,m}=1\quad(\forall\, t\geqslant 0),$$

则

$$P(X_{t+v}-X_t=n)$$
$$=\begin{cases}P(\gamma(t)\geqslant v)=\sum\limits_{a_{t,m}\geqslant v}p_{t,m}, & \text{当 } n=0,\\ \sum\limits_{a_{t,m}<v}P\left(X_{v-a_{t,m}}=n-1\right)p_{t,m}, & \text{当 } n\geqslant 1.\end{cases}\tag{1.15}$$

(3) 若 $\gamma(t)$ 是一般的随机变量,则

$$P(X_{t+v}-X_t=n)$$
$$=\begin{cases}P(\gamma(t)\geqslant v), & \text{当 } n=0,\\ \int_{[0,v)}P(X_{v-s}=n-1)F_t(\mathrm{d}s), & \text{当 } n\geqslant 1.\end{cases}\tag{1.16}$$

证 只证(1)(对(2),(3)类似地可证). 由 $\gamma(t)$ 的定义及(1.2)可证:

$$\{\gamma(t)\geqslant v\}=\{X_{t+v}-X_t=0\}.$$

此即(1.14)对 $n=0$ 成立.

当 $n\geqslant 1$ 时,令 $A_n=\{X_{t+v}-X_t=n\}$,则

$$P(A_n)=\int_0^{\infty}P(A_n\mid\gamma(t)=s)f_t(s)\mathrm{d}s.\tag{1.17}$$

当 $s<v$ 时,$\gamma(t)=s$ 意味着:

$$\tau_{X_t}\leqslant t\leqslant t+s=\tau_{X_t+1}<t+v.$$

所以

$$P(A_n\mid\gamma(t)=s)$$
$$=P\left(X_{t+v}-X_t=n\mid\tau_{X_t+1}=s+t\right)$$

$$= P\left(\tau_{X_t+n+1} \geqslant t + v > \tau_{X_t+n} \,\middle|\, \tau_{X_t+1} = s + t\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=X_t+2}^{X_t+n+1} T_i \geqslant (t+v) - (t+s) > \sum_{i=X_t+2}^{X_t+n} T_i\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geqslant (v-s) > \sum_{i=1}^{n-1} T_i\right)$$

$$= P(X_{v-s} = n-1) \quad (n \geqslant 1,\ s < v), \tag{1.18}$$

当 $s \geqslant v$ 时,$\gamma(t) = s$ 意味着:

$$\tau_{X_t} \leqslant t \leqslant t + v \leqslant t + s = \tau_{X_t+1},$$

亦即在$[t, t+v)$内没有设备更新,所以

$$P(A_n \mid \gamma(t) = s)$$
$$= P(\text{在}[t,t+v)\text{内更新 } n \text{ 次设备} \mid \gamma(t) = s)$$
$$= 0 \quad (\forall\, n \geqslant 1). \tag{1.19}$$

将(1.18),(1.19)代入(1.17)即得(1.14)的第2个等式.(1)得证.定理证毕.

下面我们讨论更新方程式(1.3)的解.对一般情况,其精确的分析表达式并不能很容易求出.我们只讨论几种特殊场合.

定理1.4 若$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$是负指数分布的密度函数($\lambda > 0$是正的常数),$h(x)$有连续导函数$h'(x)$ $(x \geqslant 0)$,则(f,h)更新方程式

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s)\lambda e^{-\lambda s} ds \quad (t \geqslant 0), \tag{1.20}$$

的解为

$$g(t) = g(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} \frac{d}{ds}(h(s)e^{\lambda s}) ds. \tag{1.21}$$

证 令$G(t) = g(t)e^{\lambda t}$, $H(t) = h(t)e^{\lambda t}$,则由(1.20)知$G(t)$满足

$$G(t) = H(t) + \lambda \int_0^t G(s) ds. \tag{1.22}$$

所以

$$G'(t) - \lambda G(t) = H'(t). \tag{1.23}$$

而

$$G'(t) - \lambda G(t) = e^{\lambda t} g'(t), \tag{1.24}$$

将(1.24)代入(1.23)得 $g'(t) = e^{-\lambda t} H'(t)$. 所以

$$g(t) = g(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} H'(s) ds,$$

此即(1.20)之解必为(1.21). 显然(1.21)是(1.20)之解. 定理证毕.

定理1.5 设$\{X_t : t \in [0,\infty)\}$是更新过程, T_n是其第n个更新间距, $\gamma(t)$是剩余寿命. 若T_n服从负指数分布, 即存在常数$\lambda > 0$使

$$P(T_n \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & 当\ x \geqslant 0, \\ 0, & 当\ x < 0, \end{cases}$$

则$\gamma(t)$的分布与T_n的分布一样.

证 由定理1.2中的(1.10)式得

$$P(\gamma(t) \geqslant x) = e^{-\lambda(t+x)} + \lambda \int_0^t P(\gamma(t-s) \geqslant x) e^{-\lambda s} ds. \tag{1.25}$$

令

$$g_x(t) = P(\gamma(t) \geqslant x),\ h_x(t) = e^{-\lambda(t+x)},\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

则(1.25)说明: 对任何固定的$x \geqslant 0$, $g_x(\cdot)$满足(f, h_x)更新方程式. 因此, 由定理1.4得知

$$\begin{aligned} P(\gamma(t) \geqslant x) &= g_x(t) \\ &= g_x(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} \frac{d}{ds}(e^{\lambda s} h_x(s)) ds \\ &= P(\gamma(0) \geqslant x) + \int_0^t e^{-\lambda s} \frac{d}{ds}(e^{-\lambda x}) ds \\ &= P(\gamma(0) \geqslant x). \end{aligned} \tag{1.26}$$

而由定理1.3及(1.1)得

$$P(\gamma(0) \geqslant x) = P(X_x = 0)$$
$$= P(T_1 \geqslant x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0). \tag{1.27}$$

由(1.26),(1.27)即得定理1.5.

下面我们证明一个有关更新过程与Poisson过程联系的定理.

定理1.6 设更新过程 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 的第 n 个更新间距 T_n 服从强度为 $\lambda > 0$ 的负指数分布:

$$P(T_n \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } x < 0, \end{cases}$$

则 X 是一个强度为 λ 的、始于0的标准的Poisson过程,沿用第五章的符号,即 X 是一个强度为 λ 的 S.P.P.O..

证 视此处的 T_n 为第五章定理1.1中的 Y_n $(n \geqslant 1)$,则由 X 是更新过程(必满(1.1)或(1.2))及第五章定理1.1立即可得 X 是一个强度为 λ 的 S.P.P.O..

上面的定理1.6假定了更新过程的更新间距服从负指数分布,下面的定理研究了一类更广泛的更新过程,其更新间距服从 Γ 分布(负指数分布是 Γ 分布的特例).

定理1.7 设 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是更新过程,其更新间距 T_n 服从参数为 (k,λ) 的 Γ 分布 $(k \geqslant 1)$,即 T_n 有密度函数

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } x < 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

令 $p_t(n) = P(X_t = n)$ $(t \in [0,\infty),\ n = 0,1,\cdots)$,

$$\Psi(t,Z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) Z^n \quad (|Z| \leqslant 1) \tag{1.29}$$

为 X_t 的"矩母函数".则

$$p_t(n) = \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t}, \tag{1.30}$$

$$\Psi(t,Z) = 1 + \left(\frac{Z-1}{Z}\right)\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} \frac{Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}{1 - Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}\left[1 - e^{-\lambda t(1 - Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r)}\right], \tag{1.31}$$

其中

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{k}}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{1.32}$$

证　由于$\{T_n : n \geqslant 1\}$独立同分布,其公共分布是参数为(k,λ)的Γ分布,所以

$$\tau_N = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

服从参数为(Nk,λ)的Γ分布.因此通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
P(X_t = n) &= P(\tau_{n+1} \geqslant t > \tau_n) \\
&= \int_t^{\infty} f_{(n+1)k}(x)\mathrm{d}x - \int_t^{\infty} f_{nk}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_t^{\infty} \frac{\lambda}{((n+1)k-1)!}(\lambda x)^{(n+1)k-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_t^{\infty} \frac{\lambda}{(nk-1)!}(\lambda x)^{nk-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t}.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

令

$$G(t,Z) = \sum_{n=1}^{\infty} Z^{n-1} P(\tau_n < t) \quad (t > 0, |Z| < 1), \tag{1.34}$$

则

$$\begin{aligned}
\Psi(t,Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} Z^n P(X_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Z^n (P(\tau_{n+1} \geqslant t) - P(\tau_n \geqslant t)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Z^n (P(\tau_n < t) - P(\tau_{n+1} < t)) \\
&= 1 + (Z-1)G(t,Z).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

而τ_n服从参数为(nk,λ)的Γ分布,所以若令$Z = y^k$,则

$$
\begin{aligned}
G(t,Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z^{n-1}\int_0^t f_{nk}(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y^{k(n-1)}\int_0^t \frac{(\lambda x)^{kn-1}}{(kn-1)!}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= y^{1-k}\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda x y)^{kn-1}}{(kn-1)!}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

但是

$$
\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r \mathrm{e}^{u\varepsilon^r} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^{n+1}, \tag{1.37}
$$

而当 $v = lk$ 为 k 的整数倍时,有

$$
\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^v = \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\mathrm{e}^{2lr\pi i} = 1. \tag{1.38}
$$

当 v 不等于 k 的整数倍时,用几何级数计算可得

$$
\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^v = \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\mathrm{e}^{\frac{2vr\pi i}{k}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{2v\pi i}{k}})^k}{1-\mathrm{e}^{\frac{2v\pi i}{k}}} = 0. \tag{1.39}
$$

将(1.38),(1.39)代入(1.37)得

$$
\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r \mathrm{e}^{u\varepsilon^r} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{nk-1}}{(nk-1)!}. \tag{1.40}
$$

将(1.40)代入(1.36)得

$$
\begin{aligned}
G(t,Z) &= y^{1-k}\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r \mathrm{e}^{\lambda x y\varepsilon^r}\right)\mathrm{d}x \\
&= y^{1-k}\cdot\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\varepsilon^r}{1-y\varepsilon^r}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t(1-y\varepsilon^r)}).
\end{aligned} \tag{1.41}
$$

将(1.41)代入(1.35)并注意 $Z = y^k$ 可得

$$
\begin{aligned}
\Psi(t,Z) &= 1 + (Z-1)G(t,Z) \\
&= 1 + \left(\frac{Z-1}{Z}\right)\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}{1-Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}[1-\mathrm{e}^{-\lambda t(1-Z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r)}].
\end{aligned}
$$

定理 1.7 得证.

系 1 在定理 1.7 中,若 $k=1$,即 T_n 服从参数为 λ 的负指数分布,则定理 1.7 化为定理 1.6. 这时 X_t 的矩母函数为

$$\begin{aligned}\Psi(t,Z) &= 1+\frac{Z-1}{Z}\frac{Z}{1-Z}(1-e^{-\lambda t(1-Z)}) \\ &= e^{-\lambda t(1-Z)} \quad (|Z|\leqslant 1).\end{aligned} \tag{1.42}$$

系 2 在定理 1.7 中,若 $k=2$,则 X_t 的矩母函数为

$$\Psi(t,Z)=e^{-\lambda t}\left[\cosh(\lambda t\sqrt{Z})+\frac{1}{\sqrt{Z}}\sinh(\lambda t\sqrt{Z})\right], \tag{1.43}$$

其中 $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. 而

$$E(X_t)=\lim_{Z\uparrow 1}\frac{d}{dZ}\Psi(t,Z)=\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}, \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) &= \lim_{Z\uparrow 1}[\Psi''_{Z,Z}(t,Z)+\Psi'_Z(t,Z)-(\Psi'_Z(t,Z))^2] \\ &= \frac{\lambda t}{4}-\frac{\lambda t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{4}e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t) \\ &\quad -\frac{1}{4}(e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t))^2.\end{aligned} \tag{1.45}$$

作为这一节的结尾,我们列举有关更新过程的几个极限定理,归纳如下:

定理 1.8 设 $X=\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 是(可以是迟延的)更新过程,$\{T_1,T_2,\cdots\}$ 是其更新间距序列.

(1) 若 $\mu\triangleq E(T_2)<\infty$,则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(X_t)}{t}=\frac{1}{\mu};$$

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=\frac{1}{\mu}\right)=1.$$

(2) 若 $\mu\triangleq E(T_2)<\infty$, $\mathrm{Var}(T_2)=\sigma^2<\infty$,则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_t)}{t}=\frac{\sigma^2}{\mu^3},$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{X_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$(\forall\, x \in (-\infty,\infty)).$$

(3) 若$\mu \triangleq \boldsymbol{E}(T_2) < \infty$,且$T_2$不是"格子点随机变量"(所谓$T_2$是格子点随机变量,亦即存在一个实数$\alpha$,使$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(T_2 = \alpha k) = 1$.),则对任何$h > 0$,恒有

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}(X_{t+h} - X_t) = \frac{h}{\mu}.$$

§2 分枝过程与种群繁衍

自然界的某一物种的繁衍、原子反应堆中质点的裂变、人体中某类细胞的分裂等等现象中,其数学模型常常涉及一类很重要的随机过程——分枝过程.这类过程是怎样提炼出来的呢?它的概率特征是什么?我们主要关心的是什么问题?下面通过一些例子来剖析这些问题.

例 2.1(细胞分裂) 考虑人体中某种细胞的分裂现象.

设在时刻0人体中某种细胞的个数为X_0,经过一个单位时间以后,这X_0个细胞中的每一个可分裂成0个(即死亡)、1个(即不分裂)……m个等等.由于营养、药物刺激、运动、疲劳等因素的影响,一个细胞分裂成m个是有确定的概率p_m的,其中$p_m \geqslant 0$,$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1$.一般可以假定各个不同的细胞的分裂结果是相互独立的,而且具有公共分布$\{p_m : m \geqslant 0\}$.于是

$$X_1 = \sum_{i=1}^{X_0} \xi_i^{(1)},$$

仿之

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)} \quad (n \geqslant 1),$$

其中$\{\xi_i^{(n)}: n = 1,2,\cdots,\ i = 1,2,\cdots\}$相互独立且具有公共分布.

例 2.2(反应堆中的质点的裂变)　设在时刻 0 某反应堆中某类质点有 X_0 个,由于质点之间的相互碰撞或其他射线的袭击,每隔一个单位时间,一个质点可以分裂成 m 个质点($m = 0,1,2,\cdots$),其对应的概率为 $p_m\left(p_m \geqslant 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1\right)$. 一般而言,仍可假定:

(1) 各质点的分裂结果是相互独立的, 具有公共分布,即每一质点经过一个单位时间分裂成的新质点数是一个随机变量,且这些随机变量是独立同分布的.

(2) 质点的分裂情况与"年龄"无关,如果用 $\xi_i^{(n)}$ 代表在时刻 $n-1$ 存在的第 i 个质点经过一个单位时间后分裂成的质点数,则$\{\xi_i^{(n)}: i = 1,2,\cdots,\ n = 1,2,\cdots\}$是独立同分布的,且

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)},$$

其中 X_n 是时刻 n 该类质点的个数.

从例 2.1 和 2.2 可以看出:尽管这两类例子的实际背景不同,但它们的数学模型是一样的. 其实,还有很多实际问题,它们都属于这一数学模型.

下面我们给出分枝过程的数学定义.

定义 2.1　设$\{\xi_i^{(n)}: i = 1,2,\cdots,\ n = 1,2,\cdots\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一族独立同分布的取非负整数的随机变量,其公共分布为$\{p_m: m \geqslant 0\}$. 若 X_0 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的任一取正整数的随机变量,且

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)} \quad (n \geqslant 1), \tag{2.1}$$

则称$\{X_n:n=0,1,\cdots\}$是一个离散时间的分枝过程,或分枝链.这就是所谓的 **Galton-Watson 分枝过程**.

令$f(s)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m s^m(|s|\leqslant 1)$,称$f$为分布$\{p_m\}$的**矩母函数**,有时也称$f$为$\xi_i^{(n)}$的矩母函数,或$\{X_n\}$的本原矩母函数.

显然 Galton-Watson 分枝过程$\{X_n\}$是一时齐的可数状态的马尔可夫链.若令

$$p_{i,j}^{(k)}=P(X_{n+k}=j\,|\,X_n=i) \tag{2.2}$$

是其k步转移概率,令

$$P^{(k)}=(p_{i,j}^{(k)},\ i,j\geqslant 0) \tag{2.3}$$

是其k步(阶)转移矩阵,则有

$$\begin{cases} p_{i,j}^{(k)}=\sum\limits_{\sum_{s=1}^{i}j_s=j}\prod\limits_{s=1}^{i}p_{1,j_s}^{(k)}, & \text{当 } i>0,\ j,k\geqslant 0, \\ p_{0,j}^{(k)}=\delta_{0,j}, & \text{当 } j,k\geqslant 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中$\delta_{i,j}=0$或1视$i\neq j$或$i=j$而定.

显然$p_{1,m}\triangleq p_{1,m}^{(1)}=p_m$,而且对任何$i\geqslant 0$, $k\geqslant 1$, $\{p_{i,m}^{(k)}:m\geqslant 0\}$是一个概率分布,令$g_{k,i}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}p_{i,m}^{(k)}s^m$为其矩母函数.

对于分枝链$\{X_n\}$,研究它的矩、分布、极限分布特别是极限分布中的两个特例

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=\infty)\text{与}P(\lim_{n\to\infty}X_n=0)$$

有着重要的意义.前者意味着该系统要"爆炸"的概率,而后者是该系统要"熄灭"的概率.如果X_n代表某一患者在时刻n癌细胞的个数,前者就是"病情急剧恶化"的概率,而后者正是该患者终将"治愈"的概率.

对分枝链$\{X_n\}$的研究,矩母函数$f(s)$扮演着一个重要角色.

定理 2.1 设$\{X_n : n \geqslant 0\}$是分枝链. 若$X_0 \equiv n_0$是一正整数, $f_n(s)$是X_n的矩母函数, $\mu_n = E(X_n)$, $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n)$ $(n \geqslant 0)$, $f(s)$是$\{X_n\}$的本原矩母函数, 则

(1) $f_1(s) = f(s)^{n_0}$;

(2) $f_{n+1}(s) = f_n(f(s)),\ n \geqslant 0$;

(3) $\mu_n = n_0 \mu^n$ $(n \geqslant 1,\ \mu = f'(1))$;

(4) $$\sigma_n^2 = \begin{cases} \dfrac{n_0 \sigma^2 \mu^n (\mu^n - 1)}{\mu^2 - \mu}, & \text{当 } \mu \neq 1, \\ n_0 n \sigma^2, & \text{当 } \mu = 1 \end{cases} \quad (n \geqslant 1),$$

其中$\sigma^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2$.

证 通过直接计算立即可得(1),(2),(3). 下面证明(4). 事实上,

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n) = f_n''(1) + f_n'(1) - (f_n'(1))^2. \tag{2.5}$$

而由(2)有

$$\begin{aligned} f_n''(s) &= (f_{n-1}(f(s)))'' \\ &= f_{n-1}''(f(s))(f'(s))^2 + f''(s) f_{n-1}'(f(s)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

所以若令

$$\alpha = n_0(\sigma^2 - \mu + \mu^2), \tag{2.7}$$

并注意:

$$\mu = f'(1), \quad f''(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2, \tag{2.8}$$

则由(3)及(2.6),(2.7),(2.8)得

$$\begin{aligned} f_n''(1) &= f_{n-1}''(1)\mu^2 + (\sigma^2 - \mu + \mu^2) f_{n-1}'(1) \\ &= f_{n-1}''(1)\mu^2 + \alpha \mu^{n-1} \quad (n \geqslant 2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

反复利用(2.9)递推可得

$$f_n''(1) = f_1''(1)\mu^{2(n-1)} + \alpha(\mu^{2n-3} + \mu^{2n-4} + \cdots + \mu^{n-1}). \tag{2.10}$$

由(2.10),(2.8)可得

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \mathrm{Var}(X_n) \\
&= f_n''(1) + f_n'(1) - (f_n'(1))^2 \\
&= f_1''(1)\mu^{2(n-1)} + \alpha(\mu^{2n-3} + \mu^{2n-4} + \cdots + \mu^{n-1}) \\
&\quad + n_0\mu^n - (n_0\mu^n)^2 \\
&= [n_0(n_0-1)\mu^2 + \alpha]\mu^{2n-2} + \alpha(\mu^{2n-3} + \mu^{2n-4} \\
&\quad + \cdots + \mu^{n-1}) + n_0\mu^n - (n_0\mu^n)^2 \\
&= n_0(\mu^n - \mu^{2n}) + \alpha(\mu^{2n-2} + \mu^{2n-3} + \cdots + \mu^{n-1}).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

当 $\mu \neq 1$ 时,由(2.11)得

$$
\sigma_n^2 = \frac{n_0\sigma^2\mu^n(\mu^n - 1)}{\mu^2 - \mu}.
$$

当 $\mu = 1$ 时,由(2.11)得

$$
\sigma_n^2 = n_0 n \sigma^2.
$$

定理 2.1 得证.

定义 2.2 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是一个分枝链,称

$$
\rho \triangleq \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) \tag{2.12}
$$

为 $\{X_n\}$ 的“**绝灭概率**”.

由于 $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$,所以

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = P(\lim_{n\to\infty}\{X_n = 0\}) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

定理 2.2 设 $\{X_n : n = 0,1,\cdots\}$ 是分枝链,$X_0 \equiv 1$, $f(s)$ 是其本原矩母函数,$\mu = f'(1)$, ρ 是其绝灭概率,$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$,则

(1) $\rho = f(\rho)$;

(2) 当 $\mu \leqslant 1$ 且 $p_1 < 1$ 时,有 $\rho = 1$;

(3) 当 $\infty \geqslant \mu > 1$ 时,ρ 是方程式

$$
《f(s) = s,\ 0 \leqslant s < 1》 \tag{2.14}
$$

的唯一解.

证 首先注意:若令 $f_n(s)$ 是 X_n 的矩母函数,由于 $X_0 \equiv 1$,所以 $f_1(s) = f(s)$.

(1) 由 $f_{n+1}(s) = f_n(f(s)) = f(f_n(s))$ 及 ρ 之定义即得

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(f_{n-1}(0)) = f(\lim_{n\to\infty} f_{n-1}(0)) \\ &= f(\rho).\end{aligned}$$

(2) (A) 先设 $\mu \leqslant 1$, $p_0 + p_1 < 1$,则

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1}$$

在$[0,1)$上是严格上升函数.但是 $\mu = f'(1) = \lim_{s\uparrow 1} f'(s)$,所以

$$\mu > f'(s) \quad (\forall s \in [0,1)), \tag{2.15}$$

假设 $\rho < 1$,则存在 $c \in (\rho,1)$,使

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(\rho)}{1-\rho} = \frac{1-\rho}{1-\rho} = 1. \tag{2.16}$$

由(2.15),(2.16)得知

$$\mu > f'(c) = 1.$$

这与 $\mu \leqslant 1$ 矛盾,所以 $\rho = 1$.

(B) 再设 $\mu \leqslant 1$, $p_1 < 1$, $p_0 + p_1 = 1$.则 $f(0) = p_0$,

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f(f(0)) = f(p_0) = p_0 + p_0 p_1, \cdots, \\ f_{n+1}(0) &= f(f_n(0)) = p_0 + p_0 p_1 + \cdots + p_0 p_1^n \\ &= p_0 \left(\frac{1-p_1^{n+1}}{1-p_1} \right) \quad (n \geqslant 0). \end{aligned}$$

所以 $\rho = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \dfrac{p_0}{1-p_1} = 1$.

(3) 设 $\infty \geqslant \mu > 1$.则必有 $p_0 + p_1 < 1$.所以 $f'(s)$ 在$[0,1)$内严格上升.如果我们能证:存在 $b < 1$,使

$$f(s) < s \quad (\forall s \in (b,1)), \tag{2.17}$$

则

$$f(f_n(s)) < s, \quad \forall s \in (b,1).$$

令 $s \downarrow b$ 得

$$b \geqslant f(f_n(b)) = f_{n+1}(b).$$

所以

$$\rho = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup = f_n(b) \leqslant b < 1.$$

而(1) 中已证 $\rho = f(\rho)$. 故 ρ 是方程式(2.14) 的一个解.

再证方程式(2.14) 的解唯一. 若 t_1, t_2 是方程式(2.14) 的任意两个解. 不妨令 $0 \leqslant t_1 < t_2 < 1$,则必存在 $u_1 \in (t_1, t_2)$, $u_2 \in (t_2, 1)$,使得

$$f'(u_1) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = 1,$$

$$f'(u_2) = \frac{f(1) - f(t_2)}{1 - t_2} = \frac{1 - t_2}{1 - t_2} = 1.$$

所以

$$f'(u_1) = f'(u_2). \tag{2.18}$$

而今 $u_1 < u_2$, $f'(s)$ 在$[0,1)$ 内严格上升, $u_i \in [0,1)$, 所以(2.18) 不可能成立. 这就证明了方程式(2.14) 的解是唯一的.

最后我们补证(2.17). 因为

$$\lim_{s\uparrow 1} f'(s) = \mu > 1,$$

所以存在 $b < 1$, 使 $f'(b) > 1$. 但是当 $s \in (b,1)$ 时, 必有 c 使 $1 > c > s > b$, 且

$$\frac{f(1) - f(s)}{1 - s} = f'(c) > f'(b) > 1.$$

此即 $f(s) < s$. 定理证毕.

注意:定理 2.2 的结论与直观意义是完全吻合的. 因为 $\mu = f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$ 是一个质点在下一时刻所分裂成的质点数的期

望. 当 $\mu \leqslant 1$ 且 $p_1 < 1$ 时,该系统的质点总数的期望会随时间的推移而不会增加,且一质点经过一个单位时间后不可能总是保持一个. 在这种情况下,该系统的质点总数"迟早"是会趋于 0 的. 当 $\mu > 1$ 时,即是一个质点经过一个单位时间后,其分裂出的质点数的期望大于 1,当然该系统的质点总数不会以概率 1 而趋于 0.

定理2.2中假定了初始状态 $X_0 \equiv 1$,对于一般的 $X_0 \equiv n_0$,亦有类似的定理如下.

定理 2.3 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是分枝链, $X_0 \equiv n_0$, $f(s)$ 是其本原矩母函数, $\mu = f'(1)$. 令 $\bar{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ 是其绝灭概率. 再令

$$f_1(s) = f(s), \quad f_{n+1}(s) = f(f_n(s)) = f_n(f(s)) \ (n \geqslant 1),$$

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)$ (由定理2.2有 $\rho = f(\rho)$),则 $\bar{\rho} = \rho^{n_0}$.

(注意 $f_n(s)$ 不是 X_n 的矩母函数,而 ρ 可用定理2.2算出.)

证 令 $\bar{f}_n(s)$ 为 X_n 的矩母函数,则

$$\bar{f}_1(s) = f(s)^{n_0},$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n+1}(s) &= \bar{f}_n(f(s)) = \bar{f}_{n-1}(f(f(s))) \\ &= \cdots = \bar{f}_1(f_n(s)). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(0) = \lim_{n\to\infty} \bar{f}_1(f_{n-1}(0)) \\ &= \bar{f}_1(\lim_{n\to\infty} f_{n-1}(0)) = \bar{f}_1(\rho) \\ &= f(\rho)^{n_0} = \rho^{n_0}. \end{aligned}$$

定理 2.4 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是分枝链, $X_0 \equiv n_0$, $f(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ 是其本原矩母函数, $\mu = f'(1) \geqslant 1$, $p_0 + p_1 < 1$, $\sigma^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 > 0$. 令

$$M_n = \boldsymbol{E}(X_n | X_n > 0), \quad \zeta_n = \frac{X_n}{\boldsymbol{E}(X_n)}, \ \eta_n = \frac{X_n}{M_n},$$

则

(1) $$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n \leqslant x | \eta_n > 0)$$

$$= \begin{cases} G_1(x), & \text{当 } \mu = 1, \ f''(1) \neq 0, \ f'''(1) \text{ 有限}, \\ G(x), & \text{当 } \mu > 1, \ \sigma^2 > 0, \end{cases}$$

其中 $G_1(x)$ 是强度为 1 的负指数分布，$G(x)$ 是连续型分布函数，其特征函数 $\varphi(t)$ 满足

$$\begin{cases} f((1-\rho)\varphi(t)+\rho) = (1-\rho)\varphi(\mu t)+\rho, \\ \varphi'(0) = i, \end{cases} \tag{2.19}$$

其中 ρ 如定理 2.3 中所定义；

(2) $$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta, \ [\mathrm{P.}] \ (\text{当 } \mu > 1), \tag{2.20}$$

其中 ζ 的分布函数 $H(x)$ 在 0 有跃度 ρ，在其他地方均连续；

(3) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - \mu X_{n-1}}{\sigma\sqrt{X_{n-1}}} < x\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{2.21}$$

证 参见[30] p.20 ~ 21. 我们这里的 μ, ρ, X_n 分别是那里的 a, λ, ξ_n.

这条定理部分地解决了分枝链的极限分布的问题. 而定理 2.3 解决了分枝链的绝灭问题. 定理 2.1 解决了分枝链的爆炸问题，因此在定理 2.1(3) 中有 $\mu_n \triangleq \boldsymbol{E}(X_n) = n_0\mu^n \to \infty$ (当 $\mu > 1$ 时).

本节到此为止，都是讨论离散时间的分枝链. 其实在实际问题中，所谓“一个单位时间”，只不过是为了简化问题而说的. 在大多数场合，时间必须考虑是连续的. 因此，我们有必要引进连续时间的分枝过程. 在(2.4) 中，我们已经看到了分枝链作为一类特殊的

马尔可夫链的概率特征.因此,我们就把(2.4)“连续化”作为分枝过程的定义.

定义 2.3 称时齐的可数状态的马尔可夫过程 $X=\{X(t): t\in[0,\infty)\}$ 是**分枝过程**,如果 X 的转移矩阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 满足:

$$\begin{cases} p_{i,j}(t)=\sum\limits_{\sum\limits_{s=1}^{i} j_s=j}\prod\limits_{s=1}^{i} p_{1,j_s}(t) & (t\geqslant 0,\ i>0,\ j\geqslant 0), \\ p_{0,j}=\delta_{0,j} & (\delta_{i,j}\text{ 之定义如前}). \end{cases} \tag{2.22}$$

撇开概率空间及随机过程,纯分析地说,任意一个满足(2.22)的(准)转移矩阵 $P(t)$ 都称为分枝(准)转移矩阵.

命题 2.1 设 $P(t)$ 是任何一个标准的分枝准转移矩阵,$P'(0)=Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$,则

$$q_{i,j}=\begin{cases} 0, & \text{当 } j<i-1, \\ iq_{1,j-i+1}, & \text{当 } j\geqslant i-1, \end{cases} \tag{2.23}$$

此处 $q_i=-q_{i,i}$ 可以为 ∞.

证 由(2.22)式立即可推出(2.23)成立.

定义 2.4 设 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$是一个转强阵(自然要求 $q_i=-q_{i,i}<\infty,\ \forall i\geqslant 0$),如果它满足(2.23),则称 Q 是一个**分枝转强阵**.

由命题 2.1 看出:对任何分枝准转移矩阵 $P(t)$ 来说,只要 $p'_{i,i}(0)>-\infty\ (\forall i\geqslant 0)$,则 $Q\triangleq P'(0)$ 是一个分枝转强阵.

定理 2.5 对任何分枝转强阵 Q 来说,有

(1) $l^+=0$;

(2) 若令 $f(s)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} q_{1,j}s^j\ (|s|\leqslant 1)$,则

(a) 当 $f(s)$ 是 M 阶多项式时,$m^+=0$,

(b) 当 Q 保守时,$m^+ = 0$ 的充要条件是:$\forall \varepsilon > 0$,积分 $\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ 发散,

(c) 当 Q 非保守时,$m^+ = 0$.

此处 l^+ 和 m^+ 的定义参见第八章定义 3.3.

证明请参见[29]第二编定理 6.1 和 6.2.

定理 2.6 任给一个分枝转强阵 $Q = (q_{i,j},\ i,j \geqslant 0)$,令 $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j}s^j$,则

(1) 任何一个分枝 Q 过程 $P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \geqslant 0)$ 的母函数 $F(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t)x^j \quad (|x| \leqslant 1)$ 必满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = f(F(t,x)), \\ F(0,x) = x \end{cases} \quad (|x| \leqslant 1,\ t \geqslant 0) \quad (2.24)$$

(从而最多只有一个分枝 Q 过程);

(2) (2.24)的解 $F(t,x)$ 是分枝 Q 过程 $P(t)$ 的母函数的充要条件是

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,x)\right)_{x=0} \geqslant 0, \quad F(t,1) \leqslant 1$$
$$(t \geqslant 0,\ k = 0,1,2,\cdots); \quad (2.25)$$

(3) 对任一分枝转强阵 Q,存在唯一一个分枝 Q 过程,它就是最小 Q 过程.

证明请参见[29]第二编定理 6.3.

作为这一节的结束,我们再介绍一个连续时间的分枝过程 $X = \{X(t): t \in [0,\infty)\}$ 的极限定理,它类似于定理 2.2 中离散时间的分枝链的情形,只不过当时的条件是加在分枝链 $\{X_n: n = 0,1,2,\cdots\}$ 的本原矩母函数 $f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m s^m$ 上,而今对连续时间

的分枝过程 $X=\{X(t):t\in[0,\infty)\}$,条件是加在分枝转强阵 Q 上而已.

定理 2.7　设 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$ 是一个分枝转强阵, $f(s)=\sum_{j=0}^{\infty}q_{1,j}s^j$ 为其矩母函数, $P(t)$ 是一个分枝 Q 过程.

(1)　若 $f(s)\equiv 0(\forall\ |s|\leqslant 1)$,则 $P(t)\equiv I$ 是单位矩阵,更有 $\lim_{t\to\infty}P(t)=I$;

(2)　若 $f(s)\not\equiv 0\ (|s|\leqslant 1)$,从而 $q_{1,1}<0$,则

$$\Pi=\lim_{t\to\infty}P(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ \rho & 0 & 0 & \cdots\\ \rho^2 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

其中 ρ 是 $f(x)=0$ 的最靠近0的那一个非负根,而且 $f'(1)>0$ 时 $\rho<1$. 特别地,当 $f(1)=0$ 时,即 Q 保守,则 $\rho=1$ 的充要条件是

$$f'(1)\triangleq\sum_{j=1}^{\infty}jq_{1,j}\leqslant 0.$$

证明请参见[29]第二编定理6.4.

§3　生灭过程与随机服务

在这一节中,我们主要讲述并研究随机服务系统中的一些基本概念及其有关问题,以此作为背景,再引进一类应用面很广的随机过程 —— 生灭过程. 当然,在随机服务系统中,应用到的随机过程理论,不仅是生灭过程、更新过程,一般马尔可夫过程也常用到. 另一方面,生灭过程的应用,也不只是用在随机服务系统中. 随机服务系统中的理论问题,最早是从"排队论"中提出来的. 经过后来的发展,远远超越了"排队论"的范畴. 但是为了尊重历史,也是为了语言通俗,我们在这一节中经常用"排队论"来代表随机服务

系统中的理论问题. 一些名词、术语也借用排队论中的名词与术语,其实它们都可以抽象为更广泛的问题.

排队论主要研究各类排队现象以便合理解决"顾客"与"服务机构"的供求矛盾,这里顾客与服务机构都是抽象的,视具体问题的不同而有不同的含义. 例如人们到售票站去购票,"人"就是顾客,"售票窗口"就是服务机构;再如飞机要求在机场降落,"飞机"就是顾客,而"跑道"就是服务机构;又如人们打电话,"电话呼叫"就是顾客,而"电话交换台"就是服务机构. 尽管顾客、服务机构、排队现象形形色色,但从理论上来概括,要构成一个完整的"服务系统",都必须具备下列三个组成部分:

(1) 输入过程. 是指来到服务机构请求为之服务的顾客到来的规律.

(2) 服务规则. 是指各种类型的"顾客"来到服务机构时,按什么原则什么次序接受服务.

(3) 服务机构. 是指服务机构内部的设备、能力、服务速度等等.

下面我们逐个来简单介绍一下这三个组成部分.

(1) 输入过程

一般而言,有下列几种输入. 令 X_t 是$[0,t)$ 内来到服务机构请求服务的顾客数,τ_n 是第 n 个顾客到来的时刻,$\tau_1 = T_1,\cdots$, $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} T_k\ (n \geqslant 1)$.

(a) 定长输入. 即是存在一个常数 α,使 $P(T_n = \alpha) = 1\ (n \geqslant 1)$,即相邻到来的两个顾客的间隔恒为 α,亦即

$$A(t) \equiv P(T_n \leqslant t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leqslant \alpha, \\ 1, & \text{当 } t > \alpha. \end{cases} \tag{3.1}$$

(b) 泊松输入. 即是$\{X_t : t \in [0,\infty)\}$是一个 Poisson 过程(强度为 λ). 可以证明(参见定理 3.1):$\{X_t\}$是强度为 λ 的 Poisson 过

程的充要条件是$\{X_t\}$是一个更新过程,其更新间距$\{T_n: n = 1, 2, \cdots\}$是一串相互独立且具有共同的负指数分布:

$$P(T_n < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 当\ t > 0, \\ 0, & 当\ t \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

(c) Erlang 输入. 即是$\{T_n: n = 0, 1, \cdots\}$是一串相互独立、具有公共分布函数的随机变量,其密度函数为

$$a(t) = \begin{cases} 0, & 当\ t \leqslant 0, \\ \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-t\lambda}, & 当\ t > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

($\lambda > 0$, k 是一个正整数),亦即 T_n 服从参数为(k, λ)的 Γ 分布.

注意:当 $k = 1$, Erlang 输入即为 Poisson 输入.

(d) 一般输入. 即是$\{T_n: n = 0, 1, 2, \cdots\}$是一串相互独立、相同分布的随机变量.

(a),(b),(c) 都是(d) 的特例.

(2) 服务规则

一般而言,有三大类.

(a) 损失制. 即是顾客到达时,如果服务机构内的所有服务设施都被占,该顾客就自动离去,不再排队等候. 例如我国通用的电话系统就是采取损失制的服务规则. 一次电话呼叫(来到一个顾客),当所有的电话线被占用时,只此呼叫就消失.

(b) 等待制. 顾客到达时,若服务机构内的所有服务设施都被占,此顾客就加入等待服务的排队行列. 这种服务规则中,如果细分,还有先到先服务、优先权服务、随机服务等等方式.

(c) 混合制. 即兼有消失制与等待制两种含义. 例如规定:等待服务的顾客不超过 N (确定的一个正整数) 时,新来的顾客就加入排队行列,若队长超过 N,新来的顾客就离去. 再如:顾客在队伍中等待的时间不超过 T,若超过 T 就离去.

(3) 服务机构. 主要是指服务设施的数目(例如机场有 N 条跑

道,电话交换台有 M 条线路,某火车站有 k 个售票窗口,等等.)及每一个服务设施的服务速度.关于每一个服务设施的服务速度,大致上又有下列几种(令 V 是每个顾客的服务时间):

(a) 定长分布.即是 $P(V=\beta)=1$,亦即

$$B(t)\equiv P(V<t)=\begin{cases}0, & 当\ t\leqslant\beta,\\ 1, & 当\ t>\beta.\end{cases}\tag{3.4}$$

(b) 负指数分布.即各顾客的服务时间相互独立且具有相同的负指数分布:

$$B(t)\equiv P(V\leqslant t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t}, & 当\ t\geqslant 0,\\ 0, & 当\ t<0,\end{cases}\tag{3.5}$$

其中 μ 是一正数.平均服务时间为

$$\boldsymbol{E}(V)=\int_0^{\infty}x\mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}.\tag{3.6}$$

(c) Erlang 分布.即各顾客的服务时间相互独立、具有相同的 Erlang 分布,其密度函数为

$$b(t)=\begin{cases}\dfrac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu kt}, & 当\ t>0,\\ 0, & 当\ t\leqslant 0,\end{cases}\tag{3.7}$$

其中 $\mu>0$, k 为正整数.

(d) 一般分布.即各顾客的服务时间相互独立、具有相同的分布函数.

在服务系统中,几种重要的数量指标为:

(1) 等待时间.即从顾客到达服务机构至他开始被服务这段时间.从顾客的立场出发,当然等待时间愈短愈好.但是等待时间愈短,势必要求服务机构的服务设施多、速度快.如何调整这一矛盾,以使顾客与服务机构双方都满意,这正是排队论要解决的矛盾之一.

(2) 队长.即是在等待服务的顾客数.这也是顾客与服务机构

双方都关心的问题.就服务机构而言,正确估计出队长,对设计等待空间(如候机室、停车场、仓库、码头等等)的大小、服务效率的快慢,都有很大关系.等待空间设计过大,则造成设施闲置浪费,等待空间过小,则容纳不了等待服务的顾客.服务效率太低,服务系统前经常出现长队,则引起顾客厌烦而离去,或下次不再来.服务效率太高,势必增加服务设施.(当然,加强科学管理,在不增加设施的情况下,也可以提高服务效率,但我们在这里假设科学管理已达到较理想的程度,而从数学的角度去研究服务设施的数量与服务效率高低的关系.)就顾客而言,当然希望队伍不太长为好,这样等候服务的时间会少一些.

(3) 忙期.即服务机构连续繁忙的时间.这直接关系到服务机构中的服务人员,服务设施的工作强度.也涉及到顾客的利益,例如呼叫一次电话,总希望不至发生所有可使用的线路处于忙期.因为所有可使用的线路都处于忙期,电话就打不通了.

下面我们首先研究输入过程.

定理 3.1　输入过程$\{X_t: t\in[0,\infty)\}$是强度为λ的Poisson过程的充要条件是:$\{X_t: t\in[0,\infty)\}$是更新过程,其更新间距$\{T_n: n=1,2,\cdots\}$是相互独立服从共同分布的随机变量序列,且其公共分布为以λ为参数的负指数分布:

$$P(T_n\leqslant t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & \text{当 } t>0,\\ 0, & \text{当 } t\leqslant 0.\end{cases}\tag{3.8}$$

证　必要性.设$\{X_t: t\in[0,\infty)\}$是一个强度为λ的Poisson输入过程,τ_n是第n个顾客到达的时刻,$T_n=\tau_n-\tau_{n-1}$ $(n\geqslant 1,\ \tau_0\equiv 0)$, $\{X_t=n\}=\{\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}\}$, $\{X_t\geqslant n\}=\{\tau_n<t\}$ $(t\in[0,\infty),\ n=0,1,2,\cdots)$.记$X_t=X(t)$.推证$T_1,T_2,\cdots,T_k$相互独立,且每个$T_i$具有形如(3.8)的负指数分布.为使符号简单起见,只证$k=2$的场合.

任取 $t_1 > 0$, $t_2 > 0$. 把 $[0, t_1)$ n 等分,令

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) - X\left(\frac{jt_1}{n}\right) \leqslant 1 \right\},$$

$$B_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) - X\left(\frac{jt_1}{n}\right) > 1 \right\},$$

则 A_n 与 B_n 互为补集,且

$$A_n \cap \{X(t_1) \geqslant 1\} \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 0,\ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) = 1 \right\},$$

所以由 $\left\{ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) = 1 \right\} \subset \left\{ \tau_1 < \frac{(j+1)t_1}{n} \right\}$ 可得

$$\begin{aligned}
& A_n \cap \{X(t_1) \geqslant 1\} \cap \{T_2 < t_2\} \\
& \quad \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 0,\ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) = 1, \right. \\
& \qquad \left. \tau_1 < \frac{(j+1)t_1}{n},\ T_2 < t_2 \right\} \\
& \quad = \bigcup_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 0,\ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) = 1, \right. \\
& \qquad \left. X\left(t_2 + \frac{(j+1)t_1}{n}\right) \geqslant 2 \right\} \\
& \quad = \bigcup_{j=0}^{n-1} \left\{ X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 0,\ X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) - X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 1, \right. \\
& \qquad \left. X\left(t_2 + \frac{(j+1)t_1}{n}\right) - X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) \geqslant 1 \right\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

故由 $\{X(t): t \in [0, \infty)\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程可得

$$\begin{aligned}
& P(T_1 < t_1, T_2 < t_2) \\
& \quad = P(X(t_1) \geqslant 1, T_2 < t_2) \\
& \quad \leqslant P(A_n, X(t_1) \geqslant 1, T_2 < t_2) + P(B_n) \\
& \quad \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} P\left(X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 0, X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right) - X\left(\frac{jt_1}{n}\right) = 1, \right.
\end{aligned}$$

$$X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}+t_2\right)-X\left(\frac{(j+1)t_1}{n}\right)\geqslant 1\Big)+P(B_n)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda jt_1/n}\cdot\frac{\lambda t_1}{n}\mathrm{e}^{-\lambda t_1/n}\cdot(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2})+P(B_n)$$

$$=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2})+o(1)\quad(n\to\infty).\tag{3.10}$$

在(3.10)中令 $n\to\infty$ 得

$$P(T_1<t_1,T_2<t_2)\leqslant(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2}).\tag{3.11}$$

下面证明(3.11)的反向不等式.仿(3.10)有

$$P(T_1<t_1,T_2<t_2)$$

$$\geqslant\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda jt_1}{n}}\cdot\frac{\lambda t_1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda t_1}{n}}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\left(t_2-\frac{t_1}{n}\right)}\right).$$

在上式中令 $n\to\infty$ 得

$$P(T_1<t_1,T_2<t_2)\leqslant(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2}).\tag{3.12}$$

由(3.11),(3.12)得

$$P(T_1<t_1,T_2<t_2)=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2})\quad(t_1>0,\ t_2>0).\tag{3.13}$$

在(3.13)中令 $t_2\uparrow\infty$ 得

$$P(T_1<t_1)=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})\quad(t_1>0).\tag{3.14}$$

在(3.13)中令 $t_1\uparrow\infty$ 得

$$P(T_2<t_2)=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2})\quad(t_2>0).\tag{3.15}$$

由(3.13),(3.14),(3.15)得

$$P(T_1<t_1,T_2<t_2)$$

$$=P(T_1<t_1)P(T_2<t_2)$$

$$=(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_2})\quad(t_1>0,\ t_2>0).\tag{3.16}$$

而当 t_1,t_2 中有一个为0时,(3.16)显然成立.而当 $t\leqslant 0$ 时,总有 $P(T_n<t)=0$.总之,T_1 与 T_2 相互独立,且 T_n 服从强度为 λ 的

负指数分布.必要性得证.

充分性.设$\{T_n:n\geqslant 1\}$独立同分布且其公共分布为强度为λ的负指数分布.则$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$服从参数为(n,λ)的Γ分布,即τ_n的密度函数为

$$a_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, & \text{当 } t>0,\\ 0, & \text{当 } t\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.17}$$

推证$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$是一个强度为λ的Poisson过程.为此,只需证明:对任何正整数,任何非负实数$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$及任何非负整数$i_1,\cdots,i_n$,总有下列等式:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X(t_k)-X(t_{k-1})=i_k\}\right)=\prod_{k=1}^{n}e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})}\cdot\frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{i_k}}{i_k!}. \tag{3.18}$$

因为由(3.18)及$\{X(t):t\in[0,\infty)\}$的定义可容易验证它是强度为λ的Poisson过程.至于(3.18)的证明可以对n作归纳法并区分$i_1,\cdots,i_n$的各种取值情况来证明.

定义3.1 设$X=\{X_t:t\in[0,\infty)\}$是一个以$E=\{0,1,2,\cdots\}$为状态空间以$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$为转移矩阵的时齐的马尔可夫过程.$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)=P'(0)$是其密度矩阵,如果

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

其中$\lambda_0\geqslant 0$;$\lambda_1,\lambda_2,\cdots>0$;$\mu_1,\mu_2,\cdots>0$(即$q_{0,0}=-\lambda_0$,

$q_0,1 = \lambda_0$, $q_{0,j} = 0$（当 $j \geqslant 2$）. 而当 $i \geqslant 1$ 时，$q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$，$q_{i,i+1} = \lambda_i$，$q_{i,i-1} = \mu_i$，$q_{i,j} = 0$（当 $|i-j|>1$）)，则称 X 是一个**生灭过程**.

撇开概率背景，纯分析地说，任意一个形如(3.19)的矩阵都称为一个生灭转强阵. 显然生灭转强阵是保守的.

下面我们结合随机服务系统来看一个生灭过程的例子.

例 3.1 设有一轮船码头，在$[0,t)$时间区间内来到码头要求装卸货物的轮船数为 X_t，$\{X_t: t \in [0,\infty)\}$ 构成一个以 λ 为强度的 Poisson 过程，再设每条轮船装卸货物的时间 T 服从参数为 μ 的负指数分布，而且各条轮船装卸货物的时间相互独立，且与到来的轮船亦相互独立. 令 η_t 是时刻 t 码头内之轮船数. 则 $\{\eta_t: t \geqslant 0\}$ 是一个生灭过程，其转移密度矩阵 $P'(0)$ 是一个形如(3.19)的生灭转强阵.

证 令 $A_k(t) = \{$在$[0,t)$内共有 k 条轮船离开码头$\}$，$B_k(t) = \{X_t = k\} = \{$在$[0,t)$内共有 k 条轮船到达码头$\}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$. T_i 是第 i 条轮船装卸货物所需的时间$(i = 1,2,\cdots)$. 由于 T 服从负指数分布，所以对任一条轮船，若已知"它在时刻 t_1 到达码头，而且时刻 t_2 尚未离开码头$(t_2 \geqslant t_1)$"，而且在时刻 $t_2 + t$ 仍未离开码头的概率

$$P(T > t_2 - t_1 + t \mid T > t_2 - t_1)$$
$$= \frac{P(T > t_2 - t_1 + t)}{P(T > t_2 - t_1)} = \mathrm{e}^{-\mu t} = P(T > t)$$

不依赖于 t_1 和 t_2. 因此，时刻 0 在码头的任何一条轮船(这里把观察时刻当作时刻起点 0)，在时刻 t 尚未离开码头的概率为

$$P(T > t) = \mathrm{e}^{-\mu t}.$$

所以用独立性假设可知

$$P(A_0(t)B_0(t) \mid \eta_0 = i) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-i\mu t}. \qquad (3.20)$$

显然,由 T 服从负指数分布知

$$\lim_{t\to 0+} P(\bigcup_{r=1}^{i}\{T_r < t\}) = 0 \quad (\forall\, i \geqslant 1). \tag{3.21}$$

而

$$\begin{aligned} p_{i,i}(t) &\triangleq P(\eta_t = i \mid \eta_0 = i) \\ &= \frac{P(\{\eta_0 = i\} \cap (\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cap A_k(t)))}{P(\eta_0 = i)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k(t) A_k(t) \mid \eta_0 = i), \end{aligned} \tag{3.22}$$

但是,由(3.20)知

$$\lim_{t\to 0+} \frac{P(B_0(t)A_0(t) \mid \eta_0 = i) - 1}{t} = -(\lambda + i\mu). \tag{3.23}$$

若令 $v_k(t) = P(X_t = k)$,则

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k(t)A_k(t) \mid \eta_0 = i)}{t} \\ &\leqslant \frac{P(B_1(t)A_1(t) \mid \eta_0 = i)}{t} + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)}{t} \\ &\leqslant \frac{P(X_t = 1, \bigcup_{r=1}^{i+1}\{T_r < t\} \mid \eta_0 = i)}{t} + o(1) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} P(\bigcup_{r=1}^{i+1}\{T_r < t\}) + o(1), \end{aligned} \tag{3.24}$$

由(3.21)~(3.24)得

$$\lim_{t\to 0+} \frac{p_{i,i}(t) - 1}{t} = -(\lambda + i\mu) \quad (i \in E). \tag{3.25}$$

仿(3.22)有

$$p_{i,i+1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k(t)A_{k-1}(t)\mid\eta_0=i)\quad(i\in E).\tag{3.26}$$

仿(3.25)之证明方法有

$$\lim_{t\to0+}\frac{p_{i,i+1}(t)}{t}=\lambda\quad(i\in E).\tag{3.27}$$

当 $i=1,2,\cdots,j=i-1$ 时,仿(3.22)有

$$p_{i,i-1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_{k-1}(t)A_k(t)\mid\eta_0=i).\tag{3.28}$$

仿(3.25)之证明方法,由(3.28)有

$$\lim_{t\to0+}\frac{p_{i,i-1}(t)}{t}=i\mu\quad(i=1,2,\cdots).\tag{3.29}$$

而对任何 $|i-j|>1$,仿(3.25)之证明方法有

$$\lim_{t\to0+}\frac{p_{i,j}(t)}{t}=0\quad(\forall\ |i-j|>1).\tag{3.30}$$

由(3.25),(3.27),(3.29),(3.30)得

$$P'(0)=Q$$
$$=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

显然,$\{\eta_t:t\in[0,\infty)\}$ 是以 $P(t)$ 为转移矩阵、以 Q 为转移密度矩阵、以 E 为状态空间的时齐的马尔可夫过程.

定义 3.2　若 Q 是形如(3.19)的生灭转强阵,当 $\mu_i\equiv0$ $(\forall i\geqslant1)$ 时,则称 Q 是**纯生转强阵**;当 $\lambda_i\equiv0$ $(\forall i\geqslant0)$ 时,则称 Q 是**纯灭转强阵**.如果马尔可夫过程的转移密度矩阵是纯生(纯灭)转强阵时,则称此马尔可夫过程是**纯生(纯灭)过程**.

定理 3.2　设 Q 是一个形如(3.19)的生灭转强阵,则下列陈

述等价:

(1) $\overline{P}(t)$ 是标准的转移矩阵(此处 $\overline{P}(t)$ 是第八章定理3.4中所定义的最小的 Q 过程),从而 Q 过程是唯一的.

(2) 《$(\lambda I - Q)y = 0,\ y \geqslant 0,\ \sup\limits_{i \geqslant 0} y_i < \infty$》只有零解($\lambda$ 为任一大于0之实数).

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_n} = \infty. \tag{3.31}$$

证明参见[29]第二编定理5.1.

这个定理说明:对生灭过程来说,只要其转移密度矩阵 Q 满足(3.31),其 Q 过程是唯一的,所以此生灭过程的概率规律性,完全由 Q 所决定.

系1 若 $Q = (q_{i,j},\ i,j \geqslant 0)$是一个纯生转强阵,即 $q_{i,i} = -\lambda_i,\ q_{i,i+1} = \lambda_i,\ q_{i,j} = 0$(当 $j \neq i,\ j \neq i+1$), $\lambda_0 \geqslant 0,\ \lambda_i > 0$ $(i \geqslant 1)$. 则下列陈述等价:

(1) 最小 Q 过程 $\overline{P}(t)$ 是标准的转移矩阵;

(2) 《$(\lambda I - Q)y = 0,\ y \geqslant 0,\ \sup\limits_{i \geqslant 0} y_i < \infty$》只有零解(其中 λ 为任一正实数);

(3)
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty. \tag{3.32}$$

系2 设 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是满足系1中条件(3.32)的纯生过程,$P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \geqslant 0)$是其转移矩阵,则

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } j < i \\ e^{-\lambda_i t}, & \text{当 } j = i, \\ e^{-\lambda_j t}\displaystyle\int_0^t e^{\lambda_j s}\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(s)\mathrm{d}s, & \text{当 } j > i. \end{cases}$$

系3 设 X 是系2中的纯生过程,若 $\lambda_i \equiv \lambda > 0\ (\forall i \geqslant 0)$,则 X 必为强度为 λ 的 Poisson 过程,反之亦真.

定理3.3 设 $X = \{X_t : t \in [0,\infty)\}$ 是一个生灭过程,其转

移密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$由(3.19)所给出.$\overline{P}(t)=(\overline{p}_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$是第八章定理 3.4 中所定义的最小 Q 过程,$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$是 X 的转移矩阵,($P(t)$ 和 $\overline{P}(t)$ 并未给出,而 Q 却是已知的)令

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)\quad(i,j\geqslant 0),$$

$$\overline{\pi}_{i,j}=\lim_{t\to\infty}\overline{p}_{i,j}(t)\quad(i,j\geqslant 0).$$

(甲) 设 $\lambda_0>0$,令

$$\rho_0=1,\quad \rho_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\quad(n\geqslant 1).$$

(1) 若$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty$,则 $\overline{\pi}_{i,j}=0\ (\forall\, i,j\geqslant 0)$.

(2) 若$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty$,则

$$\overline{\pi}_{i,j}=\frac{\rho_j}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n}\quad(i\geqslant 0,\ j\geqslant 0).$$

(3) 若$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n}<\infty$,则

$$\overline{\pi}_{i,j}=0\quad(i\geqslant 0,\ j\geqslant 0).$$

(乙) 设 $\lambda_0=0$,令

$$\gamma=1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots,$$

$$y_0^{(0)}=1,\ y_n^{(0)}=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_k}{\lambda_1\cdots\lambda_k}\ (n\geqslant 1).$$

(1) 若 $\gamma=\infty$,则

$$\overline{\pi}_{i,0}=1,\ \overline{\pi}_{i,j}=0\ (i\geqslant 0,\ j\geqslant 1).$$

(2) 若 $\gamma<\infty$,则

$$\bar{\pi}_{i,0} = y_i^{(0)},\ \bar{\pi}_{i,j} = 0\ (i \geqslant 0,\ j \geqslant 1).$$

特别地,若(3.31)成立,则 Q 过程是唯一的,从而 $P(t) = \bar{P}(t)$,所以

$$\pi_{i,j} = \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \lim_{t\to\infty} \bar{p}_{i,j}(t) = \bar{\pi}_{i,j} \quad (i,j \geqslant 0).$$

于是 $\pi_{i,j}$ 亦由定理3.3中诸款而计算出来了.

证明参见[29]第二编定理5.7与定理5.8.

定理3.3告诉我们:只要知道生灭过程的转移密度矩阵 Q(不必知道中间对象 $P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \geqslant 0)$),就可以直接算出

$$\pi_{i,j} = \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t).$$

这在实际问题中是非常有用的.

我们这里只把生灭过程作为随机服务系统的理论基础之一而简单地予以介绍,其实生灭过程的内容非常丰富.有兴趣的读者可参看专著[75]或[29].

现在我们来综合研究服务系统.如前所述,一个完整的服务系统包括三个组成部分:

(1) 输入过程; (2) 服务规则; (3) 服务机构.

对输入过程,我们用 M,D,E_k,GI 分别表示 Poisson 输入、定长输入、参数为(k,λ)的Erlang 输入(即参数为(k,λ)的 Γ 输入)和一般输入.对“服务规则”,都是等待制或损失制,且先到先服务.对于服务机构,主要有两个指标,一是服务设施的数量,二是每台服务设施的服务速度.服务设施的数量用 n(有限个)或 ∞(无穷多个)表示.服务速度用 G 表示各顾客的服务时间是一串相互独立具有公共分布的随机变量,用 M 表示各顾客的服务时间是一串相互独立的具有公共的负指数分布的随机变量,D 表示各顾客的服务时间为定长,E_k 表示各顾客的服务时间是一串相互独立的具有以(k,λ)为参数的 Erlang (或称 Γ) 分布的随机变量.而且我们总设各顾客的服务时间与输入过程相互独立.这样一来,对于一个

服务系统,只要用 4 个指标就可以刻画了.例如 $M/M/n$(等待)表示服务系统的组成如下:输入是 Poisson 输入,服务规则是等待制且先到先服务,服务设施数目是 n,每台设施的服务速度(即每个顾客所需的服务时间)服从负指数分布.再如 $GI/M/n$(损失)表示一般输入,服务规则是先到先服务从而是损失制,服务设施数为 n.每台设施的服务速度服从负指数分布.

(一) $M/M/n$(等待)系统

在这一段中,恒设

(1) 输入过程是以 λ 为强度的 Poisson 过程;

(2) 服务规则是等待制先到先服务,即是顾客到达时,若有服务设施空闲,则该顾客立即被接受服务;若所有的(n 台)服务设施均被占用,则该顾客加入等待队伍,依次等待接受服务;

(3) 服务机构中服务设施的数目为 n,每个顾客的服务时间服从参数为 μ 的负指数分布,从而每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$.

(4) 各顾客的服务时间是相互独立的,且与输入过程也是相互独立的.

令 η_t 表示时刻 t 在该服务机构中正在服务的顾客数与等待服务的顾客数的总和.则仿例 3.1 可证:$\{\eta_t : t \in [0,\infty)\}$ 是一个生灭过程,其密度矩阵 $Q = (q_{i,j},\ i,j \geqslant 0)$ 有如下形式:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_j \equiv \lambda,\ j = 0,1,2,\cdots,$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & \text{当 } j = 1,2,\cdots,n, \\ n\mu, & \text{当 } j = n+1, n+2,\cdots. \end{cases} \tag{3.33}$$

令 $P(t) = (p_{i,j}(t),\ i,j \geqslant 0)$ 是 $\{\eta_t : t \in [0,\infty)\}$ 的转移矩阵,

$\overline{P}(t) = (\overline{p}_{i,j}(t),\ i,j \geqslant 0)$ 由第八章定理 3.4 所定义.

定理 3.4 对于 $M/M/n$(等待)系统而言,若 $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$,则 $\{\eta_t : t \in [0,\infty)\}$ 的转移矩阵 $P(t) = \overline{P}(t)$,且

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \quad (i \geqslant 0,\ j \geqslant 0), \tag{3.34}$$

其中

$$\rho_0 = 1,\ \rho_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} \quad (k \geqslant 1), \tag{3.35}$$

λ_j, μ_j 如(3.33)所定义.

证 由于 $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$,所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_m}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_m}\\
&\quad\geqslant \sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_m}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_m}\\
&\quad= \frac{1}{\lambda}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{n\mu}{\lambda}\right)^{m-k} = \infty.
\end{aligned}$$

因此由定理 3.2 知 $P(t) = \overline{P}(t)$. 又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k = \sum_{k=0}^{n}\rho_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} < \infty,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\rho_k} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_0}\\
&\geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n n!\left(\frac{n\mu}{\lambda}\right)^{k-n}\\
&= \infty,
\end{aligned}$$

所以,由定理 3.3(甲)得知

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \quad (i \geqslant 0,\ j \geqslant 0).$$

定理 3.4 证毕.

现在我们来分析一下定理 3.4.

(1) 条件$\frac{\lambda}{n\mu}<1$的意义. 我们知道 λ 是输入过程——Poisson 过程的强度,它的直观意义是"单位时间内来到的顾客的平均数",而 μ 是服务时间所遵从的负指数分布的参数,它的直观意义是:$\frac{1}{\mu}$ 是每个顾客的"平均服务时间",从而 μ 是一台服务设施"单位时间内服务完的顾客的平均数",而今服务机构内有 n 台服务设施,$\frac{\lambda}{\mu}$ 是"单位时间内来到此服务机构的全体顾客所需之总服务时间的平均数",而今服务机构内共有 n 台服务设施,所以单位时间内总共能提供 n 个单位时间的服务. 因此,当$\frac{\lambda}{n\mu}>1$时,供不应求,势必等待服务的顾客数愈来愈多,对任何 $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$,总有

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) \equiv \lim_{t\to\infty} p(\eta_t = j \mid \eta_0 = i) = 0,$$

服务系统不能达到平衡状态. 而当$\frac{\lambda}{n\mu}<1$时,供过于求,等待服务的顾客数不会愈来愈多,所以

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \quad (i \geqslant 0,\ j \geqslant 0),$$

亦即服务系统能达到平衡. 令 $p_j = \lim_{t\to\infty} P(\eta_t = j)$,则

$$p_j = \lim_{t\to\infty}\sum_{i\geqslant 0} P(\eta_0 = i) p_{i,j}(t) = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \quad (j \geqslant 0),$$

p_j 称服务系统处于平衡状态 j 的概率. 显然

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

其中 ρ_k 由(3.35)所定义,即是

$$\rho_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!}, & \text{当 } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \rho_n \left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}, & \text{当 } k \geqslant n, \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\rho_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho_k} = \frac{\rho_j}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} + \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}} \\ &= \frac{\rho_j}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} + \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{n\mu}}} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j \dfrac{1}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} + \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{n\mu}}}, \text{当 } 0 \leqslant j \leqslant n, \\ \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} + \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{n\mu}}} = p_n \left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n}, \\ \qquad \text{当 } j \geqslant n. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.37}$$

(2) 顾客来到服务机构时,不能即刻接受服务,需要等待的概率 p_w.

因为服务设施共有 n 台,所以一个顾客来到服务机构,不能即刻接受服务的充分必要条件是:服务系统处于的平衡状态 $j \geqslant n$,

所以

$$p_w = \sum_{j=n}^{\infty} p_j. \tag{3.38}$$

(3) 服务机构内的总顾客(包括正在服务的与排队等待服务的)数的均值 N_m.

显然

$$N_m = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j. \tag{3.39}$$

(4) 等待服务的顾客数的均值 $N_m(W)$.

显然

$$N_m(W) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{n+j}. \tag{3.40}$$

定理3.5　对 $M/M/n$(等待)系统而言,设$\frac{\lambda}{n\mu} < 1$,当系统达到平衡状态以后(即 $P(\eta_t = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\eta_0 = i) p_{i,j}(t) \cong \sum_{i=0}^{\infty} P(\eta_0 = i) p_j = p_j$ (当 t 充分大)),令来到服务机构请求服务所需之等待时间为 W,则

$$P(W > t) = p_n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \cdot e^{-(n\mu - \lambda)t} \quad (t \geqslant 0). \tag{3.41}$$

证　令 $P_j(W > t) = P(W > t \mid$ 顾客到达时,服务系统处于平衡状态 $j)$,则

$$P(W > t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j P_j(W > t). \tag{3.42}$$

显然

$$P_j(W > t) = 0 \quad (t > 0,\ j < n). \tag{3.43}$$

将(3.43)代入(3.42)得

$$P(W > t) = \sum_{j=n}^{\infty} p_j P_j(W > t). \tag{3.44}$$

下面我们来计算 $P_j(W > t)$.

当服务系统处于平衡状态 $j\ (j \geqslant n)$ 时,其中 n 个顾客正在接受服务,$j-n$ 个顾客正在排队等待.所以这时新到来的顾客要在服务机构依次服务完 $j-n+1$ 个顾客后,他才能被接受服务.因此若令 $M(t)$ 为时间长度 t 内服务机构服务完的顾客个数,则

$$P_j(W > t) = \sum_{i=0}^{j-n} P(M(t) = i). \tag{3.45}$$

由于各顾客的服务时间相互独立且具有公共的以 μ 为参数的负指数分布,所以在该顾客等待时间内,每台服务设施的输出过程(即服务完而离开服务机构的顾客)是一个以 μ 为强度的 Poisson 过程(定理 3.1 正是这一结论的理论根据),而今该服务机构内共有 n 台设施(当然它们之间的服务是相互独立的),所以此服务机构的总的输出过程是一个以 $n\mu$ 为强度的 Poisson 过程.所以

$$P(M(t) = i) = \mathrm{e}^{-n\mu t}\frac{(n\mu t)^i}{i!}. \tag{3.46}$$

将(3.45),(3.46)和(3.37)代入(3.44)得

$$\begin{aligned}
P(W > t) &= \sum_{j=n}^{\infty} p_j \sum_{i=0}^{j-n} \mathrm{e}^{-n\mu t}\frac{(n\mu t)^i}{i!} \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} p_n \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n} \mathrm{e}^{-n\mu t} \sum_{i=0}^{j-n} \frac{(n\mu t)^i}{i!} \\
&= p_n \mathrm{e}^{-n\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{(n\mu t)^i}{i!} \\
&= p_n \mathrm{e}^{-n\mu t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n\mu t)^i}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k \\
&= p_n \mathrm{e}^{-n\mu t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n\mu t)^i}{i!} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^i \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{n\mu}} \\
&= p_n \mathrm{e}^{-(n\mu-\lambda)t} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{n\mu}},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

其中 p_n 由(3.37)所定义.定理证毕.

系 1 顾客需要等待的概率为

$$p_w = P(W > 0) = p_n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}}. \tag{3.48}$$

这与(3.38)的结论是一致的. 因为由(3.37)有

$$p_j = p_n\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n} \quad (j \geqslant n),$$

所以由(3.38)亦有

$$p_w = \sum_{j=n}^{\infty} p_i = p_n \sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n} = p_n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}}.$$

系 2 顾客到达服务机构后平均等待时间为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(W) &= \int_0^{\infty}\left[t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - P(W > t))\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} t p_n \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \cdot (n\mu - \lambda)\mathrm{e}^{-(n\mu-\lambda)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{p_n}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \cdot \frac{1}{(n\mu - \lambda)} = p_n \cdot \frac{n\mu}{(n\mu - \lambda)^2} \\
&= p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}\,\frac{n\mu}{(n\mu - \lambda)^2}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

定理 3.6 就 $M/M/1$(等待)系统而言,设 $\frac{\lambda}{\mu} < 1$,当系统达到平衡状态以后,在长为 L 的时间区间内(L 相当大).

(1) 忙期(即服务设施正在服务)的总长度及平均个数分别为

$$L_B = \frac{\lambda}{\mu}L, \quad Z(L_B) = L\,\frac{(\mu - \lambda)\lambda}{\mu}. \tag{3.50}$$

(2) 单个忙期的平均长度为

$$L_B(1) = \frac{1}{\mu - \lambda}. \tag{3.51}$$

(3) 单个忙期内所服务的顾客平均数为

$$N(L_B(1)) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}. \tag{3.52}$$

证 对 $M/M/1$(等待)系统而言，正如定理3.4后面，对$\frac{\lambda}{n\mu} < 1$(而令 $n = 1$)的意义的分析那样，$\frac{\lambda}{\mu}$ 是"单位时间内来到此服务机构的全体顾客所需之总服务时间之平均数"，亦即在相当长的时间 L 内，忙期总长度为

$$L_B = \frac{\lambda}{\mu}L.$$

于是，各闲期(从服务机构变成闲置开始到新顾客到来为止这段时间)的总长度为

$$L - L_B = L \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

而在时间 L 内，闲期的平均个数为

$$\frac{L\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda L \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

由于各个忙期与各个闲期在时间轴上是相间的，所以，在时间 L 内，忙期的平均个数亦为

$$Z(L_B) = \lambda L \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = L \cdot \frac{(\mu - \lambda)\lambda}{\mu}.$$

从而单个忙期的平均长度为

$$L_B(1) = \frac{L_B}{Z(L_B)} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

单个忙期内所服务的顾客的平均数为

$$N(L_B(1)) = \frac{L_B(1)}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

(因为在忙期内,每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$)定理证毕.

(二) $M/M/n$(消失)系统

在这一段中,恒设

(1) 输入过程是以 λ 为强度的 Poisson 过程.

(2) 服务规则是消失制,即当顾客到达时,若 n 个服务设施至少有一个空闲,则顾客马上被接受服务;若 n 个服务设施均被占用,则顾客就离开服务机构,或者说此顾客消失了.

(3) 服务机构中服务设施的数目为 n,每个顾客的服务时间服从以 μ 为参数的负指数分布,从而每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$.

(4) 各顾客的服务时间是相互独立的,且与输入过程亦相互独立.

设 η_t 是时刻t 正在被服务的顾客数,则由于现在考虑的是$M/M/n$(消失)系统,所以 η_t 所可能取的值为 $0,1,2,\cdots,n$,共 $n+1$ 个值.

定理3.7 $\{\eta_t:t\in[0,\infty)\}$ 是一个有限状态的(共 $n+1$ 个状态)时齐的马尔可夫过程,若令 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j=0,1,\cdots,n)$ 是其转移矩阵,$Q=P'(0)=(p'_{i,j}(0),\ i,j=0,1,\cdots,n)$ 是其密度矩阵,记 $p'_{i,j}(0)=q_{i,j}$,则

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & -\mu_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i\equiv\lambda\ (0\leqslant i\leqslant n)$, $\mu_j=j\mu\ (1\leqslant j\leqslant n)$. 而且

$$p_i \equiv \lim_{t\to\infty} P(\eta_t = j) = p_0 \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} \quad (j = 1, \cdots, n), \tag{3.53}$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}\right]^{-1}. \tag{3.54}$$

(3.53),(3.54) 通常称为**Erlang公式**.它给出了 $t \to \infty$ 时,系统处于平衡状态 j 的概率,特别地

$$p_n = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\right]\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}\right]^{-1} \tag{3.55}$$

是 n 个服务设施都正在进行服务的概率,亦即顾客到达时遭到拒绝服务而消失的概率,称之为**消失概率**.

由(3.53),(3.54)得知:正在服务机构内被服务的顾客的平均数为

$$N_m = \sum_{j=0}^{n} j p_j = p_0 \sum_{j=0}^{n} j \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}. \tag{3.56}$$

证 仿例3.1知 $\{\eta_t\}$ 是时齐的(有限状态的)马尔可夫过程.又

$$\begin{aligned} P(\eta_{t+\Delta t} = i+1 \mid \eta_t = i) &= P([t,t+\Delta t) \text{ 内恰来一个顾客,且 } i \text{ 个正在服务的顾客尚无一个结束服务}) \\ &\quad + P([t,t+\Delta t) \text{ 内至少来两个顾客,且使 } \eta_{t+\Delta t} = i+1) \\ &\overset{\text{记作}}{=} \mathrm{I}(\Delta t) + \mathrm{II}(\Delta t). \end{aligned} \tag{3.57}$$

根据 Poisson 输入与负指数分布的性质,以及输入过程与各顾客的服务时间相互独立可知:

$$
\begin{aligned}
\text{I}(\Delta t) &= (\lambda \Delta t \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t})(\mathrm{e}^{-\mu \Delta t})^{i} \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

$$
\text{II}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0). \tag{3.59}
$$

将(3.58),(3.59)代入(3.57)得

$$
q_{i,i+1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{I}(\Delta t) + \text{II}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda \quad (n > i \geqslant 0), \tag{3.60}
$$

而

$$
\begin{aligned}
& P(\eta_{t+\Delta t} = i - 1 \mid \eta_t = i) \\
& \quad = P(\text{在}[t, t+\Delta t)\text{内无顾客到来,且 } i \text{ 个顾客中恰有一个服务结束}) \\
& \qquad + P(\text{在}[t, t+\Delta t)\text{内至少来一个顾客,且 } i \text{ 个顾客中至少有一个顾客服务结束}, \eta_{t+\Delta t} = i-1) \\
& \quad \overset{\text{记作}}{=\!=} \text{I}^{*}(\Delta t) + \text{II}^{*}(\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\text{I}^{*}(\Delta t) &= \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t} i (1 - \mathrm{e}^{-\mu \Delta t})(\mathrm{e}^{-\mu \Delta t})^{i-1} \\
&= i\mu \Delta t + o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \text{II}^{*}(\Delta t) &\leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t})(1 - (\mathrm{e}^{-\mu \Delta t})^{i}) \\
&= o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

所以

$$
q_{i,i-1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{I}^{*}(\Delta t) + \text{II}^{*}(\Delta t)}{\Delta t} = i\mu \quad (i \geqslant 1). \tag{3.64}
$$

仿之易证:

$$
\begin{cases}
q_{0,0} = -\lambda, \\
q_{i,i} = -(\lambda + i\mu) \ (n > i \geqslant 1), \ q_{n,n} = -n\mu, \\
q_{i,j} = 0 \quad (|i - j| > 1).
\end{cases} \tag{3.65}
$$

总之 Q 之值如定理 3.7 所断言. 下证(3.53),(3.54).

再用[29]第二编定理 2.2(ⅵ),解线性方程组:

$$\begin{cases}(x_0,x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,n}\\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n,0} & q_{n,1} & \cdots & q_{n,n}\end{pmatrix}=0,\\ x_i\geqslant 0\quad (0\leqslant i\leqslant n),\end{cases}$$

得通解为

$$x_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}x_0=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j x_0\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

所以,由[29]第二编定理2.2(ⅵ)得

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right)^{-1}$$

$(i=0,1,\cdots,n,\ j=0,1,\cdots,n)$,故

$$\begin{aligned}p_j&\equiv\lim_{t\to\infty}P(\eta_t=j)\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{n}P(\eta_0=i)p_{i,j}(t)\\&=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right)^{-1}\quad(0\leqslant j\leqslant n).\end{aligned}$$

定理证毕.

(三) $M/M/\infty$ 系统

在这一段中,恒设

(1) 输入过程是以 λ 为强度的 Poisson 过程.

(2) 服务规则就是先到先服务,注意,由于现在服务设施有无穷多个(理想的),故任一来到的顾客,既不需等待也不消失,因此这是无等待制与消失制的差别.

(3) 服务机构中服务设施有无穷多个,每个顾客的服务时间服从以 μ 为参数的负指数分布,从而每个顾客的平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$.

（4）各顾客的服务时间是相互独立的，且与输入过程亦相互独立.

设 η_t 是时刻 t 正在服务的顾客数.

例 3.1　已证 $\{\eta_t: t \in [0,\infty)\}$ 是一个生灭过程，其密度矩阵由(3.19)所给出，且其中 $\lambda_i \equiv \lambda$，$\mu_i = i\mu$. 由于生灭过程 $\{\eta_t: t \in [0,\infty)\}$ 的转移密度矩阵 $Q = (q_{i,j},\ i,j \geqslant 0)$ 已求出，$\{\eta_t: t \in [0,\infty)\}$ 的其他概率性质化为由 Q 来研究其他相应的性质. 这是纯数学的问题了. 在此我们不准备再深入讨论.

§4　ARMA 模型与 Wold 分解

在本章的第 1 节中，我们简单地介绍了一下更新过程(未必是马尔可夫过程)的应用，在第 2、第 3 节中，分别介绍了分枝过程与生灭过程(它们都是马尔可夫过程的特例)的应用. 在第 4 节中，我们将简单地介绍一点平稳过程的应用，主要想介绍一点有关宽平稳序列的线性模型. 本节恒令 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 为整数集.

定义 4.1　称二阶矩存在的实值随机过程 $\{\varepsilon(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 为**白噪声序列**，如果 $\boldsymbol{E}\varepsilon(t) \equiv 0$，$\boldsymbol{E}(\varepsilon(s)\varepsilon(t)) = \sigma_\varepsilon^2 \delta_{s,t}\ (\forall\, s,t \in \mathbf{Z})$，其中 $\delta_{s,t} = 0$ 或 1 由 $s \neq t$ 或 $s = t$ 而定，σ_ε^2 为正实数.

对于宽平稳序列的线性模型，拟介绍以下三类实用上较有价值的线性模型：

（1）　AR(p) 模型 (Autoregressive model of order p)；

（2）　MA(q) 模型 (Moving average model of order q)；

（3）　ARMA(p,q) 模型 (Autoregressive-moving average model of order (p,q)).

定义 4.2　设 $\{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是零均值的实值宽平稳序列，$\{\varepsilon(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是白噪声序列，$\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_p\}$ 和 $\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q\}$ 为二列实数且 $\theta_0 = \varphi_0 = 1$，$\varphi_p \neq 0 \neq \theta_q$. 令 $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{p} \varphi_k z^k$，

$\Theta(z) = \sum_{k=0}^{q} \theta_k z^k$.

(1)　若 $\Phi(z) = 0$ 的 p 个根都在单位圆外面(此所谓平稳性条件),且

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k X(t-k) \equiv \varepsilon(t) \quad (\forall t \in \mathbf{Z}), \tag{4.1}$$

则称 $\{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是 **p 阶平稳自回归序列**(简称它是 AR(p) 序列),或称(4.1) 是 **p 阶平稳自回归模型**(简称之为 AR(p) 模型).

(2)　若 $\Theta(z) = 0$ 的 q 个根都在单位圆外面(此所谓可逆性条件),且

$$X(t) = \sum_{k=0}^{q} \theta_k \varepsilon(t-k) \quad (\forall t \in \mathbf{Z}), \tag{4.2}$$

则称 $\{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是 **q 阶可逆滑动平均序列**(简称它是 MA(q) 序列),或称(4.2) 是 **q 阶可逆滑动平均模型**(简称之为 MA(q) 模型).

(3)　若 $\Phi(z) = 0$ 的 p 个根和 $\Theta(z) = 0$ 的 q 个根都在单位圆外面,而且

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k X(t-k) = \sum_{k=0}^{q} \theta_k \varepsilon(t-k) \quad (\forall t \in \mathbf{Z}), \tag{4.3}$$

则称 $\{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是 **p 阶平稳自回归 q 阶可逆滑动平均序列**(简称它是 ARMA(p,q) 序列),或称(4.3) 是 **p 阶平稳自回归 q 阶可逆滑动平均模型**(简称之为 ARMA(p,q) 模型).

若用信号传输的语言来直观地描述上面诸模型,则有下面的解释.

(1)　$X = \{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是AR(p)序列,亦即该信号系统在时刻 t(现在)的信号 $X(t)$ 等于时刻 t 以前 p 个时刻的信号经线性滤波后的和 $\sum_{k=1}^{p} -\varphi_k X(t-k)$ 加时刻 t 的白噪声 $\varepsilon(t)$,其数学表达式即为(4.1).

从(4.1) 我们看出:在 AR(p) 模型中,白噪声 $\varepsilon(t)$ 对 t 以后

的每一时刻 $s+t$ 的信号 $X(t+s)$ $(s\geqslant 0)$ 都产生影响.

(2) $X=\{X(t):t\in\mathbf{Z}\}$ 是 MA(q) 序列,意即该信号系统在时刻 t(现在) 的信号 $X(t)$ 等于时刻 t 的白噪声 $\varepsilon(t)$ 加 t 以前 q 个时刻的白噪声经线性滤波后的和 $\sum_{k=1}^{q}\theta_k\varepsilon(t-k)$,其数学表达式即为(4.2).

从(4.2)我们看出:在 MA(q) 模型中,白噪声 $\varepsilon(t)$ 仅对 $X(t)$ 及 t 以后的 q 个 X 的将来值 $X(t+1),\cdots,X(t+q)$ 产生影响,$\varepsilon(t)$ 对 $X(t+s)$ (当 $s>q$ 时) 并无影响. 这是 AR(p) 模型与 MA(q) 模型的重要区别之一.

(3) 从 ARMA(p,q) 的定义看出:

$$\mathrm{AR}(p)=\mathrm{ARMA}(p,0),\quad \mathrm{MA}(q)=\mathrm{ARMA}(0,q).$$

所以 AR(p) 和 MA(q) 都是 ARMA(p,q) 的特例. ARMA(p,q) 模型,较之 AR(p) 模型和 MA(q) 模型更一般一些. 但在实际问题,有时需要 ARMA(p,q) 模型来描述.

定理 4.1(Wold 分解) 设 $X=\{X(t):t\in\mathbf{Z}\}$ 是 ARMA(p, q) 序列, $\{\varepsilon(t):t\in\mathbf{Z}\}$, $\Phi(z)=\sum_{k=0}^{p}\varphi_kX(t-k)$, $\Theta(z)=\sum_{k=0}^{q}\theta_k\varepsilon(t-k)$ 如定义 4.2 中所定义,则有

$$(1)\qquad X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varepsilon(t-k)\quad(\forall\, t\in\mathbf{Z}),\tag{4.4}$$

其中 $\{C_k:k=0,1,\cdots\}$ 是 $\Theta(z)/\Phi(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上的 Taylor 展式中之系数,且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}|C_k|<\infty,\tag{4.5}$$

(其实还存在 $\lambda,\mu>0$ 使

$$|C_k|<\lambda e^{-k\mu}\quad(k=0,1,\cdots),\tag{4.6}$$

) 称(4.4)和(4.5)为 X 的 Wold 分解,称 $\{C_k:k=0,1,\cdots\}$ 为 X 的

Wold 系数. 关于 Wold 系数$\{C_k\}$,还有下述递推公式:

$$C_0 = \theta_0 = 1,$$

$$C_k = \widetilde{\theta_k} - \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{\varphi_{k-j}} \cdot C_j$$

$$= \widetilde{\theta_k} - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\varphi_j} C_{k-j} \quad (k = 1,2,\cdots), \tag{4.7}$$

其中

$$\widetilde{\theta_k} = \begin{cases} \theta_k, & \text{当 } 0 \leqslant k \leqslant q, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\widetilde{\varphi_k} = \begin{cases} \varphi_k, & \text{当 } 0 \leqslant k \leqslant p, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4.9}$$

(2) $$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k X(t-k) \ (\forall\, t \in \mathbf{Z}), \tag{4.10}$$

其中$\{d_k : k = 0,1,\cdots\}$是$\Phi(z)/\Theta(z)$在$|z| \leqslant 1$上的 Taylor 展式的系数,而且满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| < \infty, \tag{4.11}$$

(其实还存在$\lambda', \mu' > 0$,使

$$|d_k| \leqslant \lambda' e^{-k\mu'} \quad (k = 0,1,\cdots). \tag{4.12}$$)

$\{d_k\}$ 亦有下述递推公式:

$$d_0 = \varphi_0 = 1,$$

$$d_k = \widetilde{\varphi_k} - \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{\theta_{k-j}} d_j$$

$$= \widetilde{\varphi_k} - \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\theta_j}\, d_{k-j} \quad (k = 1,2,\cdots), \tag{4.13}$$

其中$\widetilde{\varphi_k}$与$\widetilde{\theta_k}$ 如(4.9)与(4.8)所定义.

(3) $$d_0 = \frac{1}{C_0} = 1,$$

$$d_k = -\sum_{j=1}^{k} C_j d_{k-j}, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{4.14}$$

证明参见[84]第一章定理 8 与定理 9.

我们知道:对零均值的宽平稳序列 $X = \{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 来说,它的许多概率性质,是基于它的相关函数 $B(\tau) \triangleq \boldsymbol{E}(X_{t+\tau}X_t)$ 上的. 而对 ARMA(p,q) 序列而言, $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_p\}$, $\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q\}$ 和 σ_ε^2 却是决定它的概率性质的特征参数. 这些特征参数与相关函数 $B(\tau)$ 有什么关系呢?这就是下面的定理.

定理 4.2 设 $X = \{X(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是以 $B(\tau)$ 为相关函数的 ARMA(p,q) 序列, 则其特征参数 $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_p\}$, $\{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q\}$, σ_ε^2 与 $B(\tau)$ 有下述关系:

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B(t-k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=t}^{q} \theta_k C_{k-t}, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant q, \\ 0, & \text{当 } t > q, \end{cases} \tag{4.15}$$

其中 $\{C_k: k = 0,1,2,\cdots\}$ 是 X 的 Wold 系数.

证 因为 X 是 ARMA(p,q) 序列,所以

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k X(t-k) = \sum_{k=0}^{q} \theta_k \varepsilon(t-k).$$

两边乘以 $X(0)$ 再取期望得

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B(t-k) = \sum_{k=0}^{q} \theta_k \boldsymbol{E}(X(0)\varepsilon(t-k)).$$

而由 ARMA(p,q) 序列满足平稳性条件可得

$$\boldsymbol{E}(X(0)\varepsilon(t-k)) = \begin{cases} C_{k-t}\sigma_\varepsilon^2, & \text{当 } t \leqslant k, \\ 0, & \text{当 } t > k. \end{cases}$$

以此式代入上式即得定理 4.2.

系 1 若 X 是 AR(p) 序列,则

$$\sum_{k=0}^{p} \varphi_k B(t-k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & \text{当 } t = 0, \\ 0, & \text{当 } t \neq 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

系 2 若 X 是 MR(q) 序列,则

$$B(t)=\begin{cases}\sigma_\varepsilon^2\sum_{k=t}^{q}\theta_k\theta_{k-t}, & 当\ 0\leqslant t\leqslant q,\\ 0, & 当\ t>q.\end{cases} \tag{4.17}$$

定义 4.3 称差分方程组(4.16)为 Yule-Walker 方程式.

下面我们再介绍一下 ARMA(p,q) 模型

$$\sum_{k=0}^{p}\varphi_k X(t-k)=\sum_{k=0}^{q}\theta_k\varepsilon(t-k)\quad (t\in\mathbf{Z})$$

中的参数$\{\varphi_0,\cdots,\varphi_p\}$和$\{\theta_0,\cdots,\theta_q\}$的估计问题.估计的依据是$X$的一组大小为$N>p+q$的样本$X(1),X(2),\cdots,X(N)$.(通常$X$的相关函数$B(\tau)$是未知的,如$B(\tau)$已知,则处理更简单一些.)这里只简单介绍最基本的矩估计方法:

(1) 算出 $B(\tau)$ 的矩估计:

$$\widehat{B}(\tau)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\tau}X(i)X(i+\tau),\ \tau=0,1,\cdots,p+q. \tag{4.18}$$

(2) 计算 AR(p) 部分的参数$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$的估计量$(\widehat{\varphi}_0,\widehat{\varphi}_1,\cdots,\widehat{\varphi}_p)$如下:

在(4.15)中以估计量$\widehat{B}(\tau)$代$B(\tau)$取$t>q$那部分得

$$\begin{pmatrix}\widehat{B}(q) & \widehat{B}(q-1) & \cdots & \widehat{B}(q-p+1)\\ \widehat{B}(q+1) & \widehat{B}(q) & \cdots & \widehat{B}(q-p+2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \widehat{B}(q+p-1) & \widehat{B}(q+p-2) & \cdots & \widehat{B}(q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\widehat{\varphi}_1\\ -\widehat{\varphi}_2\\ \vdots\\ -\widehat{\varphi}_p\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\widehat{B}(q+1)\\ \widehat{B}(q+2)\\ \vdots\\ \widehat{B}(q+p)\end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

解(4.19)可算出$\widehat{\varphi}_1,\cdots,\widehat{\varphi}_p$.注意 $\varphi_0=\widehat{\varphi}_0\equiv 1$.

(3) 计算 MA(q) 部分的参数 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_q$ 的估计量 $\hat{\theta}_0 \equiv \theta_0 = 1, \hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_q$. 令

$$Y(t) \triangleq \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon(t-k) \quad (t \in \mathbf{Z}), \qquad (4.20)$$

则由(4.3) 及(4.20) 得

$$Y(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k X(t-k) \quad (t \in \mathbf{Z}). \qquad (4.21)$$

由(4.21) 知 $Y = \{Y(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 的相关函数

$$\begin{aligned} B_Y(\tau) &\triangleq \boldsymbol{E}(Y(t+\tau) \cdot Y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \varphi_k \varphi_j B(\tau + k - j). \end{aligned} \qquad (4.22)$$

取 $B_Y(\tau)$ 的估计量如下:

$$\hat{B}_Y(\tau) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_j \hat{B}(\tau + k - j). \qquad (4.23)$$

但是由(4.20) 知: $Y = \{Y(t): t \in \mathbf{Z}\}$ 是一个 MA(q) 序列,由定理 4.2 系 2 得知 Y 的相关函数$B_Y(\tau)$ 必满足(4.17),解(4.17) 中 $0 \leqslant t \leqslant q$ 那部分(用$\hat{B}_Y(\tau)$ 代 $B(\tau)$),即得迭代公式:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{B}_Y(0)(1 + \hat{\theta}_1^2 + \cdots + \hat{\theta}_q^2)^{-1}, \qquad (4.24)$$

$$\hat{\theta}_k = (\hat{B}_Y(k)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2) - (\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_{k+1} + \cdots + \hat{\theta}_{q-k} \hat{\theta}_q) \quad (1 \leqslant k \leqslant q). \qquad (4.25)$$

$$\hat{\theta}_q = \hat{B}_Y(q)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2, \qquad (4.26)$$

任取一组初值,例如取 $\hat{\theta}(0) = (\hat{\theta}_1(0), \cdots, \hat{\theta}_q(0)) = (0, \cdots, 0)$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(0) = \hat{B}_Y(0)$. 设 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-1)$, $\hat{\theta}(n-1) = (\hat{\theta}_1(n-1), \cdots, \hat{\theta}_q(n-1))$ 已算出,则第 n 次迭代值由公式:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n) = \hat{B}_Y(0)(1 + \hat{\theta}_1^2(n-1) + \cdots + \hat{\theta}_q^2(n-1))^{-1}, \qquad (4.24)'$$

$$\hat{\theta}_k(n)=(\hat{B}_Y(k)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n))-(\hat{\theta}_1(n-1)\hat{\theta}_{k+1}(n-1)+\cdots$$
$$+\hat{\theta}_{q-k}(n-1)\hat{\theta}_q(n-1))\quad(1\leqslant k<q),\quad(4.25)'$$
$$\hat{\theta}_q(n)=\hat{B}_Y(q)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n)\qquad(4.26)'$$

所给出.依次迭代下去,直到第 m 步的$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(m)$,$\hat{\theta}(m)$与$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(m-1)$,$\hat{\theta}(m-1)$相差不大,而且满足MA($q$)模型所要求满足的"可逆性条件":

$$1+\hat{\theta}_1z+\cdots+\hat{\theta}_qz^q=0$$

的 q 个根全在单位圆以外而止.

依此迭代法,我们可把 MA(q) 部分的参数$\{1,\theta_1,\cdots,\theta_q\}$估计出来为$\{1,\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_q\}$.

总之对 ARMA(p,q) 模型的相关参数$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$,$\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_q\}$,$\sigma_\varepsilon^2$,我们都可以得到其矩估计量$\{\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_p\}$,$\{\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_q\}$,$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$.于是对 ARMA($p,q$) 模型(4.3) 得到了如下的拟合模型:

$$\sum_{k=0}^{p}\hat{\varphi}_kX(t-k)=\sum_{k=0}^{q}\hat{\theta}_k\varepsilon(t-k)\quad(t\in\mathbf{Z}).\quad(4.3)'$$

注 AR(p)模型及MA(q)模型都是ARMA(p,q)模型之特例,上面对 ARMA(p,q) 模型的相关参数都估计出来了,对AR(p)模型和 MA(q) 模型的相关参数自然也可以估计出来.

最后我们介绍一点有关 ARMA(p,q) 模型的预报问题.有了(4.4) 式的 Wold 分解及上述的参数估计与(4.3)′ 的拟合模型,我们很容易给出 ARMA(p,q) 模型的预报公式.

问题的提法:设$X=\{X(t):t\in\mathbf{Z}\}$是ARMA($p,q$)序列.我们已知 X 在时刻t 及其以前之值$X(t),X(t-1),\cdots$,如何预报 t 以后 l 步的值$X(t+l)$?

范围:线性预报,即寻求 $X(t),X(t-1),\cdots$ 的线性函数

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X(t-i)$ 来预报 $X(t+l)$.

准则:平方误差最小原则,即寻求 $\hat{a}_i$,用

$$\hat{X}_l(t) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i X(t-i)$$

来预报 $X(t+l)$,使

$$\boldsymbol{E}(|X(t+l)-\hat{X}_l(t)|^2)=\min.$$

解　令

$$\mathscr{L}(t)=\left\{\xi:\xi=\sum_{i=0}^{\infty} a_i X(t-i),\ a_i \text{ 是实数且} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2<\infty\right\},$$

$$\mathfrak{M}(t)=\left\{\xi:\xi=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon(t-i),\ a_i \text{ 是实数且} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2<\infty\right\}.$$

由于 $X=\{X(t):t\in \mathbf{Z}\}$ 是 ARMA(p,q) 序列,由定理 4.1 有

$$X(t)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon(t-i)\ (t\in \mathbf{Z}),\quad \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2<\infty,$$

$$\varepsilon(t)=\sum_{i=0}^{\infty} d_i X(t-i)\ (t\in \mathbf{Z}),\quad \sum_{i=0}^{\infty} d_i^2<\infty,$$

故

$$\mathscr{L}(t)=\mathfrak{M}(t)\quad (\forall t\in \mathbf{Z}),$$

从而 $\{\varepsilon(t),\varepsilon(t-1),\cdots\}$ 是 $\mathscr{L}(t)$ 的一组正交系,但 $\hat{X}_l(t)\in \mathscr{L}(t)$,所以

$$\hat{X}_l(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}_i \varepsilon(t-i).$$

令 $e_l(t)=X(t+l)-\hat{X}_l(t)$ 是预报误差.现在用平方误差最小原则来定 $\hat{b}_i$ 并评估误差 $e_l(t)$.

因为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(|X(t+l)-\hat{X}_l(t)|^2)\\&\quad=\boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varepsilon(t+l-i)-\sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}_i\varepsilon(t-i)\right|^2\right)\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{l-1} c_i \varepsilon(t+l-i) + \sum_{i=0}^{\infty}(c_{l+i} - \hat{b}_i)\varepsilon(t-i)\right|^2\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left[\sum_{i=0}^{l-1} c_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty}(c_{l+i} - \hat{b}_i)^2\right],$$

所以当且仅当 $\hat{b}_i = c_{l+i}(i = 0,1,\cdots)$ 时,有

$$\boldsymbol{E}(|X(t+l) - \hat{X}_l(t)|^2) = \min.$$

总之预报公式如下:

$$\hat{X}_l(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{l+i}\varepsilon(t-i), \tag{4.27}$$

预报误差 $e_l(t)$ 满足:

$$\boldsymbol{E}(e_l(t)) = 0,\ \mathrm{Var}(e_l(t)) = \sigma_\varepsilon^2(1 + c_1^2 + \cdots + c_{l-1}^2). \tag{4.28}$$

(4.27) 中的 Wold 系数 $\{c_k : k = 0,1,2\cdots\}$ 可由定理 4.1 递推公式(4.7),(4.8),(4.9) 来算出.白噪声 $\{\varepsilon(t) : t \in \mathbf{Z}\}$ 可用下述迭代公式:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{p}\varphi_k X(t-k) - \sum_{k=1}^{q}\theta_k\varepsilon(t-k) \quad (t \in \mathbf{Z}) \tag{4.29}$$

而算出.例如取初值 $\varepsilon^{(0)}(t) \equiv 0\ (t \in \mathbf{Z})$,若 $\varepsilon^{(n-1)}(t)\ (t \in \mathbf{Z})$ 已算出,则

$$\varepsilon^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{p}\varphi_k X(t-k) - \sum_{k=1}^{q}\theta_k\varepsilon^{(n-1)}(t-k).$$

注 1 从(4.27)看出 t 以后 l 步的估计值 $\hat{X}_l(t)$ 依赖于 t 及 t 以前的 $\varepsilon(t),\varepsilon(t-1),\cdots$,而这又依赖于 $X(t),X(t-1),\cdots$ 及 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$ 和 $\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_q\}$ 之值. 当 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$, $\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_q\}$ 事先并不知道时,那就还需要对它们做参数估计.方法在前一段中已经介绍过了.

注 2 在实际问题中,知道的信息总是有限的,即只能知道 X 的有限个观察值 $X(t),X(t-1),\cdots,X(t-m)$.因此,预报公式

(4.27) 只能用有限和来近似.

下面给出 ARMA(p,q) 序列的两个特例 AR(P) 序列与 MA(q) 序列的预报公式.

(1) 若 $X=\{X(t):t\in\mathbf{Z}\}$ 是 AR(p) 序列,

$$\sum_{k=0}^{p}\varphi_k X(t-k)=\varepsilon(t)\quad(t\in\mathbf{Z}),$$

则有预报公式:

$$\widehat{X}_l(t)=\sum_{j=0}^{p-1}B_j^{(l)}X(t-j),\tag{4.30}$$

其中 $B_j^{(l)}=\sum_{k=0}^{j}\varphi_k c_{l+j-k}(j=0,1,\cdots,p-1)$, $\{c_k:k=0,1,\cdots\}$ 是 Wold 系数.

(2) 若 $X=\{X(t):t\in\mathbf{Z}\}$ 是 MA(q) 序列,

$$X(t)=\sum_{k=0}^{q}\theta_k\varepsilon(t-k)\quad(t\in\mathbf{Z}),$$

则有预报公式:

$$\widehat{X}_l(t)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{\infty}d_j^{(l)}X(t+1-j), & 当\ 1\leqslant l\leqslant q,\\ 0, & 当\ l>q,\end{cases}\tag{4.31}$$

其中

$$d_j^{(l)}=-\sum_{i=1}^{l-1}d_i d_j^{(l-i)}-d_{j+l-1},\quad l>1,$$
$$d_j^{(1)}=-d_j\quad(j=0,1,\cdots),$$

$\{d_j:j=0,1,\cdots\}$ 由定理 4.1 中的递推公式可得.

§5 鞅的应用

在这一节中,我们将要研究鞅在古典分析以及在概率论其他分支中的应用.

定理 5.1(条件期望的连续性) 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\{\mathscr{F}_n : n \geqslant 0\}$是$\mathscr{F}$中一族子$\sigma$代数.

(1) 若$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_k) = \boldsymbol{E}(\xi \mid \bigvee_{k\geqslant 0} \mathscr{F}_k),\ [\text{a.e.}],\ [L^1];$$

(2) 若$\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2 \supset \cdots$，则

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_k) = \boldsymbol{E}(\xi \mid \bigcap_{k\geqslant 0} \mathscr{F}_k),\ [\text{a.e.}],\ [L^1].$$

证 (1) 由第九章命题 3.1 及第九章例 1.1 知$\{X = \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是一致可积的鞅，所以由第九章定理 1.6 得知

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_k) = X_\infty,\ [\text{a.e.}],\ [L^1], \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{E}(\mid X_\infty \mid) < \infty.$$

因此，由$\boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_{n+k}) = X_{n+k}$及(5.1)式得

$$\int_{A_n} \xi \mathrm{d}P = \lim_{k\to 0} \int_{A_n} X_{n+k} \mathrm{d}P = \int_{A_n} X_\infty \mathrm{d}P \quad (A_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k). \tag{5.2}$$

令$\mathfrak{M} = \left\{ A : A \in \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k = \sigma(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k),\ \int_A \xi \mathrm{d}P = \int_A X_\infty \mathrm{d}P \right\}$，则$\mathfrak{M}$是$d$系，且$\mathfrak{M} \supset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$，$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$是代数(更是$\Pi$系)，所以

$$\mathfrak{M} \supset d(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k) = \sigma(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k) = \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k,$$

即

$$\int_A \xi \mathrm{d}P = \int_A X_\infty \mathrm{d}P \quad (A \in \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k). \tag{5.3}$$

而$X_\infty \in \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$乃属显然，所以$\boldsymbol{E}(\xi \mid \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k) = X_\infty$.(1) 证毕.

(2) 若$\mathscr{F}_n \supset \mathscr{F}_{n+1} (n \geqslant 0)$，则$\{X_n = \boldsymbol{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$为反鞅，且一致可积，所以，由第九章定理 1.6 得知存在X_∞，$\boldsymbol{E}(\mid X_\infty \mid) < \infty$，使

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X_\infty,\ [\text{a,e,}],\ [L^1].$$

显然 $X_\infty \in \bigcap_{k\geq 0}\mathscr{F}_k$. 又对任何 $A\in\bigcap_{k\geq 0}\mathscr{F}_k$,有

$$\int_A X_\infty \mathrm{d}P = \lim_{k\to\infty}\int_A X_k \mathrm{d}P = \lim_{k\to\infty}\int_A \boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_k)\mathrm{d}P$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int \xi \mathrm{d}P = \int \xi \mathrm{d}P,$$

所以 $X_\infty = \boldsymbol{E}(\xi|\bigcap_{k\geq 0}\mathscr{F}_k)$. 定理证毕.

定理5.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$\{\mathscr{F}_n: n\geq 0\}$为$\mathscr{F}$中一族单调非降子 σ 代数,$\mathscr{F}=\bigvee_{n\geq 0}\mathscr{F}_n$,则

(1) $\bigcup_{n=0}^{\infty}L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$ 在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中稠,即是对任何 $\xi\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,存在 $\xi_k\in\bigcup_{n=0}^{\infty}L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$ $(k\geq 0)$,使

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k = \xi,\ [L^1].$$

(2) 对任何 $\xi\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,存在 $\xi_k\in\bigcup_{n=0}^{\infty}L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$ $(k\geq 0)$,使

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k = \xi,\ [\text{a.e.}].$$

证 任取 $\xi\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,令 $\xi_k=\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_k)$ $(k\geq 0)$,则用定理 5.1 得

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_k) = \boldsymbol{E}(\xi|\bigvee_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k) = \xi,\ [L^1],\ [\text{a.e.}].$$

例5.1 设 $\Omega=[0,1)$, $\mathscr{F}=\Omega\cap\mathscr{B}^1$, P 为 $\mathscr{F}$ 上的 Lebesgue 测度. 令

$$\mathfrak{M}_n = \left\{\left[0,\frac{1}{2^n}\right),\left[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}\right),\cdots,\left[\frac{2^n-1}{2^n},1\right)\right\},$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\mathfrak{M}_n),$$

则 $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$ $(n\geq 0)$,且 $\mathscr{F}=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$,

$$L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P) = \left\{\xi^{(n)}_{r_1,\cdots,r_{2^n}}(x) = \sum_{i=1}^{2^n} r_i \mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right)}(x): r_i \text{ 是实数}\right\},$$

所以全体“二进阶梯函数” $\bigcup_{n=0}^{\infty} L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$ 在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中稠，且对任何 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，有 $\xi_k \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$，使

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi, \ [\text{a.e.}].$$

例 5.2 设 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$ $(n\geqslant 0)$ 如例5.1.则在 $[0,1]$ 上的全体连续函数在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中稠，且对任何 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，存在 $[0,1]$ 上的连续函数 ξ_k，使

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi, \ [\text{a.e.}].$$

证 对任何 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，由例5.1，有 $\xi_k^* \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L^1(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$，使

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^* = \xi, \ [\text{a.e.}], \ [L^1].$$

对每个 ξ_k^*，总可取连续函数 ξ_k，使

$$\sup_{x\in\Omega} |\xi_k(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\xi_k^*(x)| \equiv M_k, \tag{5.4}$$

$$P(\xi \neq \xi_k^*) \leqslant \left(\frac{1}{2^n}\right) \wedge \left(\frac{1}{2^k(\sup_{x\in\Omega}|\xi_k^*(x)|+1)}\right), \tag{5.5}$$

则

$$\begin{aligned}
1 &= P(\lim_{k\to\infty} \xi_k^* = \xi) = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{|\xi_n^* - \xi| \leqslant \frac{1}{m}\right\}\right) \\
&\leqslant P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left(\left\{|\xi_n - \xi| \leqslant \frac{1}{m}\right\} \cup \{\xi_n \neq \xi_n^*\}\right)\right) \\
&\leqslant P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \left[\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{\xi_n \neq \xi_n^*\}\right) \cup \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{|\xi_n - \xi| \leqslant \frac{1}{m}\right\}\right]\right) \\
&\leqslant P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{\xi_n \neq \xi_n^*\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{|\xi_n - \xi| \leqslant \frac{1}{m}\right\}\right)\right]\right) \\
&\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} P(\xi_n \neq \xi_n^*) + P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{|\xi_n - \xi \leqslant \frac{1}{m}\right\}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2^{N-1}} + P(\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi) \ (\text{对一切 } N \geqslant 1),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

在上式中令 $N \to \infty$，即得

$$P(\lim_{k\to\infty}\xi_k = \xi) = 1.$$

又由(5.5)式有

$$\begin{aligned}E(|\xi_k - \xi|) &\leqslant \int_{\{\xi_k \neq \xi_k^*\}} (|\xi_k| + |\xi|)\mathrm{d}P + \int_\Omega |\xi_k^* - \xi|\mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{1}{2^k} + \int_{\{\xi_k \neq \xi_k^*\}} |\xi|\mathrm{d}P + \int_\Omega |\xi_k^* - \xi|\mathrm{d}P. \quad (5.7)\end{aligned}$$

但 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$, $\lim\limits_{k\to\infty} P(\xi_k \neq \xi_k^*) = 0$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k^* = \xi$, $[L^1]$,所以在(5.7)式中含 $k\to\infty$,得

$$\lim_{k\to\infty} E(|\xi_k - \xi|) = 0.$$

定理 5.3 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$如例 5.1,任取 $\xi \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi\left(x+\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 \xi(x)\mathrm{d}x, \ [\text{a.e.}], \qquad (5.8)$$

其中 $\xi(x) = \xi(y)$ (当 $x = y \ (\mathrm{mol}\ 1)$).

证 令 $\mathscr{F}_n = \left\{A : A \in \mathscr{F},\ A \text{ 是以}\frac{1}{2^n}\text{为周期的集合}\right\}$,则 $\{\mathscr{F}_n : n \geqslant 0\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一族单调非升子 σ 代数,且

$$E(\xi|\mathscr{F}_n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi\left(x+\frac{k}{2^n}\right). \qquad (5.9)$$

而由定理 5.1 有

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi|\mathscr{F}_n) = E(\xi|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n). \qquad (5.10)$$

因此,为证(5.8)式只需证明

$$E(\xi|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n) = E(\xi) = \int_0^1 \xi(x)\mathrm{d}x. \qquad (5.11)$$

但是,对$[0,1]$上的任何连续函数 η,由(5.9)式有

$$E(\eta|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n) = \lim_{n\to\infty} E(\eta|\mathscr{F}_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\eta\left(x+\frac{k}{2^n}\right)$$

$$= \boldsymbol{E}(\eta) = \int_0^1 \eta(x)\mathrm{d}x. \tag{5.12}$$

而$[0,1]$上的全部连续函数在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上稠，所以，对每个 $n \geqslant 1$，有连续函数 η_n，使

$$\boldsymbol{E}(|\eta_n - \xi|) < \frac{1}{n}. \tag{5.13}$$

因此由(5.12)，(5.13)式得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\Big(\Big|\boldsymbol{E}\Big(\xi\Big|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n\Big) - \boldsymbol{E}(\xi)\Big|\Big) \\
&\quad = \boldsymbol{E}\Big(\Big|\boldsymbol{E}\Big(\xi - \eta_n\Big|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n\Big) - \boldsymbol{E}(\xi - \eta_n)\Big|\Big) \\
&\quad \leqslant \boldsymbol{E}\Big(\Big|\boldsymbol{E}\Big(\xi - \eta_n\Big|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathscr{B}_n\Big)\Big|\Big) + \boldsymbol{E}(|\boldsymbol{E}(\xi - \eta_n)|) \\
&\quad \leqslant 2\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{E}(\xi - \eta_n)|) \\
&\quad \leqslant 2\boldsymbol{E}(|\xi - \eta_n|) < \frac{2}{n} \quad (n \geqslant 1).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

在(5.14)式中令 $n \to \infty$ 得(5.11)式.

定理5.4 设可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$是可分的，即存在$\{A_n : n \geqslant 0\} \subset \mathscr{F}$，$\sigma(\{A_n, n \geqslant 0\}) = \mathscr{F}$. 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(A_0, A_1, \cdots, A_n)$，$\pi_n = \{B_1^{(n)}, \cdots, B_{k_n}^{(n)}\}$，$B_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} = \varnothing$，$\bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^{(n)} = \Omega$，$\pi_n < \pi_{n+1}$(即 π_n 中任一集均可表示为 π_{n+1} 中有限个集合之并)，$\sigma(\pi_n) = \mathscr{F}_n (n \geqslant 0)$，$P$ 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，φ 是 $\mathscr{F}$ 上的有限测度，$\varphi \ll P$ (即 $P(A) = 0 \Longrightarrow \varphi(A) = 0$)，$\xi = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}P}$ 为 φ 对 P 的 Radon-Nikodym 导数. 再令

$$X_n(\omega) = \sum_{A \in \pi_n} \frac{\varphi(A)}{P(A)} \mathbf{1}_A(\omega) \quad (n \geqslant 0,\ \omega \in \Omega), \tag{5.15}$$

约定$\dfrac{0}{0} = 0$，则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为一致可积鞅，且

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \xi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}P}, \ [\text{a.e.}]. \tag{5.16}$$

证　由(5.15)式立即可知 $X_n \in \mathscr{F}_n(n \geqslant 0)$. 由 $\pi_n \subset \pi_{n+m}$ $(n, m \geqslant 0)$,得知任取 $B \in \pi_n$,必有 $B = \bigcup_{i=1}^{\alpha(m,n)} B_i^{(m,n)}$, $B_i^{(m,n)} \in \pi_{n+m}$. 所以

$$\int_B X_n \mathrm{d}P = \varphi(B) = \sum_{i=1}^{\alpha(m,n)} \varphi(B_i^{(m,n)})$$
$$= \sum_{i=1}^{\alpha(m,n)} \int_{B_i^{(m,n)}} X_{m+n} \mathrm{d}P = \int_B X_{m+n} \mathrm{d}P, \qquad (5.17)$$

$\mathscr{F}_n = \sigma(\pi_n)$, $\pi_n = \{B_1^{(n)}, \cdots, B_{k_n}^{(n)}\}$, $B_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} = \varnothing$,所以对任何 $B \in \mathscr{F}_n$, (5.17)式成立. 故 X 是鞅.

又因为对任何 $\lambda > 0$, $\{X_n > \lambda\}$ 总可表示为 π_n 中有限个集合之并,不妨令

$$\{X_n > \lambda\} = \bigcup_{i=1}^{l} C_i, \ C_i \cap C_j = \varnothing(i \neq j), \ C_i \in \pi_n.$$

则有

$$\int_{\{|X_n| > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P = \int_{\{X_n > \lambda\}} X_n \mathrm{d}P = \sum_{i=1}^{l} \int_{c_i} X_n \mathrm{d}P$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \varphi(c_i) = \varphi(X_n > \lambda). \qquad (5.18)$$

但是

$$P(X_n > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{E}(X_n) = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{E}(X_0). \qquad (5.19)$$

又因为 $\varphi \ll P$,所以任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\sigma > 0$,当 $P(X_n > \lambda) < \sigma$ 时,有 $\varphi(X_n > \lambda) < \varepsilon$,所以

$$\text{“}\lambda > \boldsymbol{E}(X_0)/\sigma \Longrightarrow \varphi(X_n > \lambda) \int_{\{|X_n| > \lambda\}} |X_n| \mathrm{d}P > \varepsilon \quad (n \geqslant 0)\text{”}.$$

故 X 是一致可积鞅. 再由定理第九章 1.6,得

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X_\infty, \ [\mathrm{a.e.}], \ [L^1].$$

所以,由(5.17)式得

$$\varphi(B)=\lim_{m\to\infty}\int_B X_{n+m}\mathrm{d}P=\int_B X_\infty\mathrm{d}P \tag{5.20}$$

对一切 $B\in\mathscr{F}_n$ 成立($n\geqslant 0$).而 $\mathscr{F}=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$,所以(5.20)式对一切 $B\in\mathscr{F}$ 亦成立,而

$$\lim_{n\to\infty}X_n=\xi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}P},\ [\text{a.e.}].$$

注:$(\mathbf{R},\mathscr{B}^1)$ 就是一个可分可测空间.

定理5.5 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可分可测空间,$(E,\mathscr{E})$为任一可测空间,$\{P^x:x\in E\}$是$\mathscr{F}$上一族概率测度,$\{\varphi^x:x\in E\}$是$\mathscr{F}$上一族有限测度,且对任何$A\in\mathscr{F}$, $x\mapsto P^x(A)$, $x\mapsto\varphi^x(A)$皆为E上的$\mathscr{E}$可测函数. $\varphi^x\ll P^x(x\in E)$,则存在$E\times\Omega$上的一个$\mathscr{E}\times\mathscr{B}$可测的非负实值函数$X$,使得对一切$x\in E$, $X(x,\cdot)=\dfrac{\mathrm{d}\varphi^x}{\mathrm{d}P^x}$为$\varphi^x$关于$P^x$的Radon-Nikodym导数.

证 沿用定理5.4的符号.令$\mathscr{B}=\sigma\{A_0,A_1,\cdots\}$,

$$X_n(x,\omega)=\sum_{A\in\pi_n}\frac{\varphi^x(A)}{P^x(A)}\mathbf{1}_A(\omega)\quad\left(\frac{0}{0}=0\right),$$

则X_n是$\mathscr{E}\times\mathscr{B}$可测的非负实值函数,且由定理5.4,对每个$x\in E$,

$$\lim_{n\to\infty}X_n(x,\cdot)=\frac{\mathrm{d}\varphi^x}{\mathrm{d}P^x}<\infty,\ [\text{a.e.}]\ (\text{关于 } P^x \text{ 测度}).$$

因此,令

$$X(x,\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}X_n(x,\omega), & \text{若此极限收敛且有穷},\\ 0, & \text{反之},\end{cases}$$

则此$X(\cdot,\cdot)$即为所求.

定义5.1 设$\{X_0,X_1,\cdots\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量序列,$T_n=\sigma(X_{n+1},X_{n+2},\cdots)$ $(n\geqslant 0)$, $T_\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}T_n$称为

$\{X_n\}$ 的尾 σ 代数，T_∞ 中每一集 A 皆称为 $\{X_n\}$ 的尾集合.

定理 5.6(Колмогоров 零一律) 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上一个相互独立随机变量序列，则对 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ 的每一个尾集合 A，均有

$$P(A) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ $(n \geqslant 0)$，则 $\mathscr{F}_n$ 与 T_n 相互独立，且 $T_n \subset \mathscr{F}_\infty \equiv \sigma(X_0, X_1, \cdots)$. 所以对任何 $A \in T_\infty \subset T_n \subset \mathscr{F}_\infty (n \geqslant 0)$，有

$$P(A) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A | \mathscr{F}_n), \tag{5.21}$$

但 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1} (n \geqslant 0)$, $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n = \mathscr{F}_\infty$，所以在(5.21)式中令 $n \to \infty$，并利用定理 5.1，得

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A | \mathscr{F}_n) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A | \mathscr{F}_\infty) = \mathbf{1}_A, \text{ [a.e.]}.$$

因此，$P(A) = 0$ 或 1.

定理 5.7 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$, $\{X_n : n \geqslant 0\}$, $\{T_n : n \geqslant 0\}$ 如定理 5.6，$\{a_0, a_1, \cdots\}$ 为一实数序列，则

$$P\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k \text{ 收敛且有穷}\Big) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证 不妨令 X_k 是实值. 由于

$$\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k \text{ 收敛且有穷}\Big\} = \Big\{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k X_k \text{ 收敛且有穷}\Big\} \in T_n \quad (n \geqslant 0),$$

所以 $\Big\{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X_k \text{ 收敛且有穷}\Big\} \in T_\infty$，因此由定理 5.6 即得定理 5.7.

定理 5.8(强大数定律) 设 $\{X_n : n \geqslant 0\}$, $\{T_n : n \geqslant 0\}$, $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 如前，$T_\infty^{(x)} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T_n$，且 $\{X_n\}$ 具有相同的分布 μ，则

(1) $\boldsymbol{E}(|X_0|) < \infty \Longrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_n) = \boldsymbol{E}(X_0), \text{ [a.e.]};$$

(2) $X_0 \geqslant 0,\ \boldsymbol{E}(X_0) = \infty \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_n) = \infty,\ [\text{a.e.}].$$

证 (1) 不失普遍性,可令 X_n 取实值. $Y_n = \boldsymbol{E}(X_0 \mid S_n)$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k\ (n \geqslant 0)$,推证

$$\boldsymbol{E}(X_k \mid S_n) = Y_n,\ [\text{a.e.}]\quad (n \geqslant k \geqslant 0). \tag{5.22}$$

为此,只需证明

$$\int_{\{S_n \in B\}} X_k \mathrm{d}P = \int_{\{S_n \in B\}} X_0 \mathrm{d}P \quad (B \in \mathscr{B}^1). \tag{5.23}$$

令 $\varphi(X_0, X_1, \cdots, X_n) = X_0 \mathbf{1}_B(S_n)\ (B \in \mathscr{B}^1)$,则

$$\varphi(X_k, X_1, \cdots, X_{k-1}, X_0, X_{k+1}, \cdots, X_n) = X_k \mathbf{1}_B(S_n),$$

所以(5.23)式等价于

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\varphi(X_k, X_1, \cdots, X_{k-1}, X_0, X_{k+1}, \cdots, X_n))\\ &\quad = \boldsymbol{E}(\varphi(X_0, X_1, \cdots, X_n)).\end{aligned} \tag{5.24}$$

而对 $B_i \in \mathscr{B}^1 (i = 0, 1, \cdots, n)$,由 $\{X_n\}$ 独立且具有公共分布 μ,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_n}(X_0, X_1, \cdots, X_n)) &= \prod_{i=0}^{n} \mu(B_i)\\ &= \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_{B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_n}(X_k, X_1, \cdots, X_{k-1}, X_0, X_{k+1}, \cdots, X_n)).\end{aligned}$$

用单调系定理可证

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\psi(X_0, X_1, \cdots, X_n))\\ &\quad = \boldsymbol{E}(\psi(X_k, X_1, \cdots, X_{k-1}, X_0, X_{k+1}, \cdots, X_n))\\ &\qquad\qquad (\psi \in \mathscr{B}^{n+1}).\end{aligned} \tag{5.25}$$

特别地,(5.24),(5.23),(5.22)式更成立. 由(5.22)式得

$$Y_n = \frac{\boldsymbol{E}(S_n \mid S_n)}{n+1} = \frac{S_n}{n+1},\ [\text{a.e.}]. \tag{5.26}$$

而 $\sigma(S_n, S_{n+1}, \cdots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$, $G(S_n) \triangleq \boldsymbol{E}(X_0 \mid S_n)$ 与 $\mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^{k}\{X_{n+i} \in B_i\}}$ 相互独立,所以

$$\int_{\{S_n\in A,X_{n+i}\in B_i,i=1,\cdots,k\}}\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n)\mathrm{d}P$$
$$=\int_{\{S_n\in A\}}\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n)\mathrm{d}P\int_{\{X_{n+i}\in B_i,i=1,\cdots,k\}}\mathrm{d}P$$
$$=\int_{\{S_n\in A\}}X_0\mathrm{d}P\int_{\{X_{n+i}\in B_i,i=1,\cdots,k\}}\mathrm{d}P$$
$$=\int_{\{S_n\in A,X_{n+i}\in B_i,i=1,\cdots,k\}}\mathrm{d}P$$
$$(A,B_i\in\mathscr{B}^1,\ i=1,\cdots,k,\ k\geqslant 1).$$

因此

$$Y_n=\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n)=\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+k},\cdots)$$
$$=\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n,S_{n+1},\cdots).\tag{5.27}$$

若令 $T_\infty^{(s)}$ 为 $\{S_n:n\geqslant 0\}$ 的尾 σ 代数,则由(5.26),(5.27)式及定理5.1,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}Y_n=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}(X_0\mid S_n,S_{n+1},\cdots)$$
$$=\boldsymbol{E}(X_0\mid T_\infty^{(s)}).\tag{5.28}$$

而

$$T_\infty^{(x)}=\bigcap_{n=0}^{\infty}T_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma(X_{n+1},X_{n+2},X_{n+3},\cdots)$$
$$\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma(S_n,X_{n+1},X_{n+2},X_{n+3},\cdots)$$
$$=\bigcap_{n=0}^{\infty}\sigma(S_n,S_{n+1},S_{n+2},S_{n+3},\cdots)=T_\infty^{(s)}.\tag{5.29}$$

又由(5.28)式,有

$$\boldsymbol{E}(X_0\mid T_\infty^{(s)})=\lim_{n\to\infty}\frac{X_0+X_1+\cdots+X_n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_n)\in T_m\quad(m\geqslant 0).$$

所以

$$E(X_0 \mid T_\infty^{(s)}) \in T_\infty^{(x)} = \bigcap_{m=0}^{\infty} T_m. \tag{5.30}$$

由 $\sigma(X_n)$ 与 $T_\infty^{(x)}$ 独立及(5.29)、(5.30)式得

$$\begin{aligned} E(X_0) &= E(X_0 \mid T_\infty^{(x)}) = E(E(X_0 \mid T_\infty^{(s)}) \mid T_\infty^{(x)}) \\ &= E(X_0 \mid T_\infty^{(s)}). \end{aligned} \tag{5.31}$$

由(5.28)和(5.31)式,即得(1).

(2) 由(1)得

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(X_0 \wedge k) + (X_1 \wedge k) + \cdots + (X_n \wedge k)] \\ &\quad = E((X_0 \wedge k)), \text{[a.e.]} \quad (k \geqslant 0). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \inf \frac{X_0 + X_1 + \cdots + X_n}{n} \\ &\quad \geqslant \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{[(X_0 \wedge k) + (X_1 \wedge k) + \cdots + (X_n \wedge k)]}{n} \\ &\quad \geqslant \lim_{k\to\infty} E((X_0 \wedge k)) = E(X_0) = \infty. \end{aligned}$$

定理 5.9(Borel-Contelli 引理) 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间,$A_n \in \mathscr{F}\ (n \geqslant 0)$,则

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty \Longrightarrow P(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$;

(2) $\{A_n\}$ 独立,$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty \Longrightarrow P(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$.

首先,我们证明一条引理.

引理5.1 令$U_n: \Omega \mapsto [0,1]$, $U_n \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(U_0, U_1, \cdots, U_n)$, $n \geqslant 0$. 则

“$\sum_{n=0}^{\infty} U_n$, [a.e.] 收敛且有穷 $\Longleftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} E(U_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$, [a.e.] 收敛且有穷”,

其中 $\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}$.

证 令 $D_n=U_n-\boldsymbol{E}(U_n|\mathscr{F}_{n-1})\ (n\geqslant 0)$,则 $\boldsymbol{E}(D_n|\mathscr{F}_{n-1})=0\ (n\geqslant 0)$,由第九章定理 1.1 得知

$$X=\left\{X_n=\sum_{k=0}^{n}D_k,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\right\}$$

是鞅,且 $\boldsymbol{E}(D^*)\equiv\boldsymbol{E}(\sup_{n\geqslant 0}|D_n|)\leqslant 2$. 由第九章定理 3.4 有

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{n=0}^{\infty}U_n=\infty,\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{E}(U_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\right\}\\&\quad\subset\left\{\lim_{n\to\infty}X_n=\infty\right\}\subset\left\{\inf_{n\geqslant 0}X_n>-\infty\right\}\\&\quad\subset\left\{\lim_{n\to\infty}X_n\text{ 收敛且有穷}\right\},\ [\text{a.e.}],\end{aligned}$$

所以上式左方集合概率为 0. 仿之可证

$$P\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_n<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{E}(U_n|\mathscr{F}_{n-1})=\infty\right)=0.$$

引理证毕.

现在我们用引理 5.1 来证定理 5.9. 令

$$U_n=\mathbf{1}_{A_n}\ (n\geqslant 0),\quad \mathscr{F}_n=\sigma(U_0,U_1,\cdots,U_n)\ (n\geqslant 0),$$

则 $\{U_n:n\geqslant 0\}$ 满足引理 5.1 的条件.

(1) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{E}(U_n)=\boldsymbol{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_n\right)$, 而且 "$\sum_{n=0}^{\infty}U_n<\infty,\ [\text{a.e.}]\Longleftrightarrow P(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=0$",所以

$$\text{“}\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)<\infty\Longrightarrow P(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=0\text{”}.$$

(2) 由于 $\{A_n\}$ 相互独立,所以

$$\boldsymbol{E}(U_n|\mathscr{F}_{n-1})=\boldsymbol{E}(U_n)=P(A_n).\tag{5.32}$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty}P(A_n)=\infty$、(5.32) 式及引理 5.1,得 $P\left(\sum_{n=0}^{\infty}U_n=\infty\right)>0$. 所以

$$P(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)>0.$$

但 $\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 是 $\{U_n\}$ 的尾集合，$\{U_n\}$ 相互独立，所以由定理5.6得知 $P(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=1$.

下面再介绍一个鞅在 Brown 运动中的应用.

定理 5.10 设 $\{X_t:t\in[0,\infty)\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的一个 S.B[1].M.O.，则

$$\lambda P(\sup_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{aX_t-\frac{ta^2}{2}}>\lambda)\leqslant 1\quad(\lambda>0,\alpha\in\mathbf{R}).\qquad(5.33)$$

证 由于 X_t 服从正态分布 $N(0,t)$，所以

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{e}^{aX_t-\frac{ta^2}{2}})\equiv 1\quad(t\geqslant 0).$$

由例 1.4 知

$$(Y_t=\mathrm{e}^{aX_t-\frac{ta^2}{2}},\mathscr{G}_t^0,t\in[0,\infty))\quad(\mathscr{G}_t^0=\sigma(X_s,s\leqslant t))$$

是鞅. 又因为 $X(\cdot,\omega)$ 连续，所以，由定理第九章 1.2′ 并注意 $Y_t\geqslant 0\ (t\in[0,\infty))$ 可得

$$\begin{aligned}\lambda P(\sup_{t\geqslant 0}Y_t>\lambda)&=\lim_{s\to\infty}\lambda P(\sup_{t\in[0,s]}Y_t>\lambda)\\&\leqslant\lim_{s\to\infty}(-\boldsymbol{E}(Y_0)+2\boldsymbol{E}(Y_s^+))\\&=\lim_{s\to\infty}(-\boldsymbol{E}(Y_s)+2\boldsymbol{E}(Y_s))\\&=\boldsymbol{E}(Y_0)=1.\end{aligned}$$

注：若取 $\lambda=\mathrm{e}^{\alpha\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$，则有

$$\begin{aligned}&P\left(X_t>\frac{\alpha t}{2}+\beta,\text{ 对某一个 }t\in[0,\infty)\right)\\&=P\left(\sup_{t\geqslant 0}\left(X_t-\frac{\alpha t}{2}\right)>\beta\right)\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha\beta}.\end{aligned}$$

最后介绍一点鞅在马尔可夫过程中的应用.

定义 5.2 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{G}_t^0,X_t,\theta_t,P^x,\mathrm{T})$ 是以 $(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$ 为状态空间的马尔可夫过程，$\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots,\infty\}$, $N(t,x,A)$

$= \boldsymbol{E}^x(\mathbf{1}_A(X_t))$ 是 X 的转移函数，$f \in \mathscr{E}_\Delta$，$f \geqslant 0$. 如果

$$N(t,x,f) \equiv \int_{E_\Delta} N(t,x,\mathrm{d}y) f(y) \leqslant f(x)$$

$$(x \in E_\Delta,\ t = 1,2,\cdots), \qquad (5.34)$$

则称 f 是 X 的**盈函**（或 $N(t,x,A)$ 的盈函）. 若(5.34)式中的"$\leqslant$"换为"$=$"，则说 f 是 X 的**谐函**（或者 $N(t,x,A)$ 的谐函）.

由于

$$N(t,x,A) = \int_{E_\Delta} \cdots \int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}x_1) \cdots$$

$$N(1,x_{t-2},\mathrm{d}x_{t-1}) N(1,x_{t-1},A),$$

所以，若令 $N(x,f) = N(1,x,f)$，则(5.34)式等价于

$$N(x,f) \leqslant f(x) \quad (x \in E_\Delta). \qquad (5.34)'$$

定理 5.11 设 X 如前，且正规，$f \in \mathrm{r}\mathscr{E}_\Delta$，$f \geqslant 0$，则下列陈述等价：

（i） f 是 X 的盈函（对应地，谐函）；

（ii） $(f(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,2,\cdots\})$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P^x)$ 上的上鞅（对应地，鞅）$(x \in E_\Delta)$.

证 （i）$\Longrightarrow$（ii）. 设 f 是 X 的盈函，则 $0 \leqslant \boldsymbol{E}^x(f(X_t)) = N(t,x,f) \geqslant f(x) < \infty$ $(x \in E_\Delta,\ t \geqslant 0)$. 用马尔可夫性得

$$\boldsymbol{E}^x(f(X_{s+t}) \mid \mathscr{G}_s^0) = \boldsymbol{E}^{X_s}(f(X_t))$$

$$= N(t,X_s,f) \leqslant f(X_s) \quad (x \in E_\Delta,\ s,t \geqslant 0),$$

即 $\{f(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,2,\cdots\}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P^x)$ 上的上鞅.

（ii）$\Longrightarrow$（i）. 设 $\{f(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,2,\cdots\}\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P^x)$ 上的上鞅 $(x \in E_\Delta)$，则

$$f(x) = f(X_0) \geqslant \boldsymbol{E}^x(f(X_t) \mid \mathscr{G}_0^0)$$

$$= \boldsymbol{E}^{X_0}(f(X_t)) = N(t,X_0,f)$$

$$= N(t,x,f),\ [\text{a.e.}]\ (\text{对测度 } P^x).$$

而上式左右两边与 $\omega \in \Omega$ 无关，所以

$$f(x) \geqslant N(t,x,f) \quad (x \in E_\Delta,\ t \geqslant 0).$$

即 f 是 X 的盈函.

定义 5.3 设 X,N 如定义 5.2.称

$$U(x,A) = \sum_{t=0}^{\infty} N(t,x,A) \quad (x \in E_\Delta,\ A \in \mathscr{E}_\Delta) \tag{5.35}$$

为 X 的(或者其转移函数 N 的)**Green 函数**. 显然 $0 \leqslant U(x,A) \leqslant \infty$ ($N(0,x,A)$ 定义为 $\mathbf{1}_A(x)$) 对任何 $h: E_\Delta \mapsto [0,\infty]$, $h \in \mathscr{E}_\Delta$, 定义

$$U(x,h) = \int_{E_\Delta} U(x,\mathrm{d}y)h(y). \tag{5.36}$$

由于

$$\begin{aligned} U(x,h) &= h(x) + \int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}y)U(y,h) \\ &\geqslant \int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}y)U(y,h), \end{aligned} \tag{5.37}$$

所以 $p_h(\cdot) \equiv U(\cdot,h)$ 是 X 的盈函,称之为 h 的**势函**.

定理 5.12 设 X,N,U 如定义 5.3. 对 X 的任何实值盈函 f 总可唯一地分解为

$$f = Uh + f'\ (Uh(x) = U(x,h)), \tag{5.38}$$

其中 f' 是 X 的谐函, $0 \leqslant h \leqslant \infty$, $h \in \mathscr{E}_\Delta$, Uh 是势函. (5.38) 式称为盈函 f 的 **Riesz 分解**.

此外,

$$\lim_{t\to\infty} f(X_t) = \lim_{t\to\infty} f'(X_t) \tag{5.39}$$

是[a. e.] 收敛且有穷的(对每个 P^x).

证 由于 $0 \leqslant f < \infty$, $0 \leqslant N(t,x,f) \leqslant f(x) < \infty$,所以可令

$$h(x) = f(x) - N(1,x,f), \tag{5.40}$$

显然 $0 \leqslant h < \infty$, $h \in \mathscr{E}_\Delta$,又因为 $N(t,x,f)$ 对 t 而言单调非升,且 $N(t,x,f) \leqslant f(x) < \infty$ $(t \geqslant 0)$,所以可令

$$f'(x) = \lim_{t\to\infty} N(t,x,f), \tag{5.41}$$

显然 $0 \leqslant f'(x) < \infty$, $f' \in \mathscr{E}_\Delta$. 再一次注意 $0 \leqslant N(t,x,f) \leqslant f(x) < \infty$ (对一切 $t \geqslant 0, x \in E_\Delta$),并用积分的控制收敛定理,得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to\infty} N(t,x,f) \\ &= \lim_{t\to\infty}\int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}y)N(t-1,y,f) \\ &= \int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}y)f'(y), \end{aligned}$$

即 f' 是 X 的谐函.

事实上,由(5.40)式有

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} N(t,x,h) &= \sum_{t=0}^{n-1} N(t,x,f) - \sum_{t=0}^{n-1}\int_{E_\Delta} N(t,x,\mathrm{d}y)N(1,y,f) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} N(t,x,f) - \sum_{t=1}^{n} N(t,x,f) \\ &= f(x) - N(n,x,f). \end{aligned}$$

在上式令 $n \to \infty$,即得

$$U(x,h) = f(x) - f'(x),$$

(5.38) 式得证.

再证 Riesz 分解(5.38) 式的唯一性. 设还有另一组 Riesz 分解

$$f = Uh^* + f^*, \tag{5.38$'$}$$

$0 \leqslant h^* < \infty$, $h^* \in \mathscr{E}_\Delta$, f^* 是 X 的谐函. 则由

$$U(x,A) = \mathbf{1}_A(x) + \int_{E_\Delta} N(1,x,\mathrm{d}y)U(y,A) \tag{5.42}$$

及(5.38) 式,得

$$\begin{aligned} f &= Uh^* + f^* = Uh^* + N(1,\cdot,f^*) \\ &= h^* + \int_{E_\Delta} N(1,\cdot,\mathrm{d}y)U(y,h^*) + N(1,\cdot,f^*) \\ &= h^* + N(1,\cdot,f). \end{aligned} \tag{5.43}$$

仿之(在利用(5.38)′式时改用(5.38)式),可得

$$f = h + N(1, \cdot, f). \tag{5.44}$$

比较(5.43)、(5.44)式并注意 $0 \leqslant f,\ N(1, \cdot, f) < \infty$,可得 $h = h^*$,从而 $f' = f^*$,唯一性证毕.

最后证明极限(5.39)式对每个 $P^x(x \in E_\Delta)$ 是[a.e.]收敛且有穷的.事实上,由于 $\{f(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,\cdots\}\}$, $\{f'(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,\cdots\}\}$, $\{Uh(X_t), \mathscr{G}_t^0, t \in \{0,1,\cdots\}\}$ 都是 $(\Omega, \mathscr{F}, P^x)$ 上的非负上鞅(注意:非负上鞅总是 L' 有界的,因为 $0 \leqslant \boldsymbol{E}^x(f(X_t)) \leqslant \boldsymbol{E}^x(f(X_0)) < \infty$),所以由定理 1.5 得知

$$\lim_{t\to\infty} f(X_t)\ ,\ \lim_{t\to\infty} f'(X_t)$$

皆是[a.e.]收敛且有穷的(对 P^x 测度).请注意:上述两极限是[a.e.]相等的,因为

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}^x(Uh(X_t)) &= \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}^x\Big(\sum_{s=0}^{\infty} N(s, X_t, h)\Big) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{E}^x(N(s, X_t, h)) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{E}^x(\mathbf{E}^{X_t}(h(X_s))) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{E}^x(\boldsymbol{E}^x(h(X_{s+t}) \mid \mathscr{G}_t^0)) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{E}^x(h(X_{s+t})) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{s=t}^{\infty} N(s, x, h) \\
&= 0 \quad (\text{因为 } \infty > Uh(x) = \sum_{s=0}^{\infty} N(s, x, h) \geqslant 0),
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{t\to\infty} Uh(X_t) = 0,\ [L^1]. \tag{5.45}$$

而由(5.38)式及 $\lim\limits_{t\to\infty} f(X_t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f'(X_t)$ 是[a.e.]收敛且有穷的得

知

$$\lim_{t\to\infty} Uh(X_t) = 0, \text{[a.e.]} \quad (\text{对任意 } P^x).$$

再一次运用(5.38)式得知

$$\lim_{t\to\infty} f(X_t) = \lim_{t\to\infty} f'(X_t), \text{[a.e.]} \quad (\text{对一切 } P^x).$$

参 考 文 献

[1] Ash R B, Garduer M F. Topics in stochastic processes. New York: Academic Press, 1975

[2] Bertoin J. Lévy processes. Cambridge: Cambridge Press, 1996

[3] Billingsley P. Convergence of probability measure. New York: John Wiley and Sonc., 1968.

[4] Blumenthal R M, Getoor R K. Markov processes and potential theory. New York: Academic Press, 1968

[5] Burkholder D L. Martingale transforms. Ann. Math. Sta., 37, 1966: 1494~1504

[6] Burkholder D L. A sharp inequality for martingale transforms. Ann. Probability, 7, 1979: 858~863

[7] Burkholder D L. A geometrical characterization of Banach space in which martingale difference sequences are unconditional. Ann. Probability, 9, 1981: 997~1011

[8] Chacon R V, Ornstein D S. A general ergodic theorem. Illinois J. Math., 4, 1960: 153~160

[9] Chatterji S D. Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach space. Math. Scand., 22, 1968: 21~41

[10] 钱敏,侯振挺等.可逆马尔可夫过程.湖南:湖南科学技术出版社,1979

[11] 陈木法,郑小谷. q 过程的唯一性准则. 中国科学(A), 1982: 288~308

[12] Chung K L. Markov chains with stationary transition proba-

bilities. New York: Springer-Verlag, 1960

[13] Dellacherie C. Capacites et processus stochastiques. New York: Springer-Verlag, 1972

[14] Diestel J, Uhl J J Jr. Vector measure. Mathematical Surveys, No. 15, Providence, Rhode Island, 1977

[15] Doob J L. Stochastic processes. John Wiley and Sons, Inc., 1953

[16] Дынкин Е Б. Основании Теории Марковских процессов. Государставеиное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва, 1959

[17] Дынкин Е Б . Марковские процессы . Государставеиное Издательство Физикоматематической Литературы, Москва, 1963

[18] Дынкин Е Б, Ющкевич А А. Строго Марковские процессы. Теор Веро. и её прим., 1, 1956: 149～156

[19] Federer H. Geometric measure theory. New York: Springer-Verlag, 1969

[20] Feller W. An introduction to probability theory and its applications, (Vol 2.) Second edition. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1971

[21] Getoor R K. Markov processes, Ray processes and right processes. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 440, 1975

[22] Гихман и и, Скороход А В. Введение В Теорию случаиных процессов Издательство《Hayka》, Москва, 1965

[23] Halmos P R. Measure theory. New York: D. Van Nostrand Company INC., 1950

[24] Harris T E. The theory of branching processes. New York: Springer-Verlag, 1963

[25] Hille E. Functional analysis and semi-groups. Amer. Math.

Soc. Colloquium Publications, 31, 1948

[26] 侯振挺,郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京:科学出版社,1978

[27] 胡迪鹤. 分析概率论(第二版),北京:科学出版社,1997

[28] 胡迪鹤. 一般状态马氏过程分析理论. 武汉:湖北教育出版社,1985

[29] 胡迪鹤. 可数状态的马尔可夫过程论. 武汉:武汉大学出版社,1983

[30] 胡迪鹤. 不变原理及其在分枝过程中的应用. 北京大学学报,10(1),1964:1~26

[31] 胡迪鹤. 马尔可夫链的泛函的极限分布. 武汉大学学报,23(3),1977:63~79

[32] 胡迪鹤. 抽象空间中 q-过程的构造理论. 数学学报,16(2),1966:150~165

[33] 胡迪鹤. 度量空间中转移函数的强连续性,Feller 性及强马尔可夫性. 数学学报,20(4),1977:298~300

[34] 胡迪鹤. 抽象空间中 q-过程的构造理论(Ⅱ). 数学学报,21(2),1978:190~192

[35] 胡迪鹤. 非时齐的可数状态的 Q-过程的存在唯一性. 数学学报,21(3),1978:285~287

[36] 胡迪鹤. 关于某些随机阵的调和函数. 数学学报,22(3),1979:276~290

[37] 胡迪鹤. 抽象空间中非时齐马氏过程的分析理论(Ⅰ). 数学学报,22(4),1979:420~437

[38] 胡迪鹤. 抽象空间中非时齐马氏过程的分析理论(Ⅱ). 数学学报,22(5),1979:530~545

[39] 胡迪鹤. 抽象空间中非时齐马氏过程的分析理论(Ⅲ). 数学学报,22(6),1979:643~651

[40] 胡迪鹤. 抽象空间中 q-过程的唯一性准则. 数学学报,23(5),1980:750~757

[41] 胡迪鹤.抽象空间中马氏过程的强遍历性及收敛速度.数学学报,27(3),1984:293～304

[42] 胡迪鹤.抽象空间中 q-过程的遍历位势.数学学报,27(4),1984:469～481

[43] 胡迪鹤.马氏场的遍历性及耦合.数学学报,35(4),1992:505～515

[44] Hu Xiaoyu, Hu Dihe. The dimensions of the zero sets of a recurrent random walk. Chinese J. of Contemparary Math., 16 (3), 1995:275～282

[45] Hu Dihe, et. al. Summary of Recent Research Accomplishments in Markov Processes and Markov Fields at Wuhan University. Contemporary Math. (U.S.A.), 118, 1991:149～168

[46] 胡迪鹤.关于 B 值鞅及经典分析.应用概率统计,2(4),1986

[47] 胡迪鹤.Hilbert 空间上各向同性的马氏场(Ⅰ).数学杂志,3(1),1983:35～54

[48] 胡迪鹤.Hilbert 空间上各向同性的马氏场(Ⅱ).数学杂志,3(2),1983:145～156

[49] 胡迪鹤.甘师信.近代鞅论.武汉:武汉大学出版社,1993

[50] 胡迪鹤.随机分形引论.武汉:武汉大学出版社,1996

[51] Ibragimov I A, Rozanov Y A. Gaussian random processes. New York: Springer-Verlag, 1978 (Translated by Aries A.B.)

[52] 伊藤清.随机过程(中译本,刘璋温译).上海:上海科学技术出版社,1961

[53] Ito K, Mckean H P Jr. Diffusion processes and their sample paths. New York: Academic Press, 1965

[54] 江泽培.平稳过程讲义(手稿,未出版).

[55] Kelley J L. General topology. New York: Springer-Verlag, 1955

[56] Kemeny J G, Snell J L, Knapp A W. Denumerable Markvv Chains. New York: Springer-Verlag, 1976

[57] Kingman J F C. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. J. Royal Stat. Soc. B, 30, 1968: 499～510

[58] Kingman J F C. Subadditive processes. Lecture Notes in Math., 539, Springer-Verlag, New York, 1976

[59] Kendall D G. Some analytical properties of continuous stationary Markov transition functions. Tran. Amer. Math. Soc., 78, 1955: 529～540

[60] Lamperti J. Stochastic processes: New York: Springer-Verlag, 1977

[61] Loéve M. Probability theory (4th edition). New York: Springer-Verlag, 1977

[62] Марков А А. Исследование замечателиного случаи зависимых исвытаний. изв. Рос. Акад. Hayk, T. I., 1907

[63] Meyer P A. Processus de Markov. Lecture Notes in Math. 26, Springer-Verlag, New York, 1967

[64] Neveu J. Discrete parameter martingales. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976 (Translated by Speed T.P.)

[65] Parzen E. Stochastic processes. Holden-Day, Inc., 1962

[66] Ray D. Resolvents, Transition functions and Strongly Markovian processes. Ann. Math., 70, 1959: 43～72.

[67] Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroup on L. Acta Math., 97, 1957: 1～46

[68] Reuter G E H. Denumerable Markov processes (Ⅱ), (Ⅲ). J. London Math. Soc., 34, 1959: 81～91, 37, 1962: 63～73

[69] Riesz F, Nagy B Sz. Functional Analysis. 1956

[70] Richart C E. General theory of Banach algebras. New York:

Robert E. Krieger Publishing Co. Inc. ,1974

[71] Rockafeller R T. Convex analysis. New York: Princeton University Press, 1972

[72] Rozanov Yu A. Stationary random processes. San Francisco, 1967

[73] Taylor R L. Stochastic convergence of weighted sums of random elements in linear space. Lecture Notes in Math. ,672, Springer-Verlag,1978

[74] Walters P. An introduction to ergodic theory. New York: Springer-Verlag,1981

[75] 王梓坤.生灭过程与马尔可夫链.北京:科学出版社,1980

[76] 王梓坤.随机过程论.北京:科学出版社,1978

[77] 王梓坤,杨向群.The birth and death processes and Markov chains. New York:Springer-Verlag,1992

[78] Widder D V. The Laplace transform. New York:Princeton University Press,1946

[79] 吴智泉,王向忱.巴氏空间上的概率论.长春:吉林大学出版社,1990

[80] 杨向群.可列马尔科夫过程构造论.湖南:湖南科学技术出版社,1980

[81] 严士健,王隽骧,刘秀芳.概率论基础.北京:科学出版社,1982

[82] 严家安.鞅与随机积分引论.上海:上海科学技术出版社,1981

[83] Yosida K. Functional analysis (sixth edition). New York: Springer-Verlag,1980

[84] 施仁杰,卢科学.时间序列分析引论.西安:西安电子科技大学出版社,1988

索　　引

一　中文部分

二 英文部分

[General Information]
书名=随机过程论：基础、理论、应用
作者=胡迪鹤著
页数=685
SS号=10211306
出版日期=2000年04月第1版